Breviario sulle serie di Fourier

Franco Rampazzo

November 6, 2008

1 Approssimazione quadratica

1.1 Spazi finito-dimensionali

$\mathbb{R}^N$ è uno spazio munito di un prodotto scalare:

$$< f, g > \doteq \sum_{n=1}^{N} f_n g_n,$$

dove $f = (f_1, \ldots, f_N)$, $g = (g_1, \ldots, g_N)$. In particolare è normato, con norma

$$|f| \doteq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (f_n)^2},$$

ed è completo. Se $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ è un insieme di N vettori non nulli e *mutuamente ortogonali*, i.e.,

$$< \phi_n, \phi_m >= 0 \qquad \forall n, m = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

essi sono linearmente indipendenti (è vero anche se i vettori sono meno di N). Infatti, se

$$c_1\phi_1 + \ldots + c_N\phi_N = 0,$$

da (1), per ogni $n = 1, \ldots, N$, si ha

$$0 =< \phi_n, c_1\phi_1 + \ldots + c_N\phi_N >= c_n|\phi_n|^2,$$

che implica $c_n = 0$.

Quindi l'insieme $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ è una base per $\mathbb{R}^N$. In particolare, per ogni $f \in \mathbb{R}^N$ esiste un N-pla $(c_1, \ldots, c_N)$ tale che

$$f = c_1\phi_1 + \ldots + c_N\phi_N \tag{2}$$

(se le ϕ_n sono gli elementi della solita base canonica allora le c_n coincidono con *componenti* f_n).

Dunque: data la base ortogonale $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$, ogni vettore $f \in \mathbb{R}^N$ è univocamente individuato dai suoi coefficienti c_n rispetto a tale base. Viceversa f individua i suoi coefficienti:

$$c_n = \frac{< x, \phi >}{\|\phi_n\|^2}. \tag{3}$$

Osservazione 1.1 *Allo scopo di capire il senso di ciò che faremo con gli spazi infinito-dimensionali (in particolare gli spazi di funzioni), notiamo che se avessimo posto il problema di trovare dei c_n tali che il quadrato della distanza tra f e $\sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n$ sia minima avremmo trovato gli stessi c_n (perchè?), e tale mimima distanza sarebbe risultata uguale a....0 ! Di fatto, non di approssimazione si tratta, ma di identità. Non ci aspettiamo tanto, in generale, per gli spazi di dimensione infinita....*

2 Spazi infinito dimensionali

Sia $(\|V\|, <, >)$ uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare. In particolare è normato, con norma

$$\|x\| \doteq \sqrt{< x, x >},$$

(è completo, n.d.r.) Se $\Phi\{\phi_1, \phi_2, ...\}$ è un insieme vettori non nulli e *mutuamente ortogonali*, i.e.,

$$< \phi_n, \phi_m >= 0 \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

in particolare essi sono linearmente indipendenti. Infatti, se $\{\phi_{n_1}, \ldots, c_m\phi_{n_m}\} \subset \Phi$ è un qualunque sottoinsieme finito, e

$$c_1\phi_{n_1} + \ldots + c_m\phi_{n_m} = 0,$$

da (4), per ogni $j = 1, \ldots, m$, si ha

$$0 =< \phi_{n_j}, c_1\phi_{n_1} + \ldots + c_m\phi_{n_m} >= c_n|\phi_{n_j}|^2,$$

il che implica $c_j = 0$.

In generale non sarà mai vero, come invece accade nel caso finito-dimensionale, che ogni elemento di V si possa scrivere come combinazione lineare di elementi di Φ.

Si può tuttavia sperare di ottenere un simile risultato mediante ciò che impropriamente potremmo chiamare *combinazioni lineari infinite*: questa è l'idea che sta alla base delle Serie di Fourier. Ne daremo qui una definizione per uno spazio vettoriale V con prodotto scalare, ma subito dopo specializzeremo la nostra indagine alle serie di seni e coseni, che sono le serie di Fourier classiche.

A tal fine cerchiamo di seguire l'idea accennata nell'Osservazione 1.1.

Sia f un elemento di V. (Più avanti V sarà uno spazio di funzioni, ma per ora restiamo sull' astratto).

Ci proponiamo i seguenti obbiettivi:

I) trovare dei coefficienti $c_1, c_2, \ldots$ tali che, *per ogni numero naturale* N, la somma parziale

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n$$

sia la MIGLIORE APPROSSIMAZIONE QUADRATICA DI F tra tutte le combinazioni lineari dei vettori $\phi_1, \ldots, \phi_N$

II) Studiare l'eventuale **convergenza (in vari sensi) della serie** $\sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n$ **ad** f .

Il punto $I)$ si può trattare in generale, per uno spazio con prodotto scalare. Il punto $II)$ sarà invece esaminato più in dettaglio nel caso concreto di spazi di funzioni.

2.1 Approssimazione ai minimi quadratici: un modo *ragionevole* per scegliere i coefficienti b_n

Il nostro scopo è di scegliere i coefficienti $c_1, \ldots, c_N$ al fine di minimizzare l'errore quadratico

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n\|^2.$$

Si ha:

Proposizione 2.1 *L' errore quadratico*

$$(c_1, \ldots, c_N) \mapsto \|f - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n\|^2 \tag{5}$$

ha un'unico minimo in

$$c_n = \frac{< f, \phi_n >}{\|\phi_n\|^2} \quad n = 1, \ldots, N \tag{6}$$

Dimostrazione. Cerchiamo di riscrivere l'errore (5) come la somma di due addendi positivi , uno dei quali sia indipendente dai c_n:

$$\begin{aligned} &\|f - \textstyle\sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n\|^2 = \langle f - \sum_{n=1}^{N} c_n, f - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \rangle = \\ &< f, f > -2 \textstyle\sum_{n=1}^{N} c_n < f, \phi_n > + \sum_{n=1}^{N} (c_n)^2 \|\phi_n\|^2 = \\ &\left[\textstyle\sum_{n=1}^{N} \|\phi_n\|^2 \left(c_n - \frac{< f, \phi_n >}{\|\phi_n\|^2}\right)^2\right] + \left[< f, f > - \sum_{n=1}^{N} \frac{< f, \phi_n >^2}{\|\phi_n\|^2}\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Entrambi gli addendi dell'ultima espressione sono non negativi, e solo il primo contiene i coefficienti c_n. Perciò il minimo si ottiene rendendo nullo il primo addendo, il che succede se e solo se vale (6).
$\diamond$

Osservazione 2.2 Il risultato non dipende da N. *Per esempio se prima si approssima con $N = 3$, cioè con i primi tre ϕ_n, e si trovano determinati c_1, c_2, c_3, e poi si approssima con $N = 5$, cioè con i primi cinque, e si trovano coefficienti $c'_1, c'_2, c'_3, c'_4, c'_5$, allora*

$$c_1 = c'_1, c_2 = c'_2, c_3 = c'_3$$

Osservazione 2.3 *Formalmente la scelta dei coefficienti è la stessa del caso finito-dimensionale (cfr. (3) e (6)).*

2.2 Serie di Fourier

Definizione 2.4 *I coefficienti c_n definiti da (6) si dicono* **i coefficienti di Fourier di** f *rispetto al sistema di vettori ortogonali ϕ_n. La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

(ove i c_n sono definiti in (6)) si dice **la serie di Fourier di** f**.**

A che punto siamo? D'ora in poi si intende che i coefficienti c_n siano quelli stabiliti da (6). Essi realizzano il minimo dello scarto da f delle somme parziali. Restano da capire delle questioni fondamentali:

A) La serie di Fourier di f

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

converge?

B) Posto che la risposta ad A) sia affermativa (in qualche senso), la serie di Fourier di f converge a f? (ovviamente questo è quanto ci si augura)

In realtà, queste questioni divengono significative soprattutto quando si esce dall' ambito astratto di uno spazio qualunque V e si ha a che fare con uno spazio di funzioni, in particolare $V \doteq L^2([a, b])$ (v. la "definizione" in seguito). In tali spazi, e per evidenti motivi applicativi, avranno anzi importanza convergenze della serie di Fourier di f (a f) più *concrete*, come la convergenza puntuale e quella uniforme (v.in seguito).

2.3 Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval

Per ora, ricaviamo facilmente un altro risultato astratto, che però sarà di cruciale importanza nelle suddette questioni *concrete*.

Proposizione 2.5 (DISUGUAGLIANZA DI BESSEL) *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n)^2\|\phi_n\|^2$$

converge. Inoltre ,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n)^2\|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2 \tag{8}$$

(ovviamente, il significato di questa uguaglianza è: i) la serie a primo membro è convergente, e, ii) somma della serie è maggiorata dal numero $\|f\|^2$*)*

Dimostrazione. Per ogni valore di N, e inserento i valori stabiliti dei coefficienti c_n, dalla disuguaglianza (7) si ottiene

$$< f, f > - \sum_{n=1}^{N}\frac{< f, \phi_n >^2}{\|\phi_n\|^2} = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N}(c_n)^2\|\phi_n\|^2 \geq 0,$$

cioè,

$$\sum_{n=1}^{N}(c_n)^2\|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2 \tag{9}$$

La serie al primo membro è a termini reali positivi, e dunque o diverge o converge. Ma (9) dice che le sue somme parziali sono limitate dalla costante $\|f\|^2$. Dunque essa converge e la sua somma è limitata da $\|f\|^2$. $\diamond$

UNA QUESTIONE NATURALE: *La disuguaglianza di Bessel può diventare un'uguaglianza?*

Perchè mai è sensato nutrire questa speranza? Semplicemente perchè nel caso finito-dimensionale ciò è vero. Infatti, se $f \in R^N$ si ha

$$|f|^2 =< f, f >=< f, \sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n >= \sum_{n=1}^{N} c_n < f, \phi_n >= \sum_{n=1}^{N}(c_n)^2|\phi_n|^2.$$

Definizione 2.6 *Quando la disuguaglianza di Bessel diventa un'uguaglianza essa si dice* **identità di Parseval***:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n)^2\|\phi_n\|^2 = \|f\|^2 \tag{10}$$

La identità di Parseval è equivalente alla convergenza (nella norma di V) della serie di Fourier di f a f. Più precisamente:

Lemma 2.7 *Dato $f \in V$, l'identità di Parseval vale se e solo se la serie di Fourier di f converge a f (nella norma di V), i.e.,*

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n\| = 0,$$

Osservazione 2.8 *Attenzione: il Lemma 2.7 non dice che l'identità di Parseval* è valida *in generale, ma soltanto che essa è equivalente alla convergenza della serie di Fourier del dato f a f stesso. La sua eventuale validità, deve essere verificata nei casi particolari (ad esempio, quello più classico, quando $V = L^2$.)*

Dimostrazione del Lemma 2.7 . Quando i coefficienti c_n sono quelli fi Frourier, allora, da (7), si ha

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n\|^2 = \left[< f, f > - \sum_{n=1}^{N} \frac{< f, \phi_n >^2}{\|\phi_n\|^2} \right] \tag{11}$$

da cui, facendo tendere N allnfinito da entrambe le parti, segue l'asserto.
$\diamond$

3 Serie di seni e coseni

3.1 Cenni euristici sugli spazi $L^1([a, b])$ e $L^2([a, b])$

Si considerino le funzioni $f_n \in C([-1, 1])$ definite da

$$f_n(x) \doteq \mathrm{sgn}(x) \cdot |x|^{\frac{1}{n}}$$

Esse convergono puntualmente alla funzione

$$f(x) \doteq \begin{cases} -1 & \forall x \in [-1, 0[\\ \\ 0 & x = 0 \\ 1 & \forall x \in]0, 1] \end{cases}$$

che *non è continua*, neppure modificando in essa un insieme di misura nulla (cioè un insieme *non troppo grande* v. oltre) di punti . D'altra parte le funzioni convergono a f nella norma L^2, vale a dire

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^{1} |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

In particolare, dunque, $C([-1, 1])$ non è completo nella norma $\|\cdot\|_2$, (e neppure in quella $\|\cdot\|_1$).

Ne segue l'esigenza di ampliare $C([-1, 1])$ in modo da ottenere uno spazio completo quando si usi $\|\cdot\|_2$. Per fare questo in modo rigoroso necessiteremmo della teoria dell' integrazione di Lebesgue, nell'ambito della quale si introduce lo spazio $L^2([a,b])$. Non avendo il tempo di introdurre tale teoria, ci accontentiamo di dare una rappresentazione di $L^2([a,b])$ mediante il noto integrale di Riemann, precisando al contempo cosa si intenda per *insieme di misura nulla.*

Definizione 3.1 **Un insieme** $\mathcal{Q} \subset$ *si dice di* **misura nulla** *se* $\forall \epsilon > 0$ *esiste una successione* $([a_n, b_n])$ *di intervalli tali che:*
i) $\mathcal{Q} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}[a_i, b_i]$*;*
ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \leq \epsilon$

Esempi di insiemi di misura nulla:

- Ogni sottoinsieme insieme finito $\{x_1, \ldots, x_h\} \subset \mathbb{R}$;
- L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Ogni sottoinsieme insieme numerabile $\{x_n, \quad n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$

Definizione 3.2 *L' insieme* $L^1([a,b])$ *è costituito da tutte le funzioni* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tali che* $|f|$ *è integrabile in senso generalizzato (brevemente:*$\int_a^b |f(t)|dt \leq \infty$*). Sono considerate* equivalenti *due funzioni i cui valori differiscono solo su di un insieme di misura nulla. Gli integrali di due funzioni equivalenti coincidono.*[1]

Lo spazio vettoriale $L^1([a,b])$ *è munito della norma*

$$\|f\|_1 \doteq \int_a^b |f(t)|dt$$

Definizione 3.3 *L' insieme* $L^2([a,b])$ *è costituito da tutte le funzioni* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tali che* f^2 *è integrabile in senso generalizzato (brevemente:*$\int_a^b (f(t))^2 dt < \infty$*). Sono considerate equivalenti due funzioni i cui valori differiscono solo su di un insieme di misura nulla. Lntegrale di di*

Lo spazio vettoriale $L^2([a,b])$ *è munito del prodotto scalare*

$$< f, g > \doteq \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

a cui corrisponde la norma

$$\|f\|_2 \doteq \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Teorema 3.4 *Gli spazi normati* $L^2([a,b])$ *ed* $L^2([a,b])$ *sono completi.*

Chiaramente $C([a,b]) \subset L^1([a,b]) \subset L^2([a,b])$

[1] Va preso intuitivamente: ancora una volta, per il rigore servirebbe la teoria della misura di Lebesgue.

3.2 Il sistema ortogonale di seni e coseni

Lemma 3.5 *Le funzioni, definite in* $[-\pi, \pi]$,

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots 1\}$$

sono mutuamente ortogonali in $L^2([-\pi, \pi])$, *vale a dire*

$$\int_{[-\pi,\pi]} 1 \cdot \sin(nt)dt = 0, \quad \int_{[-\pi,\pi]} 1 \cdot \cos(nt)dt = 0,$$

$$\int_{[-\pi,\pi]} \cos(nt) \cdot \sin(mt)dt = 0 \;\; \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\int_{[-\pi,\pi]} \cos(nt) \cdot \cos(mt)dt = 0 \Leftrightarrow m \neq n$$

$$\int_{[-\pi,\pi]} \sin(nt) \cdot \sin(mt)dt = 0 \Leftrightarrow m \neq n$$

Inoltre

$$\int_{[-\pi,\pi]} \Big(\sin(nt)\Big)^2 dt = \int_{[-\pi,\pi]} \Big(\cos(nt)\Big)^2 dt = \pi$$

Data $f \in L([-\pi, \pi])$, si usa porre

$$a_n \doteq \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f \cos(nt)dt \quad b_n \doteq \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f \sin(nt)dt$$

cosicché la serie di Fourier associata a f risulta essere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Scriveremo

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

per esprimere che il secondo membro è la serie di Fourier associata a f. Useremo anche il simbolo $\mathcal{F}(f)$ per indicare tale serie:

$$\mathcal{F}(f) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Dunque

$$f \sim \mathcal{F}(f).$$

(Ancora una volta: non confondere la serie in quanto tale, cioè la successione delle somme parziali, con la sua eventuale somma.)

Specializzata a questo contesto, la disuguaglianza di Bessel è espressa nel modo seguente:

Proposizione 3.6 (DISUGUAGLIANZA DI BESSEL). *Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$, e siano $\frac{a_0}{2}, a_1, b_1, \ldots$ i coorispondenti coefficienti di Fourier. Allora*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{(\|f\|_2)^2}{\pi}$$

L' IDENTIT'A DI PARSEVAL diviene

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{(\|f\|_2)^2}{\pi}$$

Per quanto visto nel caso astratto, il verificarsi dell' identit'a di Parseval è equivalente alla convergenza della serie di Fourier $\mathcal{F}(f)$ a f nella norma $\|\cdot\|_2$. Vedremo più avanti che ciò si verifica per tutte le funzioni in $L^2([-\pi,\pi])$.

Ora ci occuperemo invece di convergenze più cruciali da un punto di vista applicativo: quella puntuale e quella uniforme (abbiamo già visto che la convergenza in L^2 non garantisce la convergenza puntuale.)

3.3 Convergenza puntuale

Si può dimostrare con un esempio che la continuità in un punto x di una funzione $f \in L^2([-\pi,\pi])$ *non* garantisce che la serie di Fourier in x, $\mathcal{F}(f)(x)$, converga a $f(x)$. Neppure se f è continua ovunque ciò è garantito. Il seguenti risultati, la cui dimostrazione si può vedere ad esempio in [W,§§17-18], danno condizioni sufficienti per la convergenza puntuale al valore della funzione o al punto di mezzo dei limiti destro e sinistro.

Data una funzione f definita in $[-\pi,\pi[$ possiamo prolungarla a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità di periodo 2π, ponendo

$$f(x+2k\pi) = f(x) \qquad \forall x \in [-\pi,\pi[, k \in \mathbb{Z}$$

.

Teorema 3.7 (TEST DI DINI) *Una funzione $f \in L^2([-\pi,\pi])$, prolungata a $\mathbb{R}$ per periodicità di periodo 2π, soddisfi la condizione di Dini (Dini's test) in x*

$$\int_{[-\pi,\pi]} \frac{|f(x+\tau) - f(x)|}{|\tau|} d\tau < \infty \tag{12}$$

Allora la serie di Fourier in x, $\mathcal{F}(f)(x)$, converge a $f(x)$.

Osservazione 3.8 *La condizione di Dini non può essre verificata in un punto x dove esiste il limite* $\lim_{y\to x} f(x)$ *e* $\lim_{y\to x} f(y) \neq f(x)$.[2]

Tuttavia il risultato seguente,dà una risposta circa la convergenza nel caso in cui esistano limite destro e sinistro in un punto.

[2]Ciò non significa che la condizione di Dini implichi la continuità: il limite potrebbe semplicemente non esistere e la condizione essere ancora valida. Chi se la sente trovi un esempio.

Teorema 3.9 (Test di Dini migliorato) *Una funzione* $f \in L^2([-\pi, \pi])$, *prolungata a* $\mathbb{R}$ *per periodicità di periodo* 2π, *abbia limite destro e sinistro in un punto* x *soddisfi la condizione di Dini migliorata (improved Dini's test) in* x

$$\int_{[0,\pi]} \frac{|f(x+\tau) - f(x+0) + f(x-\tau) - f(x-0)|}{\tau} d\tau < \infty. \tag{13}$$

Allora la serie di Fourier in x, $\mathcal{F}(f)(x)$, *converge alla media*

$$\frac{f(x+0) - f(x+0)}{2}.$$

Rinviando al testo [W] per le dimostrazioni (che includono il fondamentale Lemma di Riemann-Lebesgue), vediamo invece di individuare delle semplici classi di funzioni che soddisfano alle ipotesi dei teoremi 3.7 e 3.9.

Definizione 3.10 *Sia* $f : E \to \mathbb{R}^n$ *una funzione, dove* $E \subset \mathbb{R}^m$ *è un sottoinsieme qualunque, sia* $x \in J$, *e* $\alpha \in]0, 1]$.

La funzione f *si dice:*

- α**-Hölderiana** (o Hölderiana di esponente α) in x *se esiste un numero* $L \geq 0$ *tale che*
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad \forall y \in E$$
;
- α**-Hölderiana** o Hölderiana di esponente α) *se esiste un numero* $L \geq 0$ *tale che*
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in E$$
;
- **Lipschitziana in** x *[rispettivamente:* **Lipschitziana***] se essa è Hölderiana di esponente* 1 *in* x *[ripettivamente:* Hölderiana di esponente 1*], cioè, se esiste un numero* $L \geq 0$ *tale che*
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall y \in E$$
[rispettivamente:
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in E \quad]$$

Osservazione 3.11 *Per definizione, ogni* α*-Hölderiana è* α*-Hölderiana in ogni* $x \in E$.

Inoltre, se f *è* α*-Hölderiana in* x *essa è certamente continua in* x*. Verificarlo. (Non vale viceversa. Esempio:* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$ *se* $x \neq 0$, *e* $f(0) \doteq 0$*. Verificare che non è* α*-Hölderiana in* 0 *per alcun* α*)*

Definizione 3.12 *Si dice che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è* **continua a tratti** *se esiste una suddivisione finita $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ tale f è continua in $[a, b] \setminus \{x_0, \ldots, x_k\}$, e, inoltre, f ammette limite destro e sinistro in ogni punto di $]a, b[$, e limite destro [risp. sinistro] in b [risp. a]. Indicheremo lo spazio di tali funzioni con il simbolo*

$$C_{pw}([a, b])$$

($_{pw}$ sta per piece-wise, in inglese queste funzioni si dicono piece-wise continuous).

Si dice che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è C^1 **a tratti** *se esiste una suddivisione finita $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ tale f' esiste ed è continua in $[a, b] \setminus \{x_0, \ldots, x_k\}$, e, inoltre, f' ammette limite destro e sinistro in ogni punto di $]a, b[$, e limite destro [risp. sinistro] in b [risp. a].*

Indicheremo lo spazio di tali funzioni con il simbolo

$$C^1_{pw}([a, b])$$

Si noti che né le continue a tratti né le C^1 a tratti sono in generale continue.

<u>Casi importanti.</u>

(1) Sia J un intervallo ed $f : J \to \mathbb{R}$ derivabile. Se la derivata f' è limitata in J (i.e., esiste $K \geq 0$ tale che $f'(x) < K$ per ogni $x \in J$) allora f è Lipschitziana. Verificarlo usando il teorema di Lagrange.

In particolare, se $f \in C^1[a, b]$, f è Lipschitziana (perché?)

(2) Più in generale, se $f \in C^1_{pw}[a, b] \cap C([a, b])$, (cioè f è C^1 a tratti *e* continua), allora f è Lipschitziana. (Verificarlo, applicando il Th. di Lagrange ai tratti $[x_i, x_{i+1}]$ e concludendo a causa della finitezza della suddivisione.

(3) Se $f \in C^1([a, +\infty[)$, f può non essere Lipschitziana.

(4) x^α è α-Hölderiana. *Non è Lipschitziana* se $0 < \alpha < 1$. (Verificare entrambe le affermazioni)

Teorema 3.13 *Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$, e se ne consideri il solito prolungamento periodico di periodo 2π. Allora valgono le seguenti implicazioni:*

- *Se f è derivabile in x , oppure se f è α-Hölderiana in x, allora essa soddisfa la condizione di Dini in x (In particolare la serie di Fourier in x converge a $f(x)$).*
- *Se $f \in C^1_{pw}[-\pi, \pi]$ allora essa soddisfa la condizione di Dini nei punti x di continuità (e dunque la serie di Fourier in x converge a $f(x)$) , mentre soddisfa la condizione di Dini migliorata nei punti di discontinuità (e dunque, per ogni tale punto x, la serie di Fourier converge a $(f(x + 0) - f(x - 0))/2$)*

4 Convergenza uniforme

È immediato constatare (farlo!) che se la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2[-\pi, \pi]$ converge uniformemente a f allora si ha

$$f \in C([-\pi, \pi]), \qquad f(pi) = f(\pi).$$

Queste sono dunque condizioni necessarie per la convergenza uniforme. Non sono però sufficienti, non essendo sufficienti neppure per la convergenza puntuale. Il seguente teorema assume ulteriori ipotesi su f, così da ottenere una condizione sufficiente per la convergenza uniforme:

Teorema 4.1 *Sia $f \in L^2[-\pi, \pi]$ e si assumano le seguenti ipotesi:*

i) f è continua;

ii) $f(pi) = f(\pi)$;

iii) f è derivabile in $]-\pi, \pi[$ [3] e $f' \in L^2([-\pi, \pi])$, i.e., $\int_{[-\pi,\pi]}(f'(t))^2 dt < \infty$;

iv) per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ vale

$$\int_{[-\pi,x]} f'(t)dt = f(x) - f(-\pi)$$ [4]

Allora la serie di Fourier di f converge a f uniformemente in $[-\pi, \pi]$.

Esempio 4.2 *Se vale $f(pi) = f(\pi)$ ed f è* **continua e C^1 a tratti**, *allora tutte le ipotesi del teorema 4.1 sono verificate (verificarlo). Dunque si ha convergenza uniforme della serie di Fourier di f a f.*

Più in generale si può dimostrare che una funzione **Lipschitziana** *tale che $f(pi) = f(\pi)$ soddisfa le ipotesi del teorema, ma ciò richiederebbe strumenti di teoria della misura che qui non possediamo.*

[3] Basta in real'tà che f' abbia derivata in tutti i punti di $]-\pi, \pi[\setminus\mathcal{N}$, dove $\mathcal{N}$ ha misura nulla.

[4] Un f per cui valga questa proprietà si dice *assolutanete continua*.