Dispense del corso di Complementi di Analisi, a.a. 2008–9

G. De Marco[1]

13 giugno 2008

[1]con alcune modifiche e aggiunte di C. Mariconda

Indice

Capitolo 1

Aggiunte sulle serie di Fourier – separazione delle variabili

1.1 Sviluppi di soli seni e di soli coseni

Sia $l > 0$ fissato, e sia $f : [0, l] \to \mathbb{C}$ funzione in $L^2([0, l])$. È spesso utile avere uno sviluppo di tale funzione in $[0, l]$ che sia di soli seni, o di soli coseni. C'è un unico modo per farlo, se si pretende che tali seni o coseni abbiano tutti periodo non maggiore di $2l$ (a meno che la funzione non sia già restrizione a $[0, l]$ di una funzione di periodo sottomultiplo intero di l): se si vuole una serie di soli coseni si estende prima la funzione per parità all'intervallo $[-l, l]$, poi la si prolunga in periodicità $2l$ all'intero asse reale; se si vuole una serie di soli seni si estende invece prima per disparità a $[-l, l]$, poi come sopra per periodicità; i valori in $-l, l$ possono essere diversi, come il prolungamento per disparità in 0 deve essere 0, indipendentemente dal valore $f(0)$ di partenza; ma chiaramente ciò altera l'estensione a $[-l, l]$ solo su un insieme di misura nulla.

Esercizio 1.1. Sviluppare $f(x) = \sin x$ in serie di soli coseni, e sviluppare poi $f(x) = \cos x$ in serie di soli seni, entrambi in $[0, \pi]$.

Risoluzione. Il prolungamento pari g di sin è $\sin|x|$, per $x \in [-\pi, 0]$; i coefficienti sono (il periodo è 2π):

$$a_n = a_n(g) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x| \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos(nx)\, dx;$$

si trova $a_0 = 4/\pi$, mentre, se $n \geq 1$ si ha

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos(nx)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x))\, dx;$$

per $n = 1$ si trova quindi $a_1 = (2/\pi)\int_0^{\pi} \sin(2x)\, dx = 0$, mentre se $n \geq 2$ si ha

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1 - \cos((n+1)\pi)}{n+1} - \frac{1 - \cos((n-1)\pi)}{n-1}\right) = -\frac{1 + (-1)^n}{\pi}\frac{2}{n^2 - 1}.$$

Se n è dispari si trova quindi $a_n = 0$; se $n = 2k$ è pari si ha

$$a_{2k} = \frac{-4}{\pi(4k^2 - 1)},$$

e quindi

$$\sin x = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}\right) \qquad 0 \leq x \leq \pi,$$

la convergenza essendo anche totale. Se poi prolunghiamo per disparità cos in $[-\pi, 0[$, i coefficienti diventano:

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \cos x \sin(nx)\, dx$$

se $n = 1$ si trova $b_1 = 0$, mentre, se $n \geq 2$:

$$\pi b_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1+(-1)^n}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{n-1}\right) = \frac{n(1+(-1)^n)}{n^2-1};$$

si ha quindi $b_n = 0$ se n dispari e

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{k}{4k^2-1}\sin(2kx) \qquad (0 < x < \pi);$$

si noti che la convergenza non è più uniforme, e quella puntuale si ha solo all'interno. □

Esercizio 1.2. Sviluppare la funzione $f(x) = |\sin x|^3$ in serie di coseni, nell'intervallo $[0, \pi]$ (si può usare l'identità $\sin^3 x = (3\sin x - \sin(3x))/4$). Prima di fare il calcolo, rispondere alle seguenti domande: la serie che si otterra' sarà totalmente convergente? La serie delle derivate sarà pure totalmente convergente? a quale funzione?

Trovare poi il minimo della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(a, b, c) = \int_{-\pi}^{\pi} ||\sin x|^3 - (a\cos x + b\sin x + c)|^2\, dx.$$

Risoluzione. La serie voluta è la serie di Fourier reale di f, in periodo 2π; la funzione $x \mapsto |\sin x|^3$ è di classe C^2; infatti la derivata, che è $f'(x) = 3|\sin x|^2 \cos x \operatorname{sgn}(\sin x) = 3\sin^2 x \cos x \operatorname{sgn}(\sin x)$ per $x \notin \mathbb{Z}\pi$, si prolunga per continuità in ogni punto di $\mathbb{Z}\pi$; si ha anche la derivata seconda, che è

$$f''(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)(6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x) = |\sin x|(6\cos^2 x - 3\sin^2 x),$$

ed è continua in tutto $\mathbb{R}$. Ciò implica che f' ha una serie di Fourier totalmente convergente, e quindi che la serie di Fourier di f, a sua volta totalmente convergente, può essere derivata termine a termine: dalle relazioni tra i coefficienti di Fourier di f ed f' discende infatti che la serie di Fourier di f' è la serie derivata della serie di Fourier di f (fatto generale).

Osservazione 1. Anche se inutile ai fini delle domande poste, osserviamo che la derivata terza fuori di $\mathbb{Z}\pi$ esiste ed è

$$f'''(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)\cos x(6\cos^2 x - 21\sin^2 x);$$

f''' ha salti nei punti $\mathbb{Z}\pi$ e quindi non esiste in tali punti; f'' è continua e C^1 a tratti, ma non C^1.

La serie ha solo armoniche pari, ed è di soli coseni; posto $n = 2k$ si ha:

$$\begin{aligned}
a_n =& 2\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^3 \cos(nx)\,\frac{dx}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{3\sin x - \sin(3x)}{4}\cos(2kx)\, dx = \\
&\frac{3}{2\pi}\int_0^\pi \sin x\cos(2kx)\, dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(3x)\cos(2kx)\, dx = \\
&\frac{3}{4\pi}\int_0^\pi (\sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x))\, dx - \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi (\sin((2k+3)x) - \sin((2k-3)x))\, dx = \\
&\frac{3}{4\pi}\left[\frac{\cos((2k-1)x)}{2k-1} - \frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1}\right]_0^\pi - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\cos((2k-3)x)}{2k-3} - \frac{\cos((2k+3)x}{2k+3}\right]_0^\pi = \\
&\frac{-3}{2\pi}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{6}{2\pi}\frac{1}{(2k)^2-9} - \frac{6}{2\pi}\frac{1}{(2k)^2-1} = \\
&\frac{6}{2\pi}\frac{8}{((2k)^2-1)((2k)^2-9)} = \frac{1}{\pi}\frac{24}{((2k)^2-1)((2k)^2-9)}.
\end{aligned}$$

Quanto all'ultima domanda, il minimo richiesto è il quadrato della distanza di f dallo spazio dei polinomi trigonometrici di grado 1; esso si ha con a, b, c uguali ai coefficienti di Fourier di f (in periodo 2π) e quindi con $a = b = 0$, e $c = a_0/2 = 12/(9\pi)$; il suo quadrato vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^6\, dx - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{12}{9\pi}\right)^2 dx;$$

si ha ora

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^6\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(3\sin x - \sin(3x))^2}{16}\,dx =$$
$$\frac{9}{16}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx + \frac{1}{16}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(3x)\,dx - \frac{1}{6}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin(3x)\,dx = \frac{5}{8}\pi;$$

ed il minimo voluto è quindi $5\pi/8 - 288/(81\pi)$

□

Esercizio 1.3. Provare la *disuguaglianza di Wirtinger*: se $u : [a,b] \to \mathbb{C}$ è continua e C^1 a tratti, ed $u(a) = u(b) = 0$, allora si ha

$$\int_a^b |u(x)|^2\,dx \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b |u'(x)|^2\,dx.$$

(supporre $a = 0$, come non è restrittivo; prolungare per disparità la funzione in $[-b,b]$, poi per periodicità $2b$ a tutto $\mathbb{R}$; esprimere i coefficienti di u' con quelli di u, ed usare l'identità di Parseval). Per quali funzioni vale l'uguaglianza?

Risoluzione. Chiamiamo ancora u la funzione così prolungata. Posto $\omega = (2\pi)/(2b) = \pi/b$, si ricorda che si ha $c_n(u') = (in\omega)c_n(u)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (viene dalla formula, integrando per parti). Ne segue:

$$\|u'\|_2^2 = \int_{-b}^{b} |u'(x)|^2\,\frac{dx}{2b} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |(in\omega)c_n(u)|^2 = \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|c_n(u)|^2,$$

mentre invece è

$$\|u\|_2^2 = \int_{-b}^{b} |u(x)|^2\,\frac{dx}{2b} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(u)|^2;$$

si noti ora che essendo u dispari si ha $c_0(u) = 0$, per cui in entrambe le serie il termine con $n = 0$ è nullo. Supposta u non identicamente nulla si ha

$$\frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2} = \omega^2 \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} n^2|c_n(u)|^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} |c_n(u)|^2};$$

i termini della serie a numeratore sono maggiori o uguali dei corrispondenti termini della serie a denominatore; l'uguaglianza si ha per $n = \pm 1$, e se $|n| > 1$ si ha solo per $c_n(u) = 0$. Ne segue che la serie a numeratore ha somma sempre maggiore od uguale di quella a denominatore, con uguaglianza se e solo se $c_n(u) = 0$ per $|n| > 1$; quindi

$$\frac{\int_{-b}^{b} |u'(x)|^2\,dx}{\int_{-b}^{b} |u(x)|^2\,dx} \ge \omega^2 = \frac{\pi^2}{b^2},$$

con uguaglianza se e solo se $c_n = 0$ per $|n| > 1$. La disuguaglianza è stata provata; si ha uguaglianza se e solo se $u(x) = c_{-1}e^{-i\omega x} + c_1 e^{i\omega x}$; ricordando che u è dispari su $[-b,b]$ si ha $c_{-1} = -c_1 (= c)$; l'uguaglianza si ha solo per funzioni della forma $2ic\sin(\omega x) = k\sin(\pi x/b)$, con k costante arbitraria. □

1.2 Qualche equazione alle derivate parziali

Indichiamo qui, a titolo euristico, un metodo risolutivo che si applica a certe equazioni lineari alle derivate parziali.

1.2.1 Equazione delle onde

Consideriamo dapprima

$$\partial_x^2 u(x,t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u(x,t) = 0, \qquad \text{(Equazione delle Onde)}$$

dove (caso unidimensionale) l'incognita $u(x,t)$ è una funzione di due variabili. Tale equazione regola vari fenomeni ondulatori; e ad esempio è una versione di equazione di piccole oscillazioni traversali per una corda tesa fra due estremi $(0,0)$ ed $(l,0)$: $u(x,t)$ indica l'ordinata all'istante t del punto della corda che ha ascissa (costantemente) x, e c è una costante, pari alla tensione divisa per la densità lineare della corda. In questo caso x varia fra 0 ed l (lunghezza della corda a riposo), e t, tempo, varia in $\mathbb{R}$; l'equazione è anche detta *equazione delle corde vibranti.* Risolviamo per questa equazione del secondo ordine il problema di Cauchy: trovare la soluzione (o le soluzioni) avendo assegnata la configurazione iniziale della corda, $u(x,0) = u_0(x)$, e le velocità iniziali, $\partial_t u(x,0) = v_0(x)$.

La risoluzione di questo problema con il metodo di d'Alembert si trova in Analisi Due, 4.26; qui presentiamo un altro metodo, detto di *separazione delle variabili*, dovuto a Fourier, che si applica a varie altre equazioni alle derivate parziali (sempre lineari, però). Chiamiamo *soluzione stazionaria* dell'equazione delle onde ogni soluzione del tipo $U(x)V(t)$, che si esprima cioè come prodotto di funzioni a variabili separate. Imponendo che $U(x)V(t)$ sia soluzione, si ottiene

$$U''(x)V(t) - \frac{1}{c^2}U(x)V''(t) = 0; \qquad (*)$$

naturalmente siamo interessati a soluzioni non identicamente nulle, e quindi supponiamo $U(x)$, $V(t)$ non identicamente nulle; come discusso poi, osservazione alla fine, $*$ è allora verificata se e solo se si ha

$$\frac{U''(x)}{U(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{V''(t)}{V(t)} = \lambda, \text{ costante, per ogni } x \in [0,l],\ t \in \mathbb{R}. \qquad (**)$$

Si hanno quindi le equazioni, lineari del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$U''(x) = \lambda U(x); \qquad V''(t) = c^2\lambda V(t);$$

si noti che U deve verificare le condizioni al contorno $U(0) = U(l) = 0$; una non difficile discussione mostra che allora , se si vuole U non identicamente nullo, deve essere

$$\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2/l^2, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1; \qquad U(x) = a_n \sin(\sqrt{-\lambda_n}x) = k_n \sin(n\pi x/l),\ k_n \in \mathbb{R} \text{ costante.}$$

Infatti, distinguiamo i casi $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$; nel primo caso l'integrale generale di $U'' = \lambda U$ è

$$U(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

ed imponendo le condizioni iniziali si trova il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = & 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = & 0, \end{cases}$$

di determinante $e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l} \neq 0$, e quindi con solo la soluzione nulla; se $\lambda = 0$ si ha $U(x) = c_1 + c_2 x$, nulla in $x = 0, l$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$; se $\lambda < 0$ si ottiene, posto $\omega = \sqrt{-\lambda}$, $U(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$; le condizioni iniziali danno il sistema

$$\begin{cases} c_1 = & 0 \\ c_1\cos(\omega l) + c_2\sin(\omega l) = & 0, \end{cases}$$

che ha soluzioni non banali solo se $\sin(\omega l) = 0$, verificata per $\omega l = n\pi$, con n intero, $n \geq 1$ (si ricordi che è $\omega > 0$). Posto $\omega_n = cn\pi/l$ l'altra equazione è allora $V''(t) = -\omega_n^2 V(t)$, con soluzioni

$$V(t) = a_n\cos(\omega_n t) + b_n\sin(\omega_n t), \quad a_n,\ b_n \text{ costanti reali.}$$

Le soluzioni stazionarie sono quindi

$$(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(n\pi x/l), \quad a_n,\ b_n \text{ costanti reali.}$$

(la costante k_n si ingloba entro a_n, b_n). L'equazione delle onde è lineare (omogenea), e quindi una somma di soluzioni è ancora soluzione. Per riuscire ad imporre le condizioni iniziali avremo bisogno però di una somma di infinite soluzioni, in generale. La tecnica è la seguente: si prolungano le funzioni su $[0, l]$ a tutto $[-l, l]$ per disparità, poi in periodicità $2l$ a tutto $\mathbb{R}$. Tutte queste funzioni hanno una serie di Fourier di soli seni, della forma $\sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(n\pi x/l)$; in particolare si ha $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x/l)$, $v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(n\pi x/l)$. Cerchiamo una soluzione dell'equazione delle onde della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(n\pi x/l);$$

imponendo la prima condizione iniziale:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/l) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x/l),$$

ed usando l'unicità dello sviluppo di Fourier si ottiene $a_n = u_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponendo di poter derivare termine a termine per ottenere $\partial_t u(x,t)$ si ha poi

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n \sin(n\pi x/l) = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(n\pi x/l),$$

da cui $b_n = v_n/\omega_n = l v_n/(cn\pi)$. Si è formalmente ottenuta la soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \cos(n\pi ct/l) + \frac{v_n l}{n\pi c} \sin(n\pi ct/l) \right) \sin(n\pi x/l).$$

Occorre un bel po' di lavoro per vedere se questa soluzione formale è una vera soluzione. Ma ci accontentiamo di quanto fatto.

OSSERVAZIONE 2. Validiamo qui il metodo di separazione delle variabili usato; è un fatto ovvio, ma è più prudente provarlo.

. Siano X, Y insiemi, e siano $u_0, u_1 : X \to \mathbb{K}$, $v_0, v_1 : Y \to \mathbb{K}$ funzioni. Si assuma che u_0, v_0 non siano identicamente nulle. Si ha allora $u_1 \otimes v_0 = u_0 \otimes v_1$ (cioè, $u_1(x)v_0(y) = u_0(x)v_1(y)$, per ogni $(x,y) \in X \times Y$) se e solo se esiste una costante $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che sia $u_1(x) = \lambda u_0(x)$ per ogni $x \in X$, ed anche $v_1(y) = \lambda v_0(y)$ per ogni $y \in Y$.

Dimostrazione. Supponiamo $u_1 \otimes v_0 = u_0 \otimes v_1$. Se $\bar{x} \in X$ è tale che sia $u_0(\bar{x}) \neq 0$, si ha $v_1(y) = (u_1(\bar{x})/u_0(\bar{x}))v_0(y)$ per ogni $y \in Y$; posto $\lambda = (u_1(\bar{x})/u_0(\bar{x}))$, se $v_0(\bar{y}) \neq 0$ si ha similmente $u_1(x) = (v_1(\bar{y})/v_0(\bar{y}))u_0(x)$ per ogni $x \in X$, e $v_1(\bar{y})/v_0(\bar{y}) = u_1(\bar{x})/u_0(\bar{x}) = \lambda$ per la relazione precedente. Abbiamo provato la necessità della condizione; se essa poi vale, si ha $u_1(x)v_0(y) = \lambda u_0(x)v_0(y)$ e $u_0(x)v_1(y) = \lambda u_0(x)v_0(y)$ per ogni $(x,y) \in X \times Y$, come voluto. □

1.2.2 Equazione del calore

Consideriamo successivamente l'*equazione del calore*, caso unidimensionale:

$$\partial_t u(x,t) - \kappa \partial_x^2 u(x,t) = 0. \qquad \text{(EQUAZIONE DEL CALORE)}$$

Se si ha una sbarra, su cui è introdotto un sistema di ascisse x, ed $u(x,t)$ è la temperatura del punto x della sbarra all'istante t, il calore si propaga solo per conduzione, non ci sono sorgenti, né assorbimenti di calore nella sbarra, ed inoltre la conduttività e la capacità termica della sbarra sono supposte costanti, l'evoluzione della temperatura nel tempo è regolata dall'equazione precedente, con κ uguale al rapporto fra conduttività e capacità termica lineare; vedi Analisi Due, 8.18. Consideriamo qui il caso della sbarra limitata, schematizzata dall'intervallo $[0, l]$; supponiamo assegnata la temperatura iniziale $u(x,0) = u_0(x)$; e supponiamo anche assegnate condizioni alle estremità della sbarra; ci limitiamo a considerare i due tipi seguenti:

- La temperatura alle estremità è mantenuta costante ed uguale $u(0,t) = u(l,t) = 0$ per ogni t (si può supporre 0 la temperatura, cambiando scala se occorre).
- $\partial_x u(0,t) = \partial_x u(l,t) = 0$ per ogni t (non c'è passaggio di calore alle estremità della sbarra).

Cerchiamo le soluzioni stazionarie $U(x)V(t)$; si ottiene

$$U(x)V'(t) - \kappa U''(x)V(t) = 0,$$

che, come prima, sono equivalenti a

$$\kappa U''(x) = \lambda U(x); \qquad V'(t) = \lambda V(t) \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \,\text{costante}.$$

La seconda equazione porge subito $V(t) = V_0 e^{\lambda t}$; la prima si riscrive $U''(x) = (\lambda/\kappa)U(x)$; se le condizioni al contorno sono le prime, temperatura nulla agli estremi, si ha come sopra, che deve essere $\lambda/\kappa = \lambda_n/\kappa = -n^2\pi^2$, con $n \geq 1$ intero, e la soluzione è $U(x) = a_n \sin(n\pi x/l)$, a_n costante reale. Le soluzioni stazionarie sono quindi

$$a_n e^{-\kappa(n\pi/l)^2 t} \sin(n\pi x/l)$$

Cercando di soddisfare all'equazione ed alla condizione iniziale $u(x,0) = u_0(x)$ con una serie di soluzioni stazionarie siamo indotti a prolungare per disparità le funzioni in $[-l,l]$; lo sviluppo in serie di soli seni di u_0 sia $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x/l)$; si ottiene come soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-\kappa(n\pi/l)^2 t} \sin(n\pi x/l); \quad u_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(\nu)\sin(n\pi\nu/l)\, d\nu$$

Il secondo tipo di condizioni al contorno porta ad avere ancora $\lambda/\kappa = \lambda_n/\kappa = -(n\pi/l)^2$, ma ora le soluzioni sono $U(x) = a_n \cos(n\pi x/l)$, $n \geq 0$ intero, come immediato verificare. Si prolungano ora le funzioni per *parità* in $[-l,l]$ e si ottiene

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-\kappa(n\pi/l)^2 t} \cos(n\pi x/l); \qquad u_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(\nu)\cos(n\pi\nu/l)\, d\nu$$

1.2.3 Equazione del potenziale

Risolviamo ora il*problema di Dirichlet*, nel caso particolare di un circolo. Si ha un circolo centrato nell'origine di raggio R. Assegnata una funzione $u_0(x,y)$ continua sulla circonferenza $S_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$, si vuole prolungare questa ad una funzione $u : B_R \to \mathbb{R}$ continua ed armonica all'interno di B_R, che è il disco chiuso di centro l'origine e raggio R. Il problema ha anche una risoluzione con metodi di variabile complessa, come prevedibile; ma qui lo risolviamo con le coordinate polari e la separazione di variabili. La funzione incognita si scrive $w(r,\vartheta) = u(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$, con $0 \leq r \leq R$, e $\vartheta \in \mathbb{R}$; per ogni r fissato è periodica in ϑ, di periodo 2π. Il laplaciano in cordinate polari si scrive

$$\partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r w(r,\vartheta)) + \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta^2 w(r,\vartheta) = 0;$$

cerchiamo soluzioni stazionarie della forma $w(r,\vartheta) = \rho(r)\varphi(\vartheta)$, ottenendo

$$\frac{1}{r}(\rho'(r) + r\rho''(r))\varphi(\vartheta) + \frac{\rho(r)}{r^2}\varphi''(\vartheta) = 0.$$

da cui

$$\frac{(1/r)(\rho'(r) + r\rho''(r))}{\rho(r)/r^2} = -\frac{\varphi''(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} = \lambda \text{ costante reale};$$

per l'equazione $\varphi''(\vartheta) = -\lambda\varphi(\vartheta)$ vogliamo soluzioni periodiche di periodo 2π; deve quindi essere $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n \geq 0$ intero, e le soluzioni sono quindi della forma

$$\varphi(\vartheta) = a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta).$$

Si deve ora risolvere l'equazione ($n \geq 0$ intero):

$$r^2\rho''(r) + r\rho'(r) - n^2\rho(r) = 0 \tag{$*$}$$

Per $n = 0$ l'equazione è $r\rho''(r) + \rho'(r) = 0$, che è

$$\frac{d}{dr}(r\rho'(r)) = 0 \iff r\rho'(r) = k \iff \rho = k \log r + a_0;$$

ma vogliamo soluzioni che abbiano limite finito per $r \to 0^+$, e quindi $k = 0$; le uniche soluzioni accettabili sono le costanti. Per $n \geq 1$ l'equazione precedente è un'equazione di Eulero, che si risolve con il cambiamento di variabile dipendente $r = e^x$; si pone $\rho(e^x) = v(x)$ e si ha, derivando, $\rho'(e^x)e^x = v'(x)$, da cui $\rho'(e^x) = v'(x)e^{-x}$, e derivando ulteriormente $\rho''(e^x)e^x = v''(x)e^{-x} - v'(x)e^{-x}$, ovvero $\rho''(e^x) = v''(x)e^{-2x} - v'(x)e^{-2x}$; l'equazione $*$ diventa, posto in essa e^x in luogo di r:

$$v''(x) - v'(x) + v'(x) - n^2 v(x) = 0 \iff v''(x) - n^2 v(x) = 0 \iff v(x) = c_n e^{nx} + d_n e^{-nx},$$

ovvero $\rho(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}$; per avere limite finito per $r \to 0^+$ deve essere $d_n = 0$. Si trova quindi che le soluzioni stazionarie sono

$$(a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta))r^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Per $r = R$ si deve avere la funzione u_0 assegnata; occorre quindi che i coefficienti di Fourier di tale funzione siano esattamente $a_n R^n$ e $b_n R^n$; cioè

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cos(n\alpha)\,d\alpha; \qquad b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\sin(n\alpha)\,d\alpha.$$

Si ottiene quindi lo sviluppo di Fourier della soluzione.

Altre considerazioni

Nessuna delle "soluzioni" trovate alla precedente sezione è stata verificata essere tale; il principio di sovrapposizione dice che somme finite di soluzioni sono soluzioni, ma nulla ci assicura che una somma di infinite soluzioni sia ancora soluzione. Per l'ultima si ha

$$\begin{aligned} w(r,\vartheta) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\,d\alpha + \\ & \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)(\cos(n\alpha)\cos(n\vartheta) + \sin(n\alpha)\sin(n\vartheta))\left(\frac{r}{R}\right)^n d\alpha = \\ & \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)}{2}\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cos(n(\theta-\alpha))\left(\frac{r}{R}\right)^n d\alpha; \end{aligned}$$

Essendo $(r/R) < 1$ per ogni fissato $r \in [0, R[$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(r/R)^n \cos(n(\vartheta - \alpha))$ è totalmente convergente; si può allora nella formula precedente portare la serie sotto il segno di integrale; si ha cioè

$$w(r,\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos(n(\vartheta-\alpha))\right)d\alpha;$$

si ha poi, per ogni $t \in \mathbb{R}$, posto $q = r/R$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos(nt) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(qe^{it})^n\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} + \frac{qe^{it}}{1-qe^{it}}\right) = \\ \operatorname{Re}\left(\frac{1+qe^{it}}{2(1-qe^{it})}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1+qe^{it}-qe^{-it}-q^2}{1-2q\cos t+q^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1-q^2}{1-2q\cos t+q^2} \end{aligned}$$

Si chiama *nucleo di Poisson* l'espressione

$$P(q,t) = \frac{1-q^2}{1-2q\cos t+q^2};$$

si ha quindi

$$w(r,\vartheta) = \int_0^{2\pi} P(r/R, \vartheta-\alpha)u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\,\frac{d\alpha}{2\pi} = P(r/R, \#) * u_0(\vartheta),$$

la convoluzione essendo fatta in periodo 2π. Si dimostra che per $r \to R^-$ il nucleo di Poisson è una famiglia di mollificatori in $L^1_{2\pi}$, e quindi che effettivamente $w(r,\vartheta)$ tende ad u_0 al bordo, ecc. ecc.

1.2.4 Equazione di Laplace su un rettangolo

Risolviamo per separazione di variabili l'equazione di Laplace

$$\Delta u(x,y) = \partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0,$$

dove si chiede ad u di essere continua sul rettangolo $[0,a]\times[0,b]$, e di verificare l'equazione sopra all'interno del rettangolo. È assegnata anche la $u = u_0$ sul bordo; per semplicità supponiamo che u_0 sia nulla su tutti i lati, tranne che su $[0,a]\times\{0\}$, dove si ha $u(x,0) = u_0(x)$, continua. Le soluzioni stazionarie sono $U(x)V(y)$:

$$U''(x)V(y) + U(x)V''(y) = 0 \iff \frac{U''(x)}{U(x)} = -\frac{V''(y)}{V(y)} = \lambda \quad \text{costante reale;}$$

U e V verificano le equazioni:

$$U''(x) - \lambda U(x) = 0; \qquad V''(y) + \lambda V(y) = 0.$$

Per $0 < y < b$ deve essere $U(0)V(y) = U(a)V(y) = 0$; se V non è identicamente nulla ciò accade se e solo se $U(0) = U(a) = 0$; e allora, come piu' volte visto, deve essere $\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2/a^2$, e quindi $U(x) = k_n \sin(n\pi x/a)$. L'equazione $V''(y) - (n\pi/a)^2 V(y) = 0$ ha per soluzione generale $V(y) = c_1\cosh(n\pi y/a) + c_2\sinh(n\pi y/a)$; deve verificare la condizione al contorno $V(b) = 0$, il che implica che soluzione è $V(y) = c\sinh(n\pi(y-b)/a)$, con c costante. Cerchiamo quindi soluzioni della forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sinh(n\pi(y-b)/a)\sin(n\pi x/a)$$

Dovendo essere $u(x,0) = u_0(x)$ si sviluppa u_0 in serie di soli seni in $[0,a]$, prolungandolo per disparità in $[-a,a]$; si impone poi, se $u(x,0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x/a)$, che sia $-k_n\sinh(n\pi b/a) = u_n$; si trova quindi come candidata alla soluzione

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\sinh(n\pi b/a)} \sinh(n\pi(b-y)/a)\sin(n\pi x/a)$$

Simili risoluzioni si danno per dati al bordo diversi da 0 su un solo lato; e grazie al principio di sovrapposizione, sommando quattro soluzioni di questo tipo si raggiunge un dato al bordo arbitrario.

1.3 Esercizi

Esercizio 1.4. Si risolva con il metodo della separazione delle variabili il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) &=& 2u_{xx}(x,t), & t>0,\ x\in[0,1] \\ u_x(0,t) &=& 0, & t>0 \\ u_x(1,t) &=& 0, & t>0 \\ u(x,0) &=& \cos^2(3\pi x), & x\in[0,1]. \end{cases}$$

Esercizio 1.5. Risolvere il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) &=& u_{xx}(x,t), & t>0,\ x\in]0,4\pi[\\ u(0,t) &=& u(4\pi,t) = 0, & t>0 \\ u(x,0) &=& 2\sin(3x) - 4\sin(5x), & x\in[0,4\pi]. \end{cases}$$

usando il metodo di separazione delle variabili.

Esercizio 1.6. Sia f la funzione pari, periodica di periodo 2π tale che $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ per ogni x in $[0,\pi]$.

(i) Determinare la serie di Fourier della derivata f' di f;

(ii) Determinare, utilizzando (i) e giustificandone l'uso, la serie di Fourier di f; discuterne la convergenza puntuale, totale, in $L^2([-\pi,\pi])$.

(iii) Dedurne la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

(iv) si risolva con il metodo della separazione delle variabili il problema

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in]0,\pi[\times]0,\pi[& (1) \\ u_y(x,\pi) = f(x), & x \in [0,\pi] & (2) \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = u_y(x,0) = 0, & x,y \in [0,\pi] & (3). \end{cases}$$

Ammettere che le soluzioni del tipo $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ di (1) e (3) sono

$$u(x,y) = c_n \cos(nx)\cosh(ny),\ c_n \in \mathbb{C},\ n = 0,1,2,...$$

Esercizio 1.7. Risolvere il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), & t>0,\ x \in]0,4\pi[\\ u(0,t) &= u(4\pi,t) = 0, & t>0 \\ u(x,0) &= 2\sin(3x) - 4\sin(5x), & x \in [0,4\pi]. \end{cases}$$

usando il metodo di separazione delle variabili.

Capitolo 2

Trasformazione di Fourier classica

2.1 Introduzione

Per un fenomeno periodico, rappresentato da funzioni periodiche, lo sviluppo in serie di Fourier di queste costituisce un metodo per l'analisi del fenomeno stesso: le armoniche dello sviluppo di Fourier hanno spesso significato fisico, intendendosi con ciò il fatto che esistono strumenti di vario genere (risuonatori, oscilloscopi, ecc.) che permettono di rilevare e misurare tali armoniche. Per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ non periodiche è possibile qualcosa del genere? Si può pensare di prendere un numero τ grande, di considerare la funzione su $[-\tau/2, \tau/2[$, di estendere per periodicità tale restrizione al di fuori di $[-\tau/2, \tau/2[$, e di considerare la successione $c(f, \tau) : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dei coefficienti di Fourier di tale funzione; al tendere di τ a $+\infty$, $c(f, \tau)$ dovrebbe, sotto opportune ipotesi su f, tendere ad un oggetto legato alla funzione f. Non possiamo però restare nell'ambito discreto; come funzione su $\mathbb{Z}$, la successione dei coefficienti di Fourier, almeno per $f \in L^1(\mathbb{R})$, tende solo a zero. Si fa diventare ogni $c(f, \tau)$ una funzione $\widehat{f}_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, costante a tratti, nel modo seguente: si prende un "passo" $d = 1/\tau$, e la funzione $\widehat{f}_\tau(\xi)$ è definita dalla formula

$$\widehat{f}_\tau(\xi) = \frac{1}{d} c_n(f, \tau) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-2\pi i \frac{n}{\tau} t}\, dt, \qquad \frac{n}{\tau} \le \xi < \frac{n+1}{\tau},$$

o se si preferisce dalla formula

$$\widehat{f}_\tau(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-2\pi i \frac{n}{\tau} t}\, dt \right) \chi_{[n/\tau,(n+1)/\tau[}(\xi);$$

(si rappresentano insomma le successioni $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mediante funzioni a scalino su $\mathbb{R}$, in passo d, usando l'interpolazione detta "a tenuta"; il fattore $1/d = \tau$ serve a far sí che le sommatorie in $\mathbb{Z}$ diventino gli integrali su $\mathbb{R}$). Si può allora dimostrare (non è difficile, ma non lo facciamo; queste righe sono solo a titolo euristico) che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora, per $\tau \to 0^+$ la funzione $\widehat{f}_\tau$ tende uniformemente su $\mathbb{R}$ ad una funzione continua $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, detta *trasformata di Fourier* di f.

2.2 Definizione e prime proprietà

Definizione. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$. La *trasformata di Fourier* di f è la funzione $\mathcal{F}f = \widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita dalla formula:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t}\, dt, \qquad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}.$$

Se $\widehat{f} = h$ si dice che f è un *originale di Fourier* di h; vedremo in seguito che tale f, se esiste, è unica.

Prima di procedere oltre:

Proposizione 2.1. *La trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua e nulla all'infinito, si ha cioè $\lim_{\xi\to\pm\infty}\widehat{f}(\xi)=0$.*

Dimostrazione. La continuità di $\widehat{f}$ è un'immediata conseguenza del teorema della convergenza dominata (Analisi Due, 9.22.1); la tendenza a zero all'infinito è il lemma di Riemann–Lebesgue (Analisi Due, 13.1, riportato anche di seguito nel capitolo). □

Osservazione 3. Qui, ed anche in seguito quando faremo le trasformate di Laplace, tendiamo ad usare i teoremi della teoria dell'integrazione alla Lebesgue, sostituendo essi a varie nozioni tradizionalmente usate in passato, quali integrali uniformemente convergenti rispetto ad un parametro, e simili: più semplici forse, non dipendendo dall'integrale di Lebesgue, ma in definitiva più onerose per chi studia, richiedendo argomentazioni ad hoc ogni volta. I teoremi di convergenza che rendono utile l'integrale di Lebesgue possono essere tranquillamente accettati senza dimostrazione, come pure i teoremi di Fubini e Tonelli: si ha a disposizione una strumento in fondo semplice, ed assai potente.

L'insieme delle funzioni continue nulle all'infinito si indica con $C_0(\mathbb{R})(=C_0(\mathbb{R},\mathbb{C}))$; sono chiaramente funzioni limitate ed uniformemente continue, spazio di Banach nella sup–norma.

La trasformazione di Fourier è banalmente lineare, $(\alpha f+\beta g)\widehat{\ } = \alpha\widehat{f}+\beta\widehat{g}$ per ogni $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ ed $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$; essendo, per ogni $f\in L^1(\mathbb{R})$ $\|\widehat{f}\|_\infty\le\|f\|_1$, come risulta subito dalla disuguaglianza fondamentale

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t}\,dt\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt = \|f\|_1, \qquad \text{per ogni } \xi\in\mathbb{R},$$

la trasformazione di Fourier è anche continua da L^1 a C_0: se f_k è successione di funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ che converge L^1 ad f, allora $\widehat{f_k}$ converge uniformemente a $\widehat{f}$. La norma operatoriale di $\mathcal{F}$ è chiaramente minore od uguale ad 1, e si ha anzi $\|\mathcal{F}\|=1$, come sarà chiaro da vari calcoli espliciti di trasformate fatti in seguito.

Data $f\in L^1(\mathbb{R})$, f è l'*originale di Fourier* di $\widehat{f}$, che è la sua *trasformata di Fourier*; non è ancora chiaro che ci sia un unico originale di Fourier, cioè che la trasformazione di Fourier sia iniettiva; la cosa è vera, ma sarà vista dopo la formula di inversione. Non è invece suriettiva la trasformazione di Fourier da $L^1(\mathbb{R})$ a $C_0(\mathbb{R})$, cioè non ogni funzione continua infinitesima all'infinito è trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$; ma non è del tutto banale dare esempi. Le simmetrie sono della massima importanza nell'analisi di Fourier.

Definizione. Per ogni funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ si definisce la *simmetrizzata* $\tilde{f}$ ponendo $\tilde{f}(t)=f(-t)$; si pone poi $f^*(t)=\overline{f(-t)}$ (coniugata della simmetrizzata); le funzioni pari sono quindi quelle per cui $\tilde{f}=f$, le dispari quelle con $\tilde{f}=-f$; si chiamano talvolta *hermitiane* le funzione con $f=f^*$, antihermitiane quelle con $f^*=-f$.

2.2.1 Simmetrizzazione e trasformata di Fourier

Commutano fra loro:

Proposizione 2.2. *La trasformata della simmetrizzata è la simmetrizzata della trasformata.*

Dimostrazione.

$$\mathcal{F}\tilde{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)e^{-i\xi t}\,dt=\int_{+\infty}^{-\infty} f(\theta)e^{-i\xi(-\theta)}\,(-d\theta)=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)e^{-i(-\xi)\theta}\,d\theta=\mathcal{F}f(-\xi)=\widetilde{(\mathcal{F}f)}(\xi).$$

□

In particolare, funzioni pari hanno trasformate pari, funzioni dispari hanno trasformate dispari.

2.2.2 Coniugio e simmetria

Proposizione 2.3. *La trasformata della coniugata è la simmetrica hermitiana della trasformata, la trasformata della simmetrica hermitiana è la coniugata della trasformata.*

In simboli
$$(\bar{f})\widehat{\ } = (\widehat{f})^*; \qquad (f^*)\widehat{\ } = (\widehat{f})^-.$$

La facile dimostrazione si lascia come esercizio; si basa sul fatto che il coniugato di un integrale è l'integrale del coniugato; si noti che la trasformata di una funzione reale è a simmetria hermitiana, ed ogni funzione reale pari ha trasformata reale e pari; le funzioni reali dispari hanno trasformata dispari immaginaria pura.

2.2.3 Comportamento rispetto alle omotetie

Proposizione 2.4. *Se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ed $f \in L^1(\mathbb{R})$, la trasformata di $t \mapsto f(\lambda t)$ è*
$$\xi \mapsto \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}(\xi/\lambda).$$

Dimostrazione. Si ha, posto $g(t) = f(\lambda t)$, e supposto dapprima $\lambda > 0$, con il cambiamento di variabile $\lambda t = \theta$:
$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda t)e^{-i\xi t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)e^{-i(\xi/\lambda)\theta}\frac{d\theta}{\lambda};$$
se $\lambda < 0$ si scambiano gli estremi di integrazione, e se ne ripristina l'originale posizione cambiando il segno. $\square$

2.2.4 Traslazioni diventano moltiplicazioni per caratteri

Proposizione 2.5. *Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha*
$$(\tau_a f)\widehat{\ }(\xi) = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi) \qquad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione.
$$(\tau_a f)\widehat{\ }(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-i\xi t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)e^{-i\xi(a+\theta)}\,d\theta = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi).$$
$\square$

2.2.5 Moltiplicazioni per caratteri diventano traslazioni

Proposizione 2.6. *Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha*
$$\left(e^{ia\#}f(\#)\right)\widehat{\ } = \tau_a\widehat{f}.$$

Dimostrazione.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat}f(t)e^{-i\xi t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(\xi-a)t}\,dt = \widehat{f}(\xi-a) = \tau_a\widehat{f}(\xi).$$
$\square$

2.2.6 Derivata della trasformata

Proposizione 2.7. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è tale che $t \mapsto tf(t)$ sta ancora in $L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f}$ è di classe C^1, e si ha*
$$\partial\mathcal{F}f = \mathcal{F}((-i\#)f(\#));$$
in altre parole
$$\partial\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}}(-it)f(t)e^{-i\xi t}\,dt.$$
Più generalmente, se per un intero $m \geq 1$ si ha che $t \mapsto t^m f(t)$ appartiene ad L^1, allora $\widehat{f}$ è di classe C^m e si ha
$$\partial^k(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}((-i\#)^k f(\#)) \qquad k = 1, ..., m.$$

La dimostrazione è conseguenza immediata del teorema di derivazione sotto il segno di integrale, Analisi Due, 9.22.2(ii).

Corollario 2.8. *Sia* $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (*cioè localmente sommabile, ovvero sommabile su ogni intervallo limitato*) *e si supponga che*

$$\lim_{|t|\to+\infty} t^{m+2} f(t) = 0 \qquad (*)$$

Allora $\widehat{f}$ *è di classe* C^m *e si ha*

$$\partial^k(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}((-i\#)^k f(\#)) \qquad k = 1, ..., m.$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che se vale $(*)$ allora $t^m|f(t)| \leq \dfrac{1}{t^2}$ per $|t|$ sufficientemente grande, pertanto $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $k = 1, ..., m$; il risultato precedente permette di concludere. □

È uso ricordare il Corollario precedente dicendo "più rapidamente f tende a 0 all'infinito, e più derivate ha la trasformata".

2.2.7 Trasformata della derivata

Proposizione 2.9. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *è continua e* C^1 *tratti, con* $f' \in L^1(\mathbb{R})$*, allora si ha*

$$\mathcal{F}(\partial f)(\xi) = (i\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Dimostrazione. Anzitutto, nelle ipotesi poste si ha $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\theta)\, d\theta$; essendo $f' \in L^1(\mathbb{R})$, i limiti

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(\theta)\, d\theta; \qquad \lim_{t\to-\infty} f(t) = f(0) - \int_{-\infty}^{0} f'(\theta)\, d\theta$$

esistono finiti; e se f sta in L^1 tali limiti sono nulli. Nell'integrazione per parti

$$\widehat{(f')}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\xi t}\, dt = \left[f(t)e^{-i\xi t}\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} + (i\xi)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}\, dt,$$

la parentesi quadrata è allora nulla. □

Naturalmente si vede anche, per induzione su m:

Proposizione 2.10. *Se* f *è di classe* $C^{m-1}(\mathbb{R})$*, con derivata* $(m-1)-$*esima di classe* C^1 *a tratti, ed* $f, \partial f = f', \ldots, \partial^m f = f^{(m)}$ *stanno tutte in* $L^1(\mathbb{R})$*, allora si ha*

$$\widehat{(\partial^m f)}(\xi) = (i\xi)^m \widehat{f}(\xi).$$

Di conseguenza si ha anche che $\widehat{f}(\xi)$ *è* $o(1/\xi^m)$ *per* $\xi \to \pm\infty$ *(cfr. Analisi Due, 13.8).*

Insomma: più derivate ha f, e più rapidamente $\widehat{f}$ tende a 0 all'infinito, se tali derivate stanno tutte in $L^1(\mathbb{R})$.

Esempio 2.1. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$. Allora $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty$ ed inoltre $\lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi|^m \widehat{f}(\xi) = 0$ per ogni m.

Esercizio 2.1. Si consideri la funzione $f(t) = te^{-2|t|}$. *Senza calcolare* la trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di f, dire se

a) $\widehat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$? $\widehat{f} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), ..., C^\infty(\mathbb{R})$?

b) $\lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi|\widehat{f}(\xi) = 0$? $\lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi|^k \widehat{f}(\xi) = 0$ per qualche $k > 1$?

c) vale la formula di inversione (versione globale)?

Calcolare poi la trasformata di f e verificare i risultati ottenuti sopra.

2.3 Calcolo delle più comuni trasformate di Fourier

2.3.1 Funzioni caratteristiche di intervalli

Dato $\lambda > 0$ la trasformata di $\chi_{[-\lambda/2,\lambda/2]}$ è

$$\widehat{\chi}_{[-\lambda/2,\lambda/2]}(\xi) = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} e^{-i\xi t}\,dt = \left[\frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi}\right]_{t=-\lambda/2}^{t=\lambda/2} = \frac{e^{i\xi\lambda/2} - e^{-i\xi\lambda/2}}{i\xi} = \frac{\sin(\lambda\xi/2)}{\xi/2}.$$

Introducendo la funzione $\operatorname{sinc} s := \sin s/s$ (e $\operatorname{sinc} 0 = 1$), si può scrivere

$$\widehat{\chi}_{[-\lambda/2,\lambda/2]}(\xi) = \lambda \operatorname{sinc}\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right).$$

Per un arbitrario intervallo limitato $[a,b]$, posto $c = (a+b)/2$, $\lambda = b-a$, si ha $\chi_{[a,b]}(t) = \tau_c\chi_{[-\lambda/2,\lambda/2]}(t)$ e quindi

$$\widehat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = e^{-ic\xi}\lambda \operatorname{sinc}\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right) = e^{-i(a+b)\xi/2}(b-a)\operatorname{sinc}\left(\frac{(b-a)\xi}{2}\right).$$

Si noti che $\operatorname{sinc} \notin L^1(\mathbb{R})$; si ha quindi un esempio in cui la trasformata non è più in L^1; però è vero che $\operatorname{sinc} \in L^2(\mathbb{R})$. Inoltre le funzioni trasformande sono a supporto compatto, e quindi le trasformate devono essere C^∞; infatti sinc è restrizione ad $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa intera. Si noti che le funzioni a scalino di $L^1(\mathbb{R})$, cioè quelle a supporto compatto, hanno tutte trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.

2.3.2 Funzioni triangolari

È spesso utile la trasformata del "triangolo" $g : t \mapsto (1-|t|) \vee 0$; si ha

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) = \int_{-1}^{1}(1-|t|)e^{-i\xi t}\,dt &= \left[(1-|t|)\frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi}\right]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^{1}\operatorname{sgn} t\,\frac{e^{-i\xi t}}{i\xi}\,dt = \\ &\frac{1}{i\xi}\left(\int_{-1}^{0} e^{-i\xi t}\,dt - \int_{0}^{1} e^{-i\xi t}\,dt\right) = \frac{1}{(\xi)^2}\left(1 - e^{i\xi} - e^{-i\xi} + 1\right) = \\ &\frac{2}{(\xi)^2}(1-\cos(\xi)) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\xi}{2}\right).\end{aligned}$$

Se $\lambda > 0$ la trasformata di $g_\lambda : t \mapsto g(t/\lambda) = (1-|t/\lambda|) \vee 0$ è quindi

$$\widehat{g}_\lambda(\xi) = \lambda \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right).$$

2.3.3 Funzioni lorentziane

Qualcuno chiama così le funzioni quali $f_a(t) = 1/(a^2+t^2)$, a costante reale non nulla. La trasformata di Fourier si calcola col metodo dei residui e viene

$$\widehat{f}_a(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi t}}{a^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{|a|}e^{-|a\xi|}.$$

(Analisi Due, 10.27.8).

2.3.4 Gaussiane

Se $a > 0$, la funzione $f_a(t) = e^{-at^2}$ sta in $L^1(\mathbb{R})$; l'integrale

$$\widehat{f}_a(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}e^{-i\xi t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\cos(\xi t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2}\cos(\xi\theta/\sqrt{a})\frac{d\theta}{\sqrt{a}},$$

chiamato integrale di Laplace, è stato calcolato in Analisi Due, 10.6.9, con metodi di variabile complessa; si trova

$$\widehat{f}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\xi^2/(4a)}.$$

Si noti che la funzione $f_{1/\sqrt{2}}(t) = e^{-t^2/2}$ è un multiplo della sua trasformata di Fourier.

Esercizio 2.2. Sia $a \in \mathbb{C}$ con parte reale $\operatorname{Re} a > 0$. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = 0$ per $t < 0$, $f(t) = e^{-at}$ per $t \geq 0$. Servirsene per trovare le trasformate di Fourier di $F(t) = e^{-a|t|}$ e di $G(t) = \operatorname{sgn} t e^{-a|t|}$.

Risoluzione. Si ha

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-i\xi t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\xi)t}\, dt = \left[\frac{e^{-(a+i\xi)t}}{-(a+i\xi)} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{a+i\xi}$$

(si noti che si ha $\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+i\xi)t} = 0$, dato che $|e^{-(a+i\xi)t}| = e^{-t \operatorname{Re} a}$). Indicando con $\tilde{f}$ la simmetrizzata di f si ha $F = f + \tilde{f}$, $G = f - \tilde{f}$, per cui

$$\widehat{F}(\xi) = \frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}; \quad \widehat{G}(\xi) = \frac{1}{a+i\xi} - \frac{1}{a-i\xi} = \frac{-2i\xi}{a^2+\xi^2}.$$

□

2.3.5 Esempi vari

Esercizio 2.3. Calcolare la trasformata di Fourier $F(\xi)$ della funzione $f(t) = te^{-at^2}$, $a > 0$, riconducendola alla trasformata $G(\xi)$ di $g(t) = e^{-at^2}$.

Risoluzione. In base alla formula della derivata della trasformata si ha

$$G'(\xi) = \mathcal{F}\left((-it)g(t)\right) = (-i)\mathcal{F}\left(te^{-at^2}\right),$$

per cui la trasformata richiesta è

$$F(\xi) = \frac{1}{-i} G'(\xi) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{\xi}{2a} e^{-\xi^2/(4a)} = -i\xi \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} e^{-\xi^2/(4a)}.$$

Si può anche ricorrere alla formula della trasformata della derivata: $te^{-at^2} = (-1/(2a))(-2ate^{-at^2}) = (-1/(2a))D(e^{-at^2})$, per cui

$$F(\xi) = \frac{-1}{2a}(i\xi)G(\xi) = -i\frac{\xi}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/(4a)} = -i\xi\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} e^{-\xi^2/(4a)}.$$

□

Esercizio 2.4. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\mathcal{F}(\cos(a\#)f(\#))(\xi) = \frac{\tau_a \widehat{f}(\xi) + \tau_{-a}\widehat{f}(\xi)}{2};$$
$$\mathcal{F}(\sin(a\#)f(\#))(\xi) = \frac{\tau_a \widehat{f}(\xi) - \tau_{-a}\widehat{f}(\xi)}{2i}.$$

Servirsene per calcolare la trasformata di $f(t) = \sin t \chi_{[-\pi,\pi]}$, ricordando che la trasformata di $\chi_{[-\pi,\pi]}$ è $2\pi \operatorname{sinc}(\xi\pi)$.

Esercizio 2.5. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(t) = 1/\cosh t$ (passare al campo complesso ed integrare su bordi di rettangoli di vertici $r, r+i\pi, -r+i\pi, -r$, indentati se occorre). Esistono $\lambda, k \in \mathbb{R}$ tali che sia $\mathcal{F}(1/\cosh(\lambda\#))(\xi) = k/\cosh(\lambda\xi)$ (cioè, tali che $1/\cosh(\lambda t)$ sia autovettore della trasformazione di Fourier, con k come autovalore)?

Risoluzione. Si deve calcolare $\int_{\mathbb{R}} \left(e^{-i\xi t}/\cosh t\right)\, dt$. Posto $\alpha = -\xi$ per semplicità, consideriamo la funzione complessa $g(z) = e^{i\alpha z}/\cosh z$; essa ha poli dove $\cosh z = 0$, e cioè per $z_k = i(\pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ci interessa solo $i\pi/2$, dove $D\cosh z = \sinh z$ vale i, e che è quindi polo del primo ordine; per il teorema dei residui si ha

$$\int_{-r}^{r} \frac{e^{i\alpha x}}{\cosh x}\, dx - \int_{-r}^{r} \frac{e^{i\alpha(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}\, dx + \varepsilon(r) = 2\pi i \operatorname{Res}(g, i\pi/2) = 2\pi e^{-\alpha\pi/2};$$

il contributo dei lati verticali è stato indicato con $\varepsilon(r)$; ammesso che esso tenda a 0 per $r \to +\infty$ si ha, osservando anche che $\cosh(x + i\pi) = -\cosh x$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\cosh x}\,dx + e^{-\alpha\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\cosh x}\,dx = 2\pi e^{-\alpha\pi/2},$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\cosh x}\,dx = 2\pi \frac{e^{-\alpha\pi/2}}{1 + e^{-\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\cosh(\alpha\pi/2)}.$$

Quindi la richiesta trasformata è $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\xi) = \pi/\cosh(\xi\pi/2)$. È immediato provare che il contributo dei lati verticali è infinitesimo per $r \to +\infty$; si ha infatti, detti $s_{\pm r}$ i segmenti:

$$\left| \int_{\sigma_{\pm r}} \frac{e^{i\alpha z}}{\cosh z}\,dz \right| \le \int_{\sigma_{\pm r}} \frac{|e^{i\alpha z}|}{|\cosh z|} |dz|;$$

su $s_{\pm r}$ si ha $|e^{i\alpha z}| = e^{\mathrm{Re}(i\alpha z)} = e^{-\alpha \,\mathrm{Im}\, z} \le e^{|\alpha|\pi}$, ed anche

$$|\cosh z| = \frac{|e^z + e^{-z}|}{2} \ge \frac{||e^z| - |e^{-z}||}{2} = \frac{e^r - e^{-r}}{2} = \sinh r,$$

per cui l'integrale sul segmento è dominato da $\pi e^{|\alpha|\pi}/\sinh r$ (π è la lunghezza del segmento), infinitesimo per $r \to +\infty$. La trasformata di $1/\cosh(\lambda t)$ è allora $(\pi/|\lambda|)/\cosh(\xi\pi/(2\lambda))$; deve essere $\pi/(2\lambda) = \lambda$, e cioè $\lambda^2 = \pi/2$; quindi $\lambda = \pm\sqrt{\pi/2}$, e $k = \sqrt{2\pi}$. $\square$

Esercizio 2.6.

(i) Determinare singolarità e residui nei poli di

$$h(z) = \frac{e^{-iz\omega}}{z^3 + 1}, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

(ii) Calcolare

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^3 + 1}\,dx.$$

(iii) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^3 + 1}.$$

Si provi che $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si deduca da (ii), applicando formalmente opportune regole di trasformazione, la trasformata di Fourier di f.

Esercizio 2.7. Sia $f(t) = \frac{1}{t^2 - 2t + 3}$.

i) Mostrare che $f \in L^1(\mathbb{R})$;

ii) Provare che $\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$ per ogni $\nu \in \mathbb{R}$;

iii) Calcolare, usando il metodo dei residui, la trasformata di Fourier di f in $\nu < 0$; dedurne poi l'espressione per $\nu > 0$ e per $\nu = 0$.

2.4 Convoluzione

Date due funzioni misurabili $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la loro *convoluzione* è la funzione $f * g$ così definita

$$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - \theta) g(\theta)\,d\theta.$$

Senza qualche condizione su f e g naturalmente l'integrale precedente non ha senso. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ si dimostra, usando il teorema di Fubini, che $f * g$ esiste q.o. in $\mathbb{R}$, ed appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$, essendo anzi $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$: infatti (accettato il fatto che $(t, \theta) \to f(t - \theta)g(\theta)$ sia misurabile), la funzione $(t, \theta) \to |f(t - \theta)||g(\theta)|$ sta in $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, avendosi

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t - \theta)|\,dt \right) |g(\theta)|\,d\theta = \int_{\mathbb{R}} \|f\|_1 |g(\theta)|\,d\theta = \|f\|_1 \|g\|_1$$

(si osservi che è $\int_{\mathbb{R}} |f(t-\theta)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} |f(s)|\,ds = \|f\|_1$, invarianza per traslazioni dell'integrale). La convoluzione tra funzioni fa diventare $L^1(\mathbb{R})$ un'algebra (di Banach) associativa e commutativa; è facile verificare, e lo accettiamo senz'altro, che si ha

$$(f*g)*h = f*(g*h);\ (f+g)*h = f*h+g*h;\ f*g = g*f, \qquad \text{per } f,g,h \in L^1(\mathbb{R}).$$

Esempio 2.2. Si ha, per $f \in L^1(\mathbb{R})$ (od anche solo $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$), ed ogni $a>0$:

$$f*\chi_{[-a,a]}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}} f(\theta)\chi_{[-a,a]}(t-\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}} f(\theta)\chi_{[t-a,t+a]}(\theta)\,d\theta = \int_{t-a}^{t+a} f(\theta)\,d\theta,$$

integrale di f esteso a $[t-a,t+a]$. Si ha quindi, se $b>0$ è un'altra costante, per fissare le idee $b \le a$: $\chi_{[-a,a]} * \chi_{[-b,b]}(t) = \int_{t-b}^{t+b} \chi_{[-a,a]}(\theta)\,d\theta$, che vale ovviamente

$$\begin{cases} 0 & \text{per } t+b \le -a \iff t \le -(a+b) \\ t+b-(-a) = t+(a+b) & \text{per } t-b \le -a < t+b \iff -(a+b) < t \le a-b \\ 2b & \text{per } -a < t-b,\, t+b < a \iff -(a-b) < t < a-b \\ a-(t-b) = (a+b)-t & \text{per } t-b \le a,\ t+b > a \iff a-b < t \le a+b \\ 0 & \text{per } a < t-b \iff a+b < t. \end{cases}$$

Si noti che per $a=b$ si ha la funzione a triangolo nulla per $|t|>2a$, che vale $t+2a$ in $[-2a,0]$ e $2a-t$ in $[0,2a]$.

Il cambio di variabile $y' = x-y$ mostra che se $f*g(x)$ è definita allora $g*f(x)$ è definita e $f*g(x) = g*f(x)$.

Esercizio 2.1. Date $f,g \in L^1(\mathbb{R})$. Si mostri che

- La simmetrizzata della convoluzione è il prodotto di convoluzione delle simmetrizzate: $\widetilde{(f*g)} = \tilde f * \tilde g$.
- Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $\tau_a(f*g) = (\tau_a f)*g = f*(\tau_a g)$.

2.4.1 Altri casi di convoluzione

Dimostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ (cioè g è misurabile e limitata) allora $f*g$ esiste, sta in $L^\infty(\mathbb{R})$ e si ha

$$\|f*g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

(usando la continuità uniforme di $a \mapsto \tau_a f$ da $\mathbb{R}$ ad $L^1(\mathbb{R})$ si potrebbe anche provare che $f*g$ è uniformemente continua).

Cos'è la convoluzione $f*e^{ia\#}(t)$ di f con un carattere?

Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, interpretare le funzioni

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$$

come convoluzioni di f con convenienti funzioni limitate.

2.4.2 Convoluzione di funzioni periodiche

Se $f,g \in L^1_\tau$, si può definire la loro convoluzione:

$$f*g(x) := \int_{(\tau)} f(x-\nu)g(\nu)\,\frac{d\nu}{\tau},$$

(al solito $\int_{(\tau)}$ denota un integrale esteso ad un intervallo–periodo). Essa risulta periodica di periodo τ, come è immediato vedere. Si dimostri (esercizio) che per i coefficienti di Fourier si ha

$$c_n(f*g) = c_n(f)c_n(g).$$

2.4.3 Convoluzione fra L^1 ed L^p

Si può dimostrare (ma non è del tutto immediato) che se f appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$ e g appartiene ad $L^p(\mathbb{R})$ (con $1 \le p \le \infty$), allora $f * g$ sta in $L^p(\mathbb{R})$ e si ha

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \, \|g\|_p.$$

Esempio 2.3. Siano f, g due funzioni di L^1 con $f = 0$ q.o. fuori di un insieme K e $g = 0$ q.o. fuori di un insieme L. Allora $f * g = 0$ q.o. fuori di $K + L$. In particolare se f e g sono continue a supporto compatto anche $f * g$ è a supporto compatto.

La convoluzione tra funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ è mutata dalla trasformazione di Fourier nel prodotto puntuale tra funzioni; si ha cioè l'importantissima regola:

2.4.4 Trasformata della convoluzione

Proposizione 2.11. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi)$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Si ha, ammettendo di poter scambiare l'ordine di integrazione

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-\theta) g(\theta)\, d\theta \right) e^{-i\xi t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-\theta) e^{-i\xi(t-\theta)}\, dt \right) g(\theta) e^{-i\xi\theta}\, d\theta =$$

(si è scritto $e^{-i\xi t} = e^{-i\xi(t-\theta)} e^{-i\xi\theta}$)

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) g(\theta) e^{-i\xi\theta}\, d\theta = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

Ed è possibile scambiare l'ordine di integrazione dato che la funzione $(t, \theta) \mapsto |f(t-\theta)g(\theta)e^{-i\xi t}| = |f(t-\theta)||g(\theta)|$ sta in $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, come sopra visto. □

L'algebra di convoluzione $L^1(\mathbb{R})$ non ha unità, non ha cioè un elemento neutro per la moltiplicazione; però ha unità approssimate; spieghiamo cosa ciò vuol dire. Accettiamo il seguente fatto (la cui dimostrazione è riportata sotto per i più curiosi).

Lemma. Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ fissato, e sia $1 \le p < +\infty$. La funzione $t \mapsto \tau_t f$, che ad ogni $t \in \mathbb{R}$ associa la traslata di f mediante t, è (uniformemente) continua da $\mathbb{R}$ ad $L^p(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Si deve provare che dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che sia $\|\tau_t f - \tau_s f\|_p \le \varepsilon$ se $|t - s| \le \delta$. Poiché la norma $\|\cdot\|_p$ è invariante per traslazioni ($\|\tau_a g\|_p = \|g\|_p$ per ogni $g \in L^p(\mathbb{R})$, ed ogni $a \in \mathbb{R}$) si ha $\|\tau_t f - \tau_s f\| = \|\tau_{t-s} f - f\|_p$: basta provare la cosa per $s = 0$. La dimostrazione procede come segue: prima per le funzioni caratteristiche di intervalli, dove un disegno mostra subito che se $|t| \le b - a$ allora si ha

$$\|\tau_t \chi_{[a,b]} - \chi_{[a,b]}\|_p = 2^{1/p}|t|^{1/p};$$

per linearità la cosa è vera per le funzioni a scalino; infine, fissato $\varepsilon > 0$ si prende g a scalino tale che sia $\|f - g\|_p \le \varepsilon$; esiste $\delta > 0$ tale che se $|t| \le \delta$ si ha $\|\tau_t g - g\|_p \le \varepsilon$; si ha allora

$$\|\tau_t f - f\|_p = \|\tau_t f - \tau_t g + \tau_t g - g + g - f\|_p \le \|\tau_t f - \tau_t g\|_p + \|\tau_t g - g\|_p + \|g - f\|_p =$$
$$\|f - g\|_p + \|\tau_t g - g\|_p + \|g - f\|_p \le 3\varepsilon.$$

□

2.4.5 Famiglie di mollificatori (o unità approssimate) e approssimazione di funzioni.

Sia ora $g \in L^1(\mathbb{R})$, e supponiamo che sia $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 1$. Per $\varepsilon > 0$ poniamo $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} g(x/\varepsilon)$; si ha sempre $\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, dx = 1$. Il grafico di g_ε è ottenuto da quello di g applicando orizzontalmente un'omotetia di rapporto ε, verticalmente un'omotetia di rapporto $1/\varepsilon$; al decrescere di ε i grafici vengono compressi orizzontalmente e dilatati verticalmente; l'integrale si concentra tutto nell'origine, nel senso che $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\delta}^{\delta} g_\varepsilon(x)\, dx = 1$ per ogni $\delta > 0$ fissato (e quindi $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} g_\varepsilon(x)\, dx = 0$): ciò è immediato, con il cambiamento di variabile $\lambda x = t$. Si dice che $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ è una *famiglia di mollificatori* o anche *unità approssimata*.

Esempio. Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$ a supporto in $[-1, 1]$, $g \ge 0$; allora g_ε definita sopra ha supporto in $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Proposizione 2.12. *Sia $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ una famiglia di mollificatori. Si ha allora, per ogni f limitata e continua in x,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f * g_\varepsilon(x) = f(x).$$

Dimostrazione. Si ha

$$f * g_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(y) f(x-y)\,dy = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} g(y/\varepsilon) f(x-y)\,dy$$

il cambiamento di variabile $t = y/\varepsilon$ porge allora

$$f * g_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t) f(x-\varepsilon t)\,dt$$

Per la continuità di f si ha, per quasi ogni t,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(t) f(x-\varepsilon t) = g(t) f(x)$$

ed inoltre

$$|g(t) f(x-\varepsilon t)| \le |g(t)| \|f\|_\infty \quad \text{q.o.}$$

Per il Teorema di convergenza dominata si ha allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} g(t) f(x-\varepsilon t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) f(x)\,dt = f(x)\int_{\mathbb{R}} g(t)\,dt = f(x).$$

□

Esercizio 2.2. Si prova che se f è in $C_0(\mathbb{R})$, o più in generale se f è limitata ed uniformemente continua, che $f * g_\varepsilon$ converge *uniformemente* ad f su $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.13. *Siano $g \in L^1(\mathbb{R})$ e g_ε come sopra. Si ha allora, per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f * g_\varepsilon - f\|_1 = 0;$$

(cioè, $f * g_\varepsilon$ converge ad f in $L^1(\mathbb{R})$).

Dimostrazione. Si ha

$$f * g_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-\nu) g_\varepsilon(\nu)\,d\nu - f(x)\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(\nu) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-\nu) - f(x))\varepsilon^{-1} g(\nu/\varepsilon)\,d\nu;$$

Posto $\nu/\varepsilon = \eta$ si ottiene

$$f * g_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-\varepsilon\eta) - f(x)) g(\eta)\,d\eta, \quad \text{da cui}$$

$$|f * g_\varepsilon(x) - f(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon\eta) - f(x)||g(\eta)|\,d\eta.$$

Integrando la disuguaglianza precedente su $\mathbb{R}$, ed invertendo l'ordine di integrazione a secondo membro si ottiene

$$\|f * g_\varepsilon - f\|_1 \le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon\eta) - f(x)|\,dx\right) |g(\eta)|\,d\eta = \int_{\mathbb{R}} \|\tau_{\varepsilon\eta} f - f\|_1 |g(\eta)|\,d\eta;$$

si può ora usare il teorema della convergenza dominata per affermare che l'integrale tende a zero: al tendere di ε a 0 la funzione $\eta \mapsto \|\tau_{\varepsilon\eta} f - f\|_1 |g(\eta)|$ tende a 0, ed è dominata da $2\|f\|_1 |g(\eta)|$. □

Osservazione 4. Se invece $f \in L^2(\mathbb{R})$, allora la convoluzione $f * g_\varepsilon$ converge ad f in $L^2(\mathbb{R})$; si ha infatti, da

$$|f * g_\varepsilon(x) - f(x)|^2 \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon\eta) - f(x)||g(\eta)|\,d\eta\right)^2;$$

detto $(h(x))^2$ il secondo membro, si ha

$$\|f * g_\varepsilon - f\|_2^2 \leq \|h\|_2^2 =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon\eta) - f(x)||g(\eta)|\, d\eta \right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon\eta) - f(x)||g(\eta)|\, d\eta \right) h(x)\, dx =$$

applicando il teorema di Fubini

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon\eta) - f(x)|\, h(x)\, dx \right) |g(\eta)|\, d\eta \leq \qquad \text{(disuguaglianza di Schwarz)}$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon\eta) - f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (h(x))^2\, dx \right)^{1/2} |g(\eta)|\, d\eta =$$
$$\|h\|_2 \int_{\mathbb{R}} \|\tau_{\varepsilon\eta} f - f\|_2 |g(\eta)|\, d\eta.$$

Si ottiene infine

$$\|f * g_\varepsilon - f\|_2 \leq \|h\|_2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\tau_{\varepsilon\eta} f - f\|_2 |g(\eta)|\, d\eta,$$

e si conclude come nella proposizione sopra.

Alcune unità approssimate sono nelle figure seguenti. Partendo da $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ si hanno i nuclei di Gauss, con $g(x) = \operatorname{sinc}^2 x$ i nuclei di Fèjer. Partendo dalla funzione caratteristica di $[-1/2, 1/2]$ si hanno pure unità approssimate. Si comprende anche perchè non ci sia un elemento neutro per la

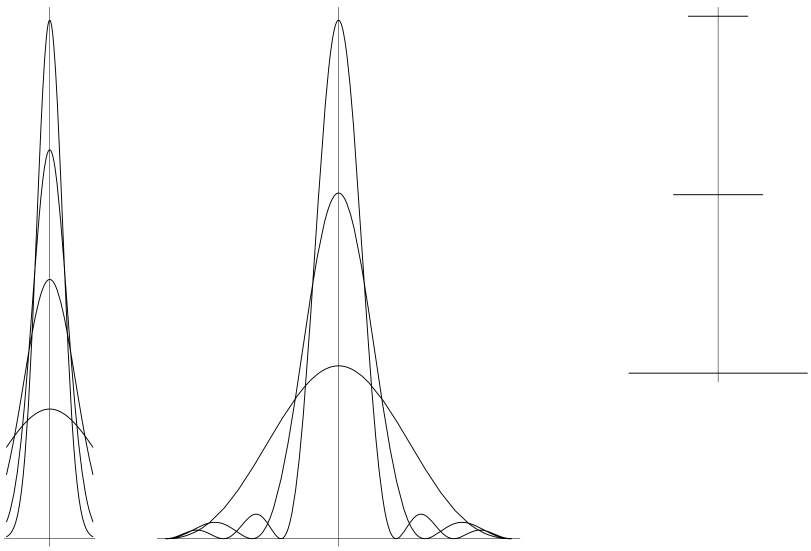

Figura 2.1: Nuclei di Gauss, di Fèjer, a scalino

convoluzione. Se esso ci fosse, chiamiamolo δ, sarebbe $\delta * g_\varepsilon = g_\varepsilon$, e g_ε dovrebbe tendere in $L^1(\mathbb{R})$ a δ; ma se prendiamo ad esempio i nuclei di Gauss $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\varepsilon^2)}$ essi convergono puntualmente a 0 per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e cioè quasi ovunque; allora $\delta = 0$ quasi ovunque, ed in $L^1(\mathbb{R})$ ciò significa $\delta = 0$, assurdo!

2.4.6 Mollificatori e regolarizzazione

La convoluzione di una funzione di L^1 con una funzione liscia è una funzione liscia!

Proposizione 2.14. *Siano $f \in L^1$; g di classe $\mathcal{C}^1$ con derivata g' limitata. Allora $f * g$ è derivabile e si ha $(f * g)' = f * g'$. Analogamente, se $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ e tutte le derivate di g sono limitate allora $f * g$ è di classe $\mathcal{C}^k$ e $(f * g)^{(m)} = f * g^{(m)}$, $m = 1, ..., k$.*

Dimostrazione. Si ha

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y)\, dy$$

Ora $x \to f(y)g(x-y)$ è derivabile in ogni punto y in cui f è definita e si ha

$$\partial_x f(y)g(x-y) = f(y)g'(x-y); \qquad |\partial_x f(y)g(x-y)| \le |f(y)|\|g\|_{L^\infty} \in L^1(\mathbb{R});$$

inoltre $x \mapsto g'(x-y)$ è continua per ogni y. Il teorema di derivazione sotto il segno di integrale (vedi Analisi Due, teorema 9.22.2, (ii)) permette di concludere. □

Scegliendo come g una funzione liscia a supporto compatto si deduce dai risultati di approssimazione precedenti che *le funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ approssimano, in norma L^1, le funzioni di L^1*. Una g siffatta esiste: ad esempio

$$g(x) = \frac{1}{c}\, e^{\frac{1}{x^2-1}} \quad \text{se } |x| < 1; \quad g(x) = 0 \quad \text{se } |x| \ge 1,$$

dove $c = \int_{-1}^{1} e^{1/(x^2-1)}\, dx$; si ha $g(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 1$, altrimenti $g(x) = 0$; inoltre $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 1$. Si dimostra (vedi l'inizio del capitolo sulle distribuzioni) che $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ne segue che, posto $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g(x/\varepsilon)$, g_ε è, per $\varepsilon \to 0$, una famiglia di mollificatori fatta con funzioni C^∞ e limitate.

Proposizione 2.15. *Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p = 1, 2$. Esiste una successione φ_n di funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Dimostrazione. Sia g una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ a supporto in $[-1, 1]$ con integrale uguale a 1 e g_ε la successione di mollificatori ad essa associata. Allora ogni g_ε è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e a supporto compatto (in particolare limitata). Per i risultati esposti sopra $g_\varepsilon * f$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e converge ad f in L^p. □

Più precisamente vale il seguente risultato di densità delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto in $L^1(\mathbb{R})$.

Proposizione 2.16 (Densità delle funzioni lisce a supporto compatto in L^p, $p = 1, 2$)**.** *Siano $f \in L^p(a, b)$, $p = 1$ o $p = 2$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Esiste una successione φ_n di funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto in (a, b) tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n - f\|_{L^p(a,b)} = 0.$$

Se poi $f \in L^1(a, b) \cap L^2(a, b)$ si può scegliere $(\varphi_n)_n$ in modo tale che essa converga ad f in entrambe le norme.

Il risultato precedente permette di fornire una dimostrazione alternativa del Lemma di Riemann–Lebesgue.

Teorema 2.17 (Lemma di Riemann–Lebesgue)**.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\lambda x}\, dx = 0.$$

Dimostrazione. Si supponga che f sia $\mathcal{C}^1$ e a supporto compatto. Integrando per parti si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\, dx = \left[f(x)\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}\, dx.$$

Il primo termine dei due addendi è nullo, essendo f nulla al di fuori di un intervallo limitato; il secondo termine, il cui modulo è maggiorato da $\frac{1}{|\lambda|} \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx$, è infinitesimo per $|\lambda| \to +\infty$, dato che $f' \in L^1$ (essendo continua e a supporto compatto). Trattiamo ora il caso generale: sia $f \in L^1$ e si fissi $\varepsilon > 0$. Esiste g di classe $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto tale che $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$. Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\lambda x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\lambda x}\, dx + \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))e^{i\lambda x}\, dx.$$

Dato che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))e^{i\lambda x}\, dx \right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\, dx = \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

dalla uguaglianza scritta sopra si ottiene

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\lambda x}\, dx \right| \le \varepsilon/2 + \left| \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\lambda x}\, dx \right|;$$

per il punto precedente si ha che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\lambda x}\, dx \right| \le \varepsilon/2$$

se $|\lambda|$ è sufficientemente grande. La conclusione è ora immediata. □

2.5 Formula di inversione

È chiaramente di grande interesse essere in grado di ricostruire f a partire dalla sua trasformata di Fourier. Riprendendo le considerazioni euristiche fatte all'inizio, una funzione periodica viene ricostruita a partire dal suo "spettro", successione dei coefficienti di Fourier, con la serie di Fourier. Nello schema seguito all'inizio siamo indotti a considerare la funzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi,$$

ed a pensare che essa restituisca in qualche modo f.

Definizione. Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, la sua *antitrasformata di Fourier* è la funzione

$$\mathcal{F}^{-1} f(t) = \check{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi \, (= \mathcal{F} f(-\xi))$$

Trasformata ed antitrasformata godono ovviamente delle stesse proprietà; si ha anzi $\mathcal{F}^{-1} f(x) = \widehat{f}(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè $\mathcal{F}^{-1} f = \widetilde{(\widehat{f})} = \widehat{(\tilde{f})}$, per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si ha la

Teorema 2.18. Formula di Inversione (versione globale) *Se f appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$, e la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}$ appartiene pure ad $L^1(\mathbb{R})$, allora $f \in C_0(\mathbb{R})$ e si ha*

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi, \quad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Vediamo quale difficoltà incontra un tentativo ingenuo di dimostrare la formula di inversione: dovendo calcolare

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\theta) e^{-i\xi\theta}\, d\theta \right) e^{i\xi t}\, d\xi,$$

siamo indotti a scambiare l'ordine di integrazione, ottenendo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\theta)\xi}\, d\xi \right) f(\theta)\, d\theta,$$

ma l'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\theta)\xi}\, d\xi$ è chiaramente privo di senso. Di fatto, non è lecito scambiare l'ordine di integrazione perchè $(t, \theta) \mapsto |f(\theta) e^{-i\xi\theta} e^{i\xi t}| = |f(\theta)|$ non sta in $L^1(\mathbb{R}^2)$. La dimostrazione richiede di "smorzare" le funzioni con un conveniente fattore, che al limite sparirà; la differiamo alla successiva sezione. Osserviamo invece l'importante

Corollario 2.19. *La trasformazione di Fourier è iniettiva da $L^1(\mathbb{R})$ a $C_0(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tali che sia $\widehat{f} = \widehat{g}$; allora $\widehat{f - g} = 0$; la costante 0 sta in $L^1(\mathbb{R})$; per la formula di inversione, il suo originale di Fourier è nullo. Quindi $f - g = 0$, cioè, $f = g$. $\square$

Il risultato di unicità precedente motiva la seguente definizione.

Definizione. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione. L'*originale di Fourier* di h è, se essa esiste, l'unica funzione f tale che $\widehat{f} = h$. Un po' abusivamente si scrive spesso $f = \mathcal{F}^{-1}(h)$ o $f = \check{h}$ e si dice comunque che f è l'*antitrasformata di h*, anche se $h \notin L^1(\mathbb{R})$ e l'antitrasformata definita sopra attraverso la formula integrale non si può calcolare.

Dimostriamo qui il Lemma di dualità.

Proposizione 2.20. Lemma di dualità *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\theta) g(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbb{R}} f(\theta) \widehat{g}(\theta)\, d\theta.$$

Dimostrazione. Essendo
$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\theta)g(\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\theta t}\,dt\right) g(\theta)\,d\theta,$$
se è possibile scambiare l'ordine di integrazione si ottiene
$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\theta)g(\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}} f(t)\left(\int_{\mathbb{R}} g(\theta)e^{-i\theta t}\,d\theta\right) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\widehat{g}(t)\,dt,$$
e cioè la conclusione. I teoremi di Fubini–Tonelli dicono che ciò è possibile se l'integrale iterato
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|f(t)e^{-i\theta t}\right|\,dt\right) |g(\theta)|\,d\theta,$$
esiste finito; tale integrale iterato vale $\|f\|_1\|g\|_1$, e si conclude. □

Esercizio 2.3. Si è visto che la trasformata di Fourier di $f_a(t) = e^{-at^2}$ è $\sqrt{\pi/a}\,e^{-\xi^2/(4a)}$ Calcolare $f_a * f_b$ usando la trasformazione di Fourier $(a, b > 0)$.

Risoluzione. Si ha $\mathcal{F}(f_a * f_b)(\xi) = \mathcal{F}f_a(\xi)\mathcal{F}f_b(\xi)$, e quindi
$$\mathcal{F}(f_a * f_b)(\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \exp\left(-\frac{1}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})\xi^2\right);$$
Sia $c > 0$ tale che $1/c = 1/a + 1/b$, cioè $c = ab/(a + b)$. Cerchiamo l'originale di Fourier di
$$\mathcal{F}(f_a * f_b)(\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\sqrt{c/\pi}\left(\sqrt{\pi/c}\,e^{-\xi^2/(4c)}\right),$$
che messo in questa forma è chiaramente
$$f_a * f_b(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}e^{-ct^2} \qquad c = \frac{ab}{a+b}.$$
□

Esercizio 2.4. Dedurre dalla precedente formula che se si pone, per $\sigma > 0$:
$$G_\sigma(x) = \frac{e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad \text{allora} \quad G_\sigma * G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}};$$
mostrare poi che se si pone $P_a(x) = a/(\pi(x^2 + a^2))$ $(a > 0)$, allora $P_a * P_b = P_{a+b}$ (laborioso ma facile; si può trasformare alla Fourier oppure fare il calcolo diretto dell'integrale che definisce la convoluzione, usando il teorema dei residui).

Esercizio 2.5. Sia $f(x) = (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}(x)$.

(i) Dire, senza calcolarla, se la trasformata di Fourier di f appartiene a $L^1(\mathbb{R})$;

(ii) Determinare la trasformata di Fourier di f;

(iii) Dedurre il valore dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\xi\cos\xi - \sin\xi}{\xi^3}\cos\frac{\xi}{2}d\xi$$

Esercizio 2.6. Usando la formula di antitrasformazione, determinare l'originale di Fourier di
$$\frac{\xi - 2}{(i\xi - 1)((i\xi)^2 + 6i\xi + 18)}$$

2.5.1 Dimostrazione della formula di inversione

Partiamo dalla gaussiana $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, che si trasforma in $\sqrt{2\pi}$ volte se stessa e consideriamo le unità approssimate $g_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} g(t/\varepsilon)$. Si osservi che $\widehat{g_\varepsilon}(\xi) = \widehat{g}(\xi/\varepsilon) = e^{-(\varepsilon\xi)^2/2}$ sicchè $\widehat{\widehat{g_\varepsilon}} = 2\pi g_\varepsilon$. Al tendere di ε a 0, la funzione $\widehat{f}(\xi)\widehat{g_\varepsilon}(\xi)$ tende a $\widehat{f}(\xi)$ in $L^1(\mathbb{R})$, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue (infatti $0 < \widehat{g_\varepsilon}$, e $\widehat{g_\varepsilon}(\xi) \uparrow 1$ per $\varepsilon \to 0$, quindi $|\widehat{f}(\xi)\widehat{g_\varepsilon}(\xi)| \le |\widehat{f}(\xi)|$); ne segue che

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\widehat{g_\varepsilon})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} \widehat{g_\varepsilon}(\xi)\, d\xi$$

converge uniformemente in $C_0(\mathbb{R})$ alla funzione $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$. Osserviamo ora che si ha

$$(\widehat{e^{i\#t}\widehat{g_\varepsilon}(\#)})(\theta) = \tau_t \widehat{\widehat{g_\varepsilon}}(\theta) = 2\pi g_\varepsilon(\theta - t),$$

Per parità si ha poi $g_\varepsilon(\theta - t) = g_\varepsilon(t - \theta)$. Il lemma di dualità porge allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} g_\varepsilon(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\theta) (\widehat{e^{i\#t} g_\varepsilon(\#)})(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbb{R}} f(\theta) g_\varepsilon(t - \theta)\, d\theta = f * g_\varepsilon(t),$$

ed il secondo membro converge uniformemente a $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$, e converge in $L^1(\mathbb{R})$ ad f; qualche sottosuccessione converge allora ad f anche q.o., ma allora $f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}$. La dimostrazione del teorema di inversione è terminata. $\square$

2.6 Antitrasformata di trasformate non in $L^1(\mathbb{R})$

L'ipotesi $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ è molto esigente e non è verificata in molti casi interessanti. Sussiste però un teorema in tutto analogo a quello della convergenza puntuale delle serie di Fourier.

Teorema 2.21. FORMULA DI INVERSIONE O ANTITRASFORMAZIONE (VERSIONE PUNTUALE) *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ che soddisfi in a le condizioni di Dini (per la convergenza puntuale delle serie di Fourier). Allora*

$$\frac{f(a^-) + f(a^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \,\mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{ia\xi}\, d\xi := \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \widehat{f}(\xi)\, e^{ia\xi}\, d\xi$$

(l'esistenza del valore principale è parte della tesi).

Dimostrazione. Nell'integrale

$$\int_{-r}^{r} \widehat{f}(\xi)\, e^{ia\xi}\, d\xi = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\xi t}\, dt \right) e^{ia\xi}\, d\xi$$

possiamo scambiare l'ordine di integrazione (infatti la funzione $(t, \xi) \mapsto |f(t) e^{i\xi(a-t)}| = |f(t)|$ sta in $L^1(\mathbb{R} \times [-r, r])$, avendo su tale insieme integrale pari a $2r\|f\|_1$); si ottiene

$$\int_{-r}^{r} \widehat{f}(\xi)\, e^{ia\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-r}^{r} e^{i\xi(a-t)}\, d\xi \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ir(a-t)} - e^{-ir(a-t)}}{i(a-t)} f(t)\, dt =$$
$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(r(t-a))}{(t-a)} f(t)\, dt$$

Posto nel precedente integrale $t - a = \theta$ si ottiene

$$\int_{-r}^{r} \widehat{f}(\xi)\, e^{ia\xi}\, d\xi = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(r\theta)}{\theta} f(a + \theta)\, d\theta;$$

e posto $t - a = -\theta$ si ha anche

$$\int_{-r}^{r} \widehat{f}(\xi)\, e^{ia\xi}\, d\xi = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(r\theta)}{\theta} f(a - \theta)\, d\theta;$$

Sommando membro a membro e dividendo per due si ha

$$\int_{-r}^{r} \widehat{f}(\xi)\, e^{ia\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(a+\theta)+f(a-\theta)}{\theta}\, \sin(r\theta)\, d\theta$$

Sia ora $\delta > 0$ come nell'ipotesi aggiuntiva; scriviamo l'integrale a secondo membro come somma di integrali $\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{+\infty}$. Al tendere di r a $+\infty$ il primo e l'ultimo integrale tendono a 0 per il lemma di Riemann–Lebesgue (è ovvio che la funzione $\theta \mapsto (f(a+\theta)+f(a-\theta))/\theta$ appartiene sia ad $L^1(]-\infty,-\delta]$ che ad $L^1([\delta,+\infty[)$. Poniamo $c = (f(a^-)+f(a^+))/2$; si noti che $\theta \mapsto (f(a+\theta)+f(a-\theta)) - 2c)/\theta$ sta in $L^1([-\delta,\delta])$ (è dispari e per ipotesi sta in $L^1([0,\delta])$). Si ha alfine

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{f(a+\theta)+f(a-\theta)}{\theta} \sin(r\theta)\, d\theta \;=\; \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{f(a+\theta)+f(a-\theta)-2c}{\theta} \sin(r\theta)\, d\theta + 2c \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(r\theta)}{\theta} d\theta.$$

Per il lemma di Riemann–Lebesgue il primo di questi integrali tende a 0; nel secondo si fa il cambiamento di variabile $r\theta = t$; si trova

$$2c \int_{-r\delta}^{r\delta} \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

che tende chiaramente a $2\pi c$ per r tendente a $+\infty$ (ricordando che $\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin t/t)dt = \pi$). La dimostrazione è conclusa. □

2.6.1 Applicazione: originali di Fourier di funzioni razionali

Si dimostra che ogni funzione razionale priva di poli reali è la trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ che è $\mathcal{C}^\infty$ su $]-\infty, 0]$ e su $[0,+\infty[$; la formula precedente è utile per determinarla. Rinviamo la dimostrazione della prima parte di questa affermazione al capitolo sulla trasformata di Laplace, dove illustreremo anche un metodo alternativo per determinare l'originale di Fourier di una funzione razionale siffatta. Si noti peraltro che una funzione razionale con poli reali non è senz'altro la trasformata di Fourier di una funzione (le trasformate sono funzioni continue).

Esempio 2.4. Determiniamo, con il metodo illustrato sopra, l'originale di Fourier di

$$R(\xi) = \frac{1}{-\xi^2 - 2i\xi + 2}$$

Si noti che $\xi^2 + 2i\xi - 2 = (\xi+i)^2 - 1 = 0$ se e solo se $\xi = \pm 1 - i$; R quindi R non ha poli reali. Posto $\widehat{f} = R$, la formula di antitrasformazione porge

$$\frac{f(a^-)+f(a^+)}{2} = \frac{1}{2\pi}\, \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi)\, e^{ia\xi}\, d\xi$$

Calcoliamo l'integrale usando il metodo dei residui. La funzione $R(\xi)e^{ia\xi}$ ha poli in $\pm 1 - i$ con residui

$$\operatorname{Res}(R(\xi)e^{ia\xi}, -1-i) = \frac{e^{ia(-1-i)}}{-2(-1-i)-2i} = \frac{1}{2}\, e^{a-ia} \qquad \operatorname{Res}(R(\xi)e^{ia\xi}, 1-i) = \frac{e^{ia(1-i)}}{-2(1-i)-2i} = -\frac{1}{2}\, e^{a+ia}$$

Se $a > 0$ integriamo sui semicerchi di raggio $R > 0$ sul semipiano $\operatorname{Im}(z) \geq 0$; utilizzando il lemma di Jordan si trova

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi)\, e^{ia\xi}\, d\xi = 2\pi i\, 0 = 0;$$

mentre se $a < 0$ si trova

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi)\, e^{ia\xi}\, d\xi = -2\pi i[\operatorname{Res}(R(\xi)e^{ia\xi}, -1-i) + \operatorname{Res}(R(\xi)e^{ia\xi}, 1-i)]$$

$$= -\pi i \left(e^{a-ia} - e^{a+ia}\right) = -2\pi e^a \sin a$$

da cui infine

$$f(a) = -e^a \sin a H(-a).$$

Esempio 2.5.

(a) Siano $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ e $h_t(z) = \dfrac{e^{zt}}{z^2 - 6z + 13}$.

(b) Studiare le singolarità di h_t; calcolare i residui di h_t nelle singolarità.

(c) Integrando h_t su un opportuno circuito, calcolare l'integrale

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} h_t(i\xi)\, d\xi$$

(sugg: distinguere i casi $t > 0$ e $t < 0$)

- Usando (b), determinare l'originale di Fourier di $\dfrac{1}{(i\xi)^2 - 6i\xi + 13}$.

Risoluzione. (a) Si ha $z^2 - 6z + 13 = (z-3)^2 + 4 = (z - 3 - 2i)(z - 3 + 2i)$; $3 + 2i$ e $3 - 2i$ sono zeri di molteplicità 1 del denominatore, il numeratore non è mai nullo: si tratta pertanto di poli di ordine 1 per h_t e si ha

$$\operatorname{Res}(h_t, 3+2i) = \frac{e^{(3+2i)t}}{2(3+2i) - 6} = -\frac{i}{4} e^{3t} e^{2it} \qquad \operatorname{Res}(h_t, 3-2i) = \frac{e^{(3-2i)t}}{2(3-2i) - 6} = \frac{i}{4} e^{3t} e^{-2it}$$

(b) Si noti che

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} h_t(i\xi)\, d\xi = \text{v. p.}\, \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} h_t(z)\, dz$$

dove con $[-i\infty, i\infty]$ indichiamo il cammino $\{i\xi : \xi \in \mathbb{R}\}$. Essendo $1/(z^2 - 6z + 13) \to 0$ per $|z| \to +\infty$ la scelta del circuito dipende dal segno di t in modo che si possa applicare il lemma di Jordan. Se $t < 0$ consideriamo, fissato $R > 0$, il circuito γ_R^+ costituito dal segmento $[-iR, iR]$ e dal semicerchio (*negativamente orientato*) $-C_R^+$ dove $C_R^+(t) = Re^{it}, t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Per R sufficientemente grande il circuito considerato contiene al suo interno i poli di h_t e si ha pertanto, per il Teorema dei residui,

$$\int_{\gamma_R^+} h_t(z)\, dz = -2\pi i (\operatorname{Res}(h_t, 3+2i) + \operatorname{Res}(h_t, 3-2i)) = -\pi i e^{3t} \sin 2t$$

Inoltre si ha

$$\int_{\gamma_R^+} h_t(z)\, dz = \int_{-R}^{R} h_t(i\xi)\, d\xi - \int_{C_R^+} h_t(z)\, dz$$

e per il lemma di Jordan, essendo $t < 0$,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R^+} \frac{e^{zt}}{z^2 - 6z + 13}\, dz = 0;$$

si ottiene pertanto

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} h_t(i\xi)\, d\xi = \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R^+} h_t(z)\, dz = -\pi i e^{3t} \sin 2t$$

Ananalogamente per $t > 0$, integrando sul circuito γ_R^- costituito dal segmento $[-iR, iR]$ e dal semicerchio di raggio R $C_R^-(t) = Re^{it}, t \in [\pi/2, 3\pi/2]$, si ottiene

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} h_t(i\xi)\, d\xi = \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R^-} h_t(z)\, dz = 0$$

non essendoci singolarità di h_t sul semipiano $\operatorname{Re} z < 0$.

(c) Per la formula di inversione (puntuale) l'originale di Fourier f di $\dfrac{1}{(i\xi)^2 - 6i\xi + 13}$ è dato q.o. da

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\, \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi t}}{(i\xi)^2 - 6i\xi + 13}\, d\xi$$

ed è pertanto

$$f(t) = -\frac{1}{2} e^{3t} \sin 2t \text{ se } t < 0, \quad f(t) = 0 \text{ altrimenti.}$$

□

Esercizio 2.7. Determinare con il metodo illustrato sopra gli orginali di Fourier di

$$\frac{\xi+1}{\xi^2-4i\xi-4}; \qquad \frac{\xi^2+1}{(\xi-i)(\xi^2+4)}; \qquad \frac{2\xi+1}{\xi^2+6i\xi-13}$$

2.7 Trasformazione di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$

Abbiamo definito la trasformata di Fourier nell'ambito di funzione di $L^1(\mathbb{R})$. Estenderemo qui la nozione a funzioni di $L^2(\mathbb{R})$, facendo vedere che, come nel caso delle serie di Fourier, la teoria in $L^2(\mathbb{R})$ è assai più simmetrica di quella in $L^1(\mathbb{R})$.

Ci limitiamo a brevi considerazioni. Il primo risultato esprime la conservazione (a meno del fattore 2π) del prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$ delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto.

Lemma. Per ogni $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

Di conseguenza, se $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ si ha che $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Dimostrazione. Ricordiamo, come si è visto nell'Esempio 2.1, che se $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ allora $\widehat{h} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, ed inoltre

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi|^2\widehat{h}(\xi) = 0,$$

sicché $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ e vale pertanto la formula di inversione sia per f che per g. Si ha

$$\overline{\widehat{g}(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-it\xi}\, dt} = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)}e^{it\xi}\, dt = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(\xi).$$

da cui, usando la formula di dualità,

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\mathcal{F}^{-1}\overline{g}(\xi)\, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\overline{g})(t)\, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(\xi)\, d\xi.$$

In particolare, per $f = g$ si ottiene $\|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$. □

. Definizione - Teorema di Plancherel *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Allora per ogni $(u_k)_k$ una successione in $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ convergente a f in L^2 la successione delle trasformate $\widehat{u_k}$ converge ad una funzione $\mathcal{F}_{L^2}(f)$ di $L^2(\mathbb{R})$ (indipendente dalla scelta della successione di partenza $(u_k)_k$) convergente ad f in L^2) detta trasformata di Fourier–Plancherel di f; si ha poi*

$$\|\mathcal{F}_{L^2}(f)\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2$$

Infine, se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata di Fourier e la trasformata di Fourier–Plancherel di f coincidono; scriveremo pertanto nel seguito, per non appesantire le notazioni, $\mathcal{F}$ al posto di $\mathcal{F}_{L^2}$.

Si osservi che una tale successione (u_k) esiste sempre dato che $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in L^2.

Dimostrazione. Per il lemma precedente per ogni k, m si ha

$$\|\widehat{u_k} - \widehat{u_m}\|_2 = 2\pi\|u_k - u_m\|_2$$

quindi la successione $(\widehat{u_k})_k$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$ ed è pertanto convergente ad una funzione $\mathcal{F}_{L^2}(f)$ di $L^2(\mathbb{R})$; si ha di conseguenza

$$\|\mathcal{F}_{L^2}(f)\|_2^2 = \lim_k \|\widehat{u_k}\|_2^2 = 2\pi \lim_k \|u_k\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2$$

Se poi (v_k) è un'altra successione di $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ convergente ad f in L^2 si ha che

$$\|\widehat{u_k} - \widehat{v_k}\|_2 = 2\pi\|u_k - v_k\|_2 \to 0$$

per $k \to +\infty$, da cui $\lim \widehat{v_k} = \lim \widehat{u_k} = \mathcal{F}(f)$. Sia ora $f \in L^1 \cap L^2$ e $(u_k)_k$ successione in $\mathcal{C}^\infty$ convergente ad f sia in L^1 che in L^2. per la continuità della trasformata in $L^1(\mathbb{R})$ si ha che $\lim_k \mathcal{F}(u_k) = \mathcal{F}(f)$ uniformemente. Per definizione si ha poi $\lim_k \mathcal{F}(u_k) = \mathcal{F}_{L^2}(f)$ in norma L^2: esiste allora una sottosuccessione $\mathcal{F}(u_k)$ di che converge q.o.[1] a $\mathcal{F}_{L^2}(f)$; ma allora $\mathcal{F}_{L^2}(f) = \mathcal{F}(f)$ q.o..

$\square$

Segue immediatamente dalla definizione precedente che l'operatore $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ è lineare; per tale trasformata valgono le regole relative alla traslazione e moltiplicazione per i caratteri analoghi a quelli validi per la trasformata di Fourier di funzioni di $L^1(\mathbb{R})$.

. Corollario *Sia f_k una successione di funzioni convergente ad f in L^2. Allora $\mathcal{F}_{L^2}(f_k)$ converge a $\mathcal{F}_{L^2}(f)$ in L^2.*

Dimostrazione. Per il teorema di Plancherel si ha

$$\|\mathcal{F}_{L^2}(f) - \mathcal{F}_{L^2}(f_k)\|_2^2 = \|\mathcal{F}_{L^2}(f - f_k)\|_2^2 = 2\pi\|f - f_k\|_2^2$$

La conclusione è ora immediata. $\square$

Il risultato che segue illustra un modo pratico per calcolare la trasformata di Fourier–Plancherel.

Proposizione 2.22. *Sia $f \in L^2$. Si supponga che*

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\,dt$$

esista per q.o. ξ. Allora la trasformata di Fourier–Plancherel $\mathcal{F}(f)$ di f è data da

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\,dt \qquad q.o.$$

Dimostrazione. Si ha $f_n = f\chi_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ed è $f_n \to f$ per $n \to +\infty$ in norma L^2; dato che per q.o. ξ si ha

$$\mathcal{F}_{L^2}(f_n)(\xi) = \mathcal{F}(f_n)(\xi) = \int_{-n}^{+n} f(t)e^{-it\xi}\,dt$$

allora, per q.o. ξ,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{+n} f(t)e^{-it\xi}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}(f_n)(\xi)$$

Ora $\mathcal{F}(f_n) \to \mathcal{F}_{L^2}(f)$ in $L^2(\mathbb{R})$; esiste quindi una sottosuccessione $\mathcal{F}(f_{n_k})$ tale che $\mathcal{F}(f_{n_k})$ converge a $\mathcal{F}_{L^2}(f)$ q.o. (cioè $\lim_n \mathcal{F}(f_{n_k})(\xi) = \mathcal{F}_{L^2}(f)(\xi)$ per q.o. ξ), e pertanto $\mathcal{F}_{L^2}(f)(\xi)$ coincide quasi ovunque con v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\,dt$. $\square$

La dimostrazione del risultato precedente mostra che, se $f \in L^2(\mathbb{R})$, esiste una successione di interi n_k tale che

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-n_k}^{n_k} f(t)e^{-it\xi}\,dt \qquad \text{q.o.}$$

In modo analogo si definisce l'antitrasformata $\mathcal{F}_{L^2}^{-1}$ per funzioni di $L^2(\mathbb{R})$. Vale sempre la formula di antitrasformazione.

Corollario 2.23. *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{F}_{L^2}^{-1}(\mathcal{F}_{L^2}(f)) = f$.*

Dimostrazione. Infatti se $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ è tale che $u_k \to f$ in L^2 allora si ha $\widehat{u_k} \to \mathcal{F}_{L^2}(f)$ per $k \to +\infty$ (in norma L^2); ma allora $u_k = \mathcal{F}_{L^2}^{-1}(\widehat{u_k})$ converge a $\mathcal{F}_{L^2}^{-1}(\mathcal{F}_{L^2}(f))$ in L^2 per $k \to +\infty$, da cui l'uguaglianza $\mathcal{F}_{L^2}^{-1}(\mathcal{F}_{L^2}(f)) = f$, essendo $u_k \to f$ in L^2. $\square$

[1] Usiamo qui il fatto che se f_n è una successione in $L^p(\mathbb{R}^n)$ convergente in $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p = 1, 2)$ ad una funzione f esiste una sottosuccessione f_{n_k} che converge q.o. ad f.

Esempio 2.6. La funzione $\mathrm{sinc}(\xi/2)$ è la trasformata di $\chi_{[-1/2,1/2]}$ come sopra visto. La sua trasformata di Fourier –Plancherel può essere calcolata come

$$\begin{aligned}\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(t/2)\,e^{-i\xi t}\,dt = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}\frac{\sin(t/2)}{t/2}\cos(\xi t)\,dt = \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin((1/2+\xi)t)+\sin((1/2-\xi)t)}{t}\,dt = \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin((1/2+\xi)t)}{t}\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin((1/2-\xi)t)}{t}\,dt = \\ \pi\,(\mathrm{sgn}(1/2+\xi)+\mathrm{sgn}((1/2-\xi))\end{aligned}$$

Si scrive talvolta $2\pi\,\mathrm{rect}$ per la funzione ottenuta, che è $\mathrm{rect}(\xi) = 1$ per $-1/2 < \xi < 1/2$, $\mathrm{rect}(\pm 1/2) = 1/2$, $\mathrm{rect}\,\xi = 0$ per $|\xi| > 1/2$, e coincide con la funzione caratteristica di $[-1/2, 1/2]$, salvo che in $\pm 1/2$. Si noti che $\mathrm{rect} * \mathrm{rect}(t) = (1 - |t|) \vee 0$, il triangolo.

Esercizio 2.8. Calcolare la trasformata di Fourier–Plancherel della funzione $f(t) = (t\sin t)/(1 + t^2)$. Suggerimento: usare il teorema dei residui per calcolare

$$V(\alpha) = \mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^{i\alpha t}}{1+t^2}\,dt \qquad (\alpha\in\mathbb{R}),$$

e ricondurvi la richiesta trasformata. Mostrare, usando la trasformata, che $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

Risoluzione. La funzione $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$. si ha

$$\widehat{h}(\xi) = \mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}e^{-i\xi t}\,dt$$

Supposto $\xi < 0$ si può integrare $ze^{-i\xi z}/(1 + z^2)$ su semicerchi nel semipiano superiore; per il teorema dei residui ed il lemma di Jordan si ottiene:

$$\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^{-i\xi t}}{1+t^2}\,dt = 2\pi i\,\mathrm{Res}(ze^{-i\xi z}/(1+z^2), i) = 2\pi i\frac{ie^{\xi}}{2i} = i\pi e^{\xi}$$

La funzione h, e quindi la sua trasformata di Fourier–Plancherel, è dispari. Pertanto si ha

$$\widehat{h}(\xi) = -\,\mathrm{sgn}(\xi) i\pi e^{-|\xi|}$$

Ora

$$\frac{t\sin t}{1+t^2} = \frac{1}{2i}\left(h(t)e^{it} - h(t)e^{-it}\right)$$

da cui

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\xi) &= \frac{i\pi}{2i}\left(\tau_{-1}\widehat{h}(\xi) - \tau_1\widehat{h}(\xi)\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\,\mathrm{sgn}(\xi+1)e^{-|\xi+1|} + \mathrm{sgn}(\xi-1)e^{-|\xi-1|}\right)\end{aligned}$$

Tale trasformata ha due punti di discontinuità (± 1) e quindi non è la trasformata di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$, non essendo continua. □

Esercizio 2.9. Usando il teorema di Plancherel, dimostrare che l'insieme di funzioni $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$, dove $f_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-in\xi}\,\mathrm{sinc}(\xi/2)$, è ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.

Risoluzione. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ la funzione f_n è la trasformata di Fourier di $\chi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tau_n\,\mathrm{rect}$, funzione caratteristica dell'intervallo $]n - 1/2, n + 1/2[$; si conclude dato che $\{\chi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è un insieme ortogonale di vettori di norma uguale a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, e la trasformazione di Fourier dilata le norme (di $\sqrt{2\pi}$) e i prodotti scalari (di 2π). □

Esercizio 2.10. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ continua a C^1 a tratti, con $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

(i) Mostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f'(t)\,dt$ esiste finito, dedurne che i limiti $\lim_{t\to\pm\infty}(f(t))^2$ esistono finiti. Quanto valgono allora tali limiti?

(ii) Mostrare che si ha, per quasi ogni $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f'}(\xi) = (i\xi)\widehat{f}(\xi)$$

(iii) Servirsi di questo risultato per calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$\frac{t\sin t + \cos t - 1}{t^2} \left(= \frac{d}{dt}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)\right)$$

e calcolare anche l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t\sin t + \cos t - 1}{t^2}\right)^2 dt.$$

Risoluzione. (i) Si ricorda che il prodotto di due funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ sta in $L^1(\mathbb{R})$; ne segue che l'integrale è assolutamente convergente, in particolare esiste finito, ; inoltre si ha

$$\frac{d}{dt}(f(t))^2 = 2f(t)f'(t); \quad \text{quindi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f'(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to+\infty}(f(t))^2 - \lim_{t\to-\infty}(f(t))^2\right);$$

i limiti esistono quindi finiti, e dovendo f^2 stare in L^1, tali limiti devono essere nulli; quindi anche $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.

(ii) Il teorema di Plancherel dice che per quasi ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(\xi) &= \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f'(t)e^{-i\xi t}\,dt = \lim_{r\to+\infty}\left(\left[f(t)e^{-i\xi t}\right]_{t=-r}^{t=r} + (i\xi)\int_{-r}^{r} f(t)e^{-i\xi t}\,dt\right) = \\ &(i\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \text{dato che i limiti all'infinito sono nulli.}\end{aligned}$$

(iii) La trasformata di Fourier–Plancherel di $f(t) = (1-\cos t)/t$ è facile da calcolare; per disparità di f resta solo il pezzo con il sin e si ha

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= -i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}\sin(\xi t)\,dt = -i\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(\xi t)}{t} - \frac{1}{2}\frac{\sin((\xi+1)t)+\sin((\xi-1)t)}{t}\right)dt; \\ &- i\pi\left(\operatorname{sgn}\xi - \frac{\operatorname{sgn}(\xi+1)+\operatorname{sgn}(\xi-1)}{2}\right).\end{aligned}$$

Se $\xi < -1$ oppure se $\xi > 1$ la trasformata è nulla; se $-1 < \xi < 0$ vale $i\pi$, se $0 < \xi < 1$ vale $-i\pi$. La trasformata della derivata f', per quanto appena visto, vale allora:

$$0 \quad \text{se } |\xi| > 1; \qquad \pi|\xi| \text{ per } |\xi| < 1.$$

Infine per il teorema di Plancherel si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t\sin t + \cos t - 1}{t^2}\right)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(\pi|\xi|)^2\,d\xi = \frac{1}{\pi}\pi^2\int_0^1 \xi^2\,d\xi = \frac{\pi}{3}.$$

□

Esercizio 2.11. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x\sin x}{x^2+1}.$$

(i) Si dica in quale senso esiste la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di f e la si calcoli;

(ii) si deduca dall'espressione di $\hat{f}$ che $f \notin L^1(\mathbb{R})$ e che $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2.12. Dimostrare che ogni funzione continua, lineare a tratti, a supporto compatto ha la trasformata in $L^1(\mathbb{R})$. Più in generale, se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è continua e C^1 salvo al più su un insieme finito di punti, ed $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

Risoluzione. Le derivate di tali funzioni sono infatti funzioni a scalino a supporto compatto, che hanno trasformata in $L^2(\mathbb{R})$, e quindi da $\widehat{f'}(\xi) = (i\xi)\widehat{f}(\xi)$ si trae che $f(\xi)$, continua e dominata per $|\xi| \geq 1$ da $|\widehat{f'}|/|\xi|$, prodotto di funzioni che sono in $L^2(\mathbb{R}\setminus]-1,1[)$, sta in $L^1(\mathbb{R})$. □

Esercizio 2.13. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; supponiamo che $\xi \mapsto \xi\widehat{f}(\xi)$ sia in $L^1(\mathbb{R})$. Mostrare che allora $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$, anzi che posto $g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(i\xi)\widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi$ si ha

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(\theta)\, d\theta.$$

Risoluzione. Chiaramente $\widehat{f}$, continua, sta in $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$; e poiché per $|\xi| \geq 1$ si ha $|\widehat{f}(\xi)| \leq |\xi\widehat{f}(\xi)|$, si ha anche $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}\setminus]-1,1[)$, e quindi $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Il teorema di inversione mostra che allora si ha $f \in C_0(\mathbb{R})$, ed $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Definito g come nell'enunciato calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^t g(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}}(i\xi)\widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi\theta}\, d\xi\right) d\theta =$$

(ammettiamo di poter scambiare gli integrali; dopo verifichiamo la liceità di tale azione)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t (i\xi)\widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi\theta}\, d\theta\right) d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, \left[e^{i\xi\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=t} d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (\widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi t} - \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi 0})\, d\xi =$$
$$f(t) - f(0),$$

per la formula di inversione. Lo scambio degli integrali è lecito perché

$$(\xi, \theta) \mapsto |(i\xi)\widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi\theta}| = |\xi\widehat{f}(\xi)|$$

appartiene ad $L^1(\mathbb{R} \times [0,t])$.

□

Il successivo esercizio è analogo al precedente, ma un poco più complicato.

Esercizio 2.14. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; supponiamo che $\xi \mapsto \xi\widehat{f}(\xi)$ sia in $L^2(\mathbb{R})$. Mostrare che allora $\widehat{f}$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$ e dedurne che f appartiene a $C_0(\mathbb{R})$. Detta g l'antitrasformata di Fourier–Plancherel di $(i\xi)\widehat{f}(\xi)$, mostrare che si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(\theta)\, d\theta.$$

Risoluzione. Chiaramente $\widehat{f}$, continua, sta in $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$; dobbiamo provare che è sommabile all'infinito, e questo è immediato dato che $\xi \mapsto 1/\xi$ sta in $L^2(\mathbb{R}\setminus]-1,1[)$, e quindi $\widehat{f}(\xi) = (1/\xi)(\xi\widehat{f}(\xi))$ sta in $L^1(\mathbb{R}\setminus]-1,1[)$, in quanto prodotto di due funzioni appartenenti ad $L^2(\mathbb{R}\setminus]-1,1[)$. Per il teorema d'inversione si ha allora $f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.

Poniamo ora, per $r > 0$,

$$g_r(\theta) = \int_{-r}^{r} (i\xi)\widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi\theta}\, d\xi;$$

al tendere di r a $+\infty$ g_r converge in $L^2(\mathbb{R})$ a g; quindi g_r converge a g anche in $L^2([0,t])$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, e quindi anche in $L^1([0,t])$. Ne segue che ha luogo il passaggio al limite sotto il segno di integrale, cioè che:

$$\int_0^t g(\theta)\, d\theta := \int_0^t (\lim_{r\to+\infty} g_r(\theta))\, d\theta = \lim_{r\to+\infty}\int_0^t g_r(\theta)\, d\theta.$$

Si ha ora

$$\int_0^t g_(\theta)\, d\theta = \int_0^t \left(\int_{-r}^{r} (i\xi)\widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi\theta}\, d\xi\right) d\theta =$$

(è chiaro che si può scambiare l'ordine di integrazione)

$$\int_{-r}^{r}\left(\int_0^t (i\xi)e^{i\xi\theta}\,d\theta\right)\widehat{f}(\xi)\,d\xi = \int_{-r}^{r}(e^{i\xi t}-e^{i\xi 0})\widehat{f}(\xi)\,d\xi =$$
$$\int_{-r}^{r}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi t}\,d\xi - \int_{-r}^{r}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi 0}\,d\xi;$$

ed è chiaro che si ha, sempre per il teorema di inversione:

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi t}\,d\xi = f(t); \qquad \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi 0}\,d\xi = f(0);$$

la conclusione è raggiunta. □

2.8 Teorema del campionamento

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ tale che $\widehat{f}$ sia a supporto compatto: ogni tale f si dice a *banda limitata*, e la sua *larghezza di banda* è il minimo $b > 0$ tale che sia $\mathrm{Supp}(\widehat{f}) \subseteq [-b, b]$. La funzione $\widehat{f}$ può essere pensata come restrizione a $[-b, b]$ di una funzione in $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$ periodica di periodo $2b$ (essendo $\widehat{f}(-b) = \widehat{f}(b) = 0$ se, il prolungamento in periodo $2b$ è continuo). Se chiamiamo g tale funzione periodica, la sua serie di Fourier in periodo $2b$ converge a g in L^2_{2b}; tale serie di Fourier è

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)e^{in\omega\xi} \qquad \omega = 2\pi/(2b) = \pi/b;$$

La serie di funzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)e^{in\omega\xi}\chi_{[-b,b]}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)e^{in\omega\xi}\,\mathrm{rect}(\xi/(2b)),$$

converge allora in $L^2([-b, b])$, e quindi anche in $L^1([-b, b])$, alla funzione $\widehat{f}$; la serie delle antitrasformate

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\mathcal{F}^{-1}\left(e^{in\omega\xi}\,\mathrm{rect}(\xi/(2b))\right),$$

converge allora sia uniformemente che in $L^2(\mathbb{R})$ all'antitrasformata di $\widehat{f}$ e cioè ad f; chiaramente poi l'antitrasformata di $e^{in\omega\xi}\,\mathrm{rect}(\xi/(2b))$ (si usa qui il fatto che se h è pari allora $\mathcal{F}^{-1}(h) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(h)$) è la traslata di $-n\omega = -\pi n/b$ dell'antitrasformata di $\mathrm{rect}(\xi/(2b))$, che è a sua volta $\frac{1}{2\pi}(2b)\,\mathrm{sinc}(2bt/2) = \frac{b}{\pi}\,\mathrm{sinc}(bt)$; si ha insomma, uniformemente in $\mathbb{R}$ (ed anche in $L^2(\mathbb{R})$):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\frac{b}{\pi}\,\mathrm{sinc}(bt + n\pi);$$

si ha poi (si noti che che $f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$ è continua, anzi è traccia su $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa intera, dato che $\widehat{f}$ è a supporto compatto)

$$c_n(g) = \int_{-b}^{b}\widehat{f}(\xi)e^{-in\omega\xi}\,\frac{d\xi}{2b} = \frac{1}{2b}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{i(-n\frac{\pi}{b})\xi}\,d\xi = 2\pi\frac{f(-n\frac{\pi}{b})}{2b} = \frac{\pi}{b}f(-n\frac{\pi}{b})$$

si ottiene:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n\frac{\pi}{b})\,\mathrm{sinc}(bt + n\pi)$$

e sommando nell'ordine inverso:

. Formula del campionamento (Shannon) *Se* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *è a banda limitata, con larghezza di banda* $b > 0$*, si ha:*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\frac{\pi}{b}) \operatorname{sinc}(bt - n\pi) \qquad \textit{uniformemente in } \mathbb{R}\textit{, ed in } L^2(\mathbb{R}).$$

La dimostrazione è stata fatta sopra. Si osservi che la funzione $\operatorname{sinc}(bt - n\pi)$ vale 1 per $t = n\frac{\pi}{b}$, mentre vale 0 sugli altri punti del tipo $t = m\frac{\pi}{b}$ con $m \neq n$. Il risultato è una formula di interpolazione e dice che f, nelle ipotesi dette, può essere ricostruita dal suo campionamento fatto sui punti $\mathbb{Z}\frac{\pi}{b} = \{\dots, -2\frac{\pi}{b}, -\frac{\pi}{b}, 0, \frac{\pi}{b}, 2\frac{\pi}{b}, \dots\}$; pertanto più larga è la banda di f e più fitto deve essere il campionamento.

2.9 Applicazione: equazioni lineari alle derivate parziali

2.9.1 L'equazione unidimensionale del calore

Rimandando ad Analisi Due, 8.18, per l'impostazione dell'equazione del calore, risolviamo qui con la trasformazione di Fourier il caso della sbarra illimitata; la risoluzione ha carattere euristico, ma si può dimostrare che effettivamente fornisce una soluzione (in molti casi). Il problema è il seguente: risolvere l'equazione alle derivate parziali

$$\partial_t u(x,t) = \kappa\, \partial_x^2 u(x,t), \qquad (\kappa > 0 \text{ costante})$$

dove la funzione incognita $u(x,t)$ è continua in $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, e di classe C^1 in $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$; c'è la condizione iniziale $u(x,0) = u_0(x)$; $u(x,t)$ è la temperatura all'istante t del punto della sbarra che ha ascissa x. Fissato $t > 0$, si trasforma alla Fourier rispetto ad x, ritenendo ciò possibile, si ritiene anche di poter scambiare la trasformata di Fourier con la derivazione rispetto a t, che sia cioè

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x,t)\, e^{-ix\xi}\, dx = \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-ix\xi}\, dx \right) = \partial_t \widehat{u}(\xi, t)$$

A secondo membro la formula per la trasformata della derivata fornisce

$$\mathcal{F}_x \left(\kappa\, \partial_x^2 u(x,t) \right)(\xi) = (i\xi)^2 \kappa\, \widehat{u}(\xi,t) = -\xi^2 \kappa\, \widehat{u}(\xi,t).$$

Trasformando abbiamo quindi ottenuto l'equazione ordinaria (nella variabile indipendente t)

$$\partial_t \widehat{u}(\xi,t) = -\xi^2 \kappa\, \widehat{u}(\xi,t),$$

da integrare con la condizione iniziale $\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi)$, trasformata di Fourier del dato iniziale u_0. L'equazione è lineare del primo ordine ed ha come soluzione

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi)\, e^{-\xi^2 \kappa t}$$

Se $t > 0$, la funzione $x \mapsto e^{-x^2/(4\kappa t)}/(2\sqrt{\pi\kappa t})$ ha come trasformata di Fourier la funzione $\xi \mapsto e^{-\xi^2 \kappa t}$; ne segue

$$u(x,t) = u_0 * e^{-x^2/(4\kappa t)}/(2\sqrt{\pi\kappa t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(s)\, e^{-(x-s)^2/(4\kappa t)}\, ds$$

soluzione di Poisson per l'equazione del calore. Si noti che se si pone $v_t(x) = e^{-x^2/(4\kappa t)}/(2\sqrt{\pi\kappa t})$ si ha $v_t(x) = (1/\sqrt{t}) v_1(x/\sqrt{t})$, e $\int_{\mathbb{R}} v_1(x)\, dx = 1$; per $t \to 0^+$ la famiglia di funzioni v_t è un'unità approssimata.

2.9.2 Equazione delle onde

Sia $c > 0$ fissato. L'equazione unidimensionale delle onde è la seguente equazione alle derivate parziali

$$\partial_x^2 u(x,t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u(x,t) = 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Consideriamo per tale equazione il problema di Cauchy: fissiamo $u_0(x) = u(x,0)$ (posizione iniziale) e $v_0(x) = \partial_t u(x,0)$ (velocità iniziale) e cerchiamo le $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ che verificano l'equazione e queste condizioni iniziali. C'è una risoluzione elementare presentata in Analisi Due, 4.26. Ritroviamo la stessa soluzione servendoci (euristicamente) della trasformazione di Fourier. Poniamo

$$\widehat{u}(\xi,t) = \mathcal{F}_x(u(x,t))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, e^{-i\xi x}\, dx;$$

supponiamo ancora che la derivazione rispetto a t e la trasformata di Fourier rispetto ad x siano permutabili; si ottiene, trasformando l'equazione assegnata:

$$-(\xi^2 c^2)\widehat{u}(\xi,t) - \partial_t^2 \widehat{u}(\xi,t) = 0.$$

Per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ fissato questa è un'equazione lineare del secondo ordine, con t come variabile indipendente, da risolvere con le condizioni iniziali $\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi)$ e $\partial_t\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{v}_0(\xi)$. L'equazione caratteristica è $\zeta^2 = -(\xi^2c^2)$, con soluzioni $\zeta = \pm ic\xi$; le soluzioni sono quindi

$$\widehat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos(ct\xi) + c_2(\xi)\sin(ct\xi);$$

imponendo le condizioni iniziali si trova $c_1(\xi) = \widehat{u}_0(\xi)$ e $c_2(\xi) = \widehat{v}_0(\xi)/(c\xi)$ per cui

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi)\cos(ct\xi) + t\widehat{v}_0(\xi)\,\mathrm{sinc}(2ct\xi);$$

ora antitrasformando:

$$\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\widehat{u}_0(\xi)\cos(ct\xi)\right) = \frac{1}{2}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\widehat{u}_0(\xi)e^{ict\xi} + \widehat{u}_0(\xi)e^{-ict\xi}\right) = \frac{u_0(x+ct)+u_0(x-ct)}{2};$$

La funzione $\xi \mapsto t\,\mathrm{sinc}(2ct\xi)$ si antitrasforma in $\mathrm{rect}(x/(2ct))/(2c)$; pertanto

$$\mathcal{F}_\xi^{-1}(t\widehat{v}_0(\xi)\,\mathrm{sinc}(2ct\pi\xi) = \frac{1}{2c}v_0 * \mathrm{rect}(\#/(2ct)).$$

La soluzione trovata è quindi (si osservi che $\mathrm{rect}(x-\theta)/(2ct))$ è la funzione caratteristica dell'intervallo di estremi $x-ct, x+ct$):

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+ct)+u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{\theta=x-ct}^{\theta=x+ct} v_0(\theta)\, d\theta,$$

che è esattamente la soluzione data da d'Alembert per l'equazione delle onde.

2.10 Altre definizioni della trasformazione di Fourier

La trasformazione di Fourier è essenzialmente unica, ma ha comunque varie definizioni tra loro vicine. Ogni trasformazione di Fourier che si incontra è della forma

$$\Phi f(\nu) = \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ip\nu x}\, dx,$$

dove p, h sono costanti reali non nulle. Definita in questo modo, essa non è in generale unitaria su $L^2(\mathbb{R})$, e la trasformata della convoluzione non è il prodotto puntuale delle trasformate, solo proporzionale ad esso mediante il fattore h. Si ha comunque $\Phi f(\nu) = \mathcal{F}f(p\nu)/h$; di qui è facile dedurre la formula di inversione per Φ: essendo, per $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)e^{i\xi t}\, d\xi$, basta porre in tale integrale $\xi = p\nu$; si ottiene

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(p\nu)e^{ip\nu t}\frac{|p|}{2\pi}\, d\nu = \frac{|p|h}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Phi f(\nu)e^{ip\nu t}\, d\nu,$$

da cui la

$$\text{Se } \Phi f := \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ip\nu x}\, dx \in L^1(\mathbb{R}), \ \text{ allora } \quad f(x) = \frac{|p|h}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Phi f(\nu)e^{ip\nu x}\, d\nu.$$

Formula di inversione

Dedichiamo un rapidissimo cenno alla trasformazione di Fourier in più variabili; essa è definita, per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, come

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(\xi|x)}\, dx, \quad \text{inversione } \mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{i(x|\xi)}\, d\xi$$

dove $(\xi|x)$ è il solito prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Vale ancora il teorema di Plancherel. Inoltre

Proposizione 2.24. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, e per un $m \in \mathbb{N}$ si ha che $x \mapsto (1+|x|)^m|f(x)|$ sta in $L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\widehat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$, e per ogni multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ di grado non maggiore di m si ha*

$$\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = ((-i\#)^\alpha)f)\widehat{\ }(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\alpha f(x) e^{-i(\xi|x)}\, dx.$$

come facilmente si vede derivando sotto il segno di integrale. L'integrazione per parti mostra poi che si ha:

Proposizione 2.25. *Se $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, ed $m \in \mathbb{N}$ è tale che $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni multiindice α di grado non maggiore di m, allora*

$$(\partial^\alpha f)\widehat{\ }(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Ci limitiamo a provare l'importante fatto seguente

Proposizione 2.26. *Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è lineare ed invertibile, ed $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f \circ T$ ha per trasformata di Fourier $\widehat{f}((T^{-1})^*\xi)/|\det T|$. Di conseguenza la trasformata di Fourier di una funzione a simmetria sferica è ancora a simmetria sferica ($(T^{-1})^*$ è la trasposta di T^{-1}).*

Dimostrazione. Nell'integrale che definisce $\widehat{f} \circ T$ si fa il cambiamento di variabili $y = T\,x$:

$$\widehat{(f \circ T)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(T\,x) e^{-i(\xi|x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(\xi|T^{-1}y)} |\det T^{-1}|\, dy =$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i((T^{-1})^*\xi|y)} |\det T^{-1}|\, dy = \frac{\widehat{f}((T^{-1})^*\xi)}{|\det T|}.$$

□

2.11 Esercizi ricapitolativi

Esercizio 2.15. Vogliamo trovare una soluzione del seguente *problema di Dirichlet*: trovare una funzione $u(x,y)$ che sia armonica nel semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e sia tale che $u(x,0) = f(x)$, dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è assegnata. Cerchiamo cioè una soluzione dell'equazione $\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0$, per $y > 0$, con $u(x,0) = f(x)$.

(i) Trasformando alla Fourier rispetto ad x per $y > 0$ trovare un'equazione ordinaria per $\widehat{u}(\xi, y)$.

(ii) Risolvere l'equazione trovata in (i), supponendo che $x \mapsto u(x,y)$ sia in $L^1(\mathbb{R})$ per ogni $y > 0$, ed anche che sia $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(iii) Antitrasformare e trovare una formula integrale per la soluzione.

(iv) Trovare una formula senza integrali per la soluzione nel caso $f = \chi_{[-1,1]}$.

(v) [Extra] Come si potrebbe procedere per dimostrare che quella trovata in (iii) è effettivamente una soluzione dell'equazione data?

Risoluzione. (i) Si trova

$$(i\xi)^2 \widehat{u}(\xi,y) + \partial_y^2 \widehat{u}(\xi,y) = 0 \quad \text{cioè} \quad \partial_y^2 \widehat{u}(\xi,y) - \xi^2 \widehat{u}(\xi,y) = 0.$$

Si tratta di un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti; conviene scrivere la soluzione generale come

$$\widehat{u}(\xi,y) = c_1(\xi) e^{|\xi|y} + c_2(\xi) e^{-|\xi|y}$$

[Nota: chiaramente per ogni ξ fissato, per ogni c_1, c_2 esistono c_1' e c_2' tali che $c_1(\xi)e^{\xi y} + c_2(\xi)e^{-\xi y} = c_1'(\xi)e^{|\xi|y} + c_2'(\xi)e^{-|\xi|y}$; non esistono invece delle costanti c_1' e c_2' tali che l'uguaglianza precedente valga per ogni ξ] dato che deve essere $\lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{u}(\xi,y) = 0$ deve essere $c_1(\xi) = 0$; imponendo la condizione iniziale si trova $c_2(\xi) = \widehat{f}(\xi)$; in definitiva

$$\widehat{u}(\xi,y) = \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}.$$

[Nota: avessimo scelto di scrivere $\widehat{u}(\xi, y) = c_1(\xi)e^{\xi y} + c_2(\xi)e^{-\xi y}$ non avremmo trovato soluzione]

Abbiamo risposto anche ad (ii).

(iii) Si noti che $\xi \mapsto e^{-|\xi|y}$ è la trasformata di Fourier di $(1/\pi)y/(x^2+y^2)$, se $y > 0$; antitrasformando si trova quindi

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)\,du}{(x-u)^2+y^2}.$$

(iv) Se $f = \chi_{[-1,1]}$ si ha

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{du}{(x-u)^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{du/y}{1+((u-x)/y)^2} = \frac{\arctan((x+1)/y) - \arctan((x-1)/y)}{\pi}.$$

(v) Il metodo è quello di derivare sotto il segno di integrale per due volte. Si può osservare che la funzione

$$(x, y) \mapsto \frac{y}{(x-u)^2+y^2}$$

è armonica nelle variabili (x, y), qualunque sia il parametro $u \in \mathbb{R}$ fissato (infatti $(x, y) \mapsto y/(x^2 + y^2)$ è, a meno del segno, la parte immaginaria di $1/(x + iy)$). Se è possibile derivare due volte sotto il segno di integrale la convoluzione risulta allora armonica. Per la derivata rispetto ad x dell'integrando; essa è

$$\frac{1}{\pi}\frac{-2y(x-u)f(u)}{((x-u)^2+y^2)^2};$$

una maggiorazione che mostra l'applicabilità del teorema di derivazione sotto il segno di integrale è ad esempio (presi α, β con $\alpha > |x|$ e $0 < \beta < y$):

$$\left|\frac{-2y(x-u)f(u)}{((x-u)^2+y^2)^2}\right| \le \frac{2|y|\,|x-u|}{((x-u)^2+y^2)^2} \le \frac{1}{(x-u)^2+y^2} \le \frac{1}{(\alpha+|u|^2)+\beta^2},$$

maggiorazione valida per $|x| < \alpha$ e $y > \beta$; similmente per y, se $\gamma > y$ si ha

$$\left|\frac{-2y}{((x-u)^2+y^2)^2}\right| \le \frac{2\gamma}{((\alpha+|u|^2)+\beta^2)^2} \qquad \text{valida per} \qquad |x| < \alpha,\ \beta < y < \gamma;$$

e si intuisce che la cosa si può fare anche per le derivate di ordine superiore.

Diverso e un poco più complicato è il discorso sulla saldatura continua al dato iniziale quando questo è continuo. Esso deriva dal fatto che il nucleo di convoluzione è unità approssimata per $y \to 0^+$, ma non lo facciamo. □

Esercizio 2.16. Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ sono definite due funzioni:

$$Af(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\xi t)\,dt; \qquad Bf(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\xi t)\,dt,$$

che sono dette rispettivamente *cosen–trasformata e sin–trasformata* di Fourier di f. Dopo aver osservato che Af è sempre pari e Bf è sempre dispari (ovvio, accettarlo), dimostrare, usando il teorema di inversione:

. Formula di inversione, forma reale *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è tale che Af, $Bf \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \in C_0(\mathbb{R})$, e si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}$:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (Af(\xi)\cos(\xi t) + Bf(\xi)\sin(\xi t))\,d\xi.$$

Risoluzione. Osserviamo che si ha

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)(\cos(\xi t) - i\sin(\xi t))\,dt = Af(\xi) - iBf(\xi);$$

da ciò si deduce che se Af, Bf stanno in $L^1(\mathbb{R})$ allora anche $\widehat{f}$ sta in $L^1(\mathbb{R})$. Ne segue che $f \in C_0(\mathbb{R})$, e che si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi t}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (Af(\xi) - iBf(\xi))(\cos(\xi t) + i\sin(\xi t))\,d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(Af(\xi)\cos(\xi t)+Bf(\xi)\sin(\xi t))\,d\xi+i\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(Af(\xi)\sin(\xi t)-Bf(\xi)\cos(\xi t))\,d\xi;$$

per disparità si ha

$$\int_{\mathbb{R}}Af(\xi)\sin(2\pi\xi t)\,d\xi=\int_{\mathbb{R}}Bf(\xi)\cos(2\pi\xi t)\,d\xi=0,$$

e la conclusione è raggiunta.

□

Esercizio 2.17. Sapendo che è

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{\sinh x}\,dx=i\pi\tanh(\alpha\pi/2)\qquad(\alpha\in\mathbb{R}),$$

calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(t)=t/\sinh t$ (integrare $g(z)=ze^{i\alpha z}/\sinh z$ sui rettangoli di vertici $r, r+i\pi, -r+i\pi, -r$, indentati se occorre; accettare il fatto che sui lati verticali l'integrale tenda a zero). Dedurne il valore dell'integrale $\int_{\mathbb{R}}(t^3/\sinh t)\,dt$.

Risoluzione. (Schematica) $\sinh z=0$ per $z=k\pi i$; si indenta il rettangolo in $i\pi$ con un piccolo semicerchio $\sigma_s(\vartheta)=i\pi+se^{i\vartheta}$, $\vartheta\in[\pi,2\pi]$; si ottiene

$$\begin{aligned}&\int_{-r}^{r}\frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x}-\int_{[-r,r]\setminus]-s,s[}\frac{(x+i\pi)e^{i\alpha(x+i\pi)}}{\sinh(x+i\pi)}\,dx\\&-\int_{\sigma_s}\frac{ze^{i\alpha z}}{\sinh z}\,dz+\varepsilon(r)=0\end{aligned}$$

Si ha

$$\frac{(x+i\pi)e^{i\alpha(x+i\pi)}}{\sinh(x+i\pi)}=-e^{-\alpha\pi}\frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x}-i\pi e^{-\alpha\pi}\frac{e^{i\alpha x}}{\sinh x}$$

per cui quanto sopra si riscrive

$$\begin{aligned}&\int_{-r}^{r}\frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x}\,dx+e^{-\alpha\pi}\int_{[-r,r]\setminus]-s,s[}\frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x}\,dx+i\pi e^{-\alpha\pi}\int_{[-r,r]\setminus]-s,s[}\frac{e^{i\alpha x}}{\sinh x}\,dx\\&-\int_{\sigma_s}\frac{ze^{i\alpha z}}{\sinh z}\,dz+\varepsilon(r)=0\end{aligned}$$

per il lemma del cerchio piccolo l'integrale su σ_s tende, per $s\to 0^+$, a $i\pi\,\mathrm{Res}(f,i\pi)=i\pi(i\pi)e^{-\alpha\pi}/(-1)=\pi^2e^{-\alpha\pi}$; si ottiene

$$(1+e^{-\alpha\pi})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x}\,dx-\pi^2e^{-\alpha\pi}\tanh(\alpha\pi/2)=\pi^2e^{-\alpha\pi}$$

ed infine

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x}\,dx=&\pi^2e^{-\alpha\pi}\left(\frac{1-e^{-\alpha\pi}}{(1+e^{-\alpha\pi})^2}+\frac{1}{1+e^{-\alpha\pi}}\right)=\pi^2e^{-\alpha\pi}\frac{2}{(1+e^{-\alpha\pi})^2}=\\&\pi^2\frac{2}{(e^{\alpha\pi/2}+e^{-\alpha\pi/2})^2}=\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{\cosh^2(\alpha\pi/2)}\end{aligned}$$

□

Tabella di Trasformate di Fourier

Funzione $f(t)$	$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t}\,dt$	$\Phi f(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt$
$\operatorname{rect}(t) := \chi_{]-1/2,1/2[}$	$\operatorname{sinc}(\xi/2) = \dfrac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}$	$\operatorname{sinc}(\nu\pi) = \dfrac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$
$(1-\lvert t\rvert)\vee 0$	$\operatorname{sinc}^2(\dfrac{\xi}{2}) = \dfrac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}$	$\operatorname{sinc}^2(\nu\pi)$
$(a>0)$ e^{-at^2}	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\xi^2/(4a)}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\nu^2/a}$
$(a>0)$ $\dfrac{1}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{a}e^{-a\lvert\xi\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2+(2\pi\nu)^2}$
$(a>0)$ $e^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2+(\xi)^2}$	$\dfrac{2a/h}{a^2+(p\nu)^2}$

Traslazioni diventano moltiplicazioni per caratteri:

$\tau_a f(t) = f(t-a)$	$e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi)$	$e^{-2\pi i a\nu}$

Moltiplicazioni per caratteri diventano traslazioni:

$(a\in\mathbb{R})$ $e^{iat}f(t)$	$\tau_a\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}f(\xi-a)$	$\tau_{a/(2\pi)}\Phi f(\nu) = \Phi f(\nu - a/(2\pi))$

Derivata della trasformata (ovvero trasformata della moltiplicazione per t):

$tf(t)$	$i\partial_\xi\mathcal{F}f(\xi)$	$\dfrac{1}{-2\pi i}\partial_\nu\Phi f(\nu)$

Trasformata della derivata

$\partial_t f(t) = f'(t)$	$(i\xi)\mathcal{F}f(\xi)$	$(2\pi i\nu)\Phi f(\nu)$

Distribuzioni

δ	1	1
1	$2\pi\delta$	δ
$\delta_{(a)}$	$e^{-ia\#}$	$e^{-2\pi i a\#}$
$(a\in\mathbb{R})$ e^{iat}	$2\pi\delta_a$	$\delta_{(a/2\pi)}$
H	$\dfrac{1}{i}\,\mathrm{v.p.}(1/\xi) + \pi\delta$	$\dfrac{1}{2\pi i}\,\mathrm{v.p.}(1/\nu) + \dfrac{\delta}{2}$
sgn	$\dfrac{2}{i}\,\mathrm{v.p.}\,\dfrac{1}{\xi}$	$\dfrac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.p.}\,\dfrac{1}{\nu}$

Formula di Plancherel

	$\lVert\mathcal{F}f\rVert_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi\lVert f\rVert_{L^2(\mathbb{R})}$	$\lVert\Phi f\rVert_{L^2(\mathbb{R})} = \lVert f\rVert_{L^2(\mathbb{R})}$

Antitrasformata

Funzione $f(t)$	$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\xi t}\,dt$	$\Phi^{-1}f(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{2\pi i\nu t}\,dt$

Capitolo 3

Trasformazione di Laplace classica

3.1 Introduzione e definizioni

La trasformazione di Laplace è uno strumento tradizionale e di uso costante nella risoluzione di equazioni differenziali lineari. Essa si presta anche alla risoluzione di numerosi problemi di altro genere, purché in essi la linearità giochi un ruolo importante.

La trasformazione (nell'ambito classico, dal quale cominciamo) si applica a funzioni localmente sommabili a valori complessi definite su $\mathbb{R}$, il cui supporto sia contenuto nella semiretta $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ dei numeri reali positivi o nulli. Lo spazio di tali funzioni (definite al solito a meno dell'uguaglianza quasi ovunque) si indica con $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Anche qui, chi non conosce l'integrale di Lebesgue è invitato a pensare ad $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ come all'insieme delle funzioni che sono assolutamente integrabili secondo Riemann su ogni intervallo compatto, e sono identicamente nulle su $]-\infty, 0[$; l'uguaglianza quasi ovunque (abbreviata in q.o.) può essere pensata come uguaglianza su ogni punto, eccetto un insieme al più numerabile; agli effetti pratici, non si perde nulla.

Definizione. Una funzione $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ si dice *assolutamente trasformabile secondo Laplace*, abbreviato in assolutamente $L-$trasformabile, se esiste $s \in \mathbb{C}$ tale che $e^{-st}f(t)$ sia sommabile su $\mathbb{R}$ (stia cioè in $L^1(\mathbb{R})$).

Ovviamente $t \mapsto e^{-st}f(t)$ sta in $L^1(\mathbb{R})$ se e solo se il suo modulo $t \mapsto |e^{-st}f(t)| = |e^{-st}||f(t)| = e^{-(\mathrm{Re}\, s)t}|f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$. È ovvio che se $t \mapsto e^{-st}f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, e $\sigma \in \mathbb{C}$ è tale che $\mathrm{Re}\,\sigma \geq \mathrm{Re}\, s$ allora si ha anche $t \mapsto e^{-\sigma t}f(t) \in L^1(\mathbb{R})$; ciò è dovuto al fatto che le funzioni sono identicamente nulle per $t < 0$; si ha quindi $|e^{-st}| \geq |e^{-\sigma t}|$ per $t \geq 0$, se $\mathrm{Re}\,\sigma \geq \mathrm{Re}\, s$, quindi anche $|e^{-st}||f(t)| \geq |e^{-\sigma t}||f(t)|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, essendo $f(t) = 0$ per $t < 0$. Da ciò segue subito:

Proposizione 3.1. *Sia $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ assolutamente $L-$trasformabile. L'insieme*

$$S(f) = \{s \in \mathbb{C} : t \mapsto e^{-st}f(t) \in L^1(\mathbb{R}),$$

detto insieme di convergenza assoluta *della trasformata di Laplace di f è un semipiano, aperto oppure chiuso, della forma*

$$S(f) = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, s > \rho(f)\} \quad \textit{oppure} \quad S(f) = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, s \geq \rho(f)\}$$

dove $\rho(f)$, chiamato ascissa di convergenza assoluta *della trasformata di Laplace di f è, per definizione*

$$\rho(f) = \inf\{p \in \mathbb{R} : t \mapsto e^{-pt}f(t) \in L^1(\mathbb{R})\}.$$

Dimostrazione. Immediata: se $\mathrm{Re}\, s > \rho(f)$ esiste $p \in \mathbb{R}$ tale che $p < \mathrm{Re}\, s$, ma $e^{-pt}f(t) \in L^1(\mathbb{R})$; come sopra osservato è allora anche $e^{-st}f(t) \in L^1(\mathbb{R})$; se $\mathrm{Re}\, s = p_0 < \rho(f)$, $e^{-p_0 t}f(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, per definizione di $\rho(f)$, ma allora anche $e^{-st}f(t) \notin L^1(\mathbb{R})$. Vari esempi successivi mostreranno che il semipiano può essere aperto oppure chiuso. $\square$

Osservazione 5. L'ascissa di convergenza può essere $-\infty$, come ad esempio accade per ogni funzione a supporto compatto, ad esempio ogni funzione caratteristica di intervallo limitato $\chi_{]a,b[}$, con $0 \le a < b$, od ogni funzione che decresca in modo sufficientemente rapido a $+\infty$, come ad esempio $t \mapsto H(t)e^{-t^2}$ (gaussiana). In tal caso ovviamente il semipiano di convergenza assoluta è l'intero piano. All'estremo opposto si può dire che le funzioni non trasformabili abbiano ascissa di convergenza $+\infty$. Una tipica funzione non trasformabile è ad esempio $t \mapsto H(t)e^{t^2}$ (è ovvio che e^{-st+t^2} tende in modulo a $+\infty$ per $t \to +\infty$ qualunque sia $s \in \mathbb{C}$, e quindi tale funzione non è mai sommabile su $[0, +\infty[$).

La definizione di trasformabilità e di trasformata conserva il suo significato anche se f non necessariamente è nulla su $]-\infty, 0[$. In tal caso l'insieme di convergenza assoluta dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-st} f(t)\, dt$ non è un semipiano illimitato a destra, ma piuttosto una *striscia* di convergenza assoluta (l'insieme, se non è vuoto e non si riduce ad una retta parallela all'asse immaginario contiene sempre una striscia aperta $\{s \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re} s < \beta\}$, con $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, anzi ha come interno una striscia siffatta, ed è contenuto nella chiusura di essa). Tale caso ha pure interesse, ma noi ci limiteremo al caso di funzioni con il supporto contenuto in $[0, +\infty[$.

Definizione. Sul semipiano aperto di convergenza assoluta resta definita una funzione

$$\Lambda f(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-st}\, dt$$

chiamata *trasformata secondo Laplace di f*. Diremo che f è un *originale di Laplace* di h se $\Lambda f = h$ su un semipiano $\operatorname{Re} s \ge a$; vedremo che f, se esiste, è unica.

Esempio 3.1. La funzione di Heaviside $H = \chi_{\mathbb{R}_+}$ ha 0 come ascissa di convergenza assoluta. Infatti, posto $p = \operatorname{Re} s$, la funzione $|e^{-st}H(t)| = e^{-pt}$ se $t \ge 0$, 0 se $t < 0$, è in $L^1(\mathbb{R})$ se e solo se $p > 0$. Il semipiano di convergenza assoluta è quindi quello delle parti reali strettamente positive; si ha infatti, supposto $s \ne 0$:

$$\Lambda H(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-st} H(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=r} = \lim_{r\to+\infty} \frac{1-e^{-sr}}{s}.$$

Ora, il limite $\lim_{r\to+\infty} e^{-sr}$ esiste finito, per $s \ne 0$, se e solo se $\operatorname{Re} s > 0$, nel qual caso è nullo; se $\operatorname{Re} s > 0$ si ha infatti $|e^{-sr}| = e^{-\operatorname{Re}(sr)} = e^{-(\operatorname{Re} s)r}$, che tende a zero se $\operatorname{Re} s > 0$, a $+\infty$ se $\operatorname{Re} s < 0$. Se $\operatorname{Re} s = 0$, ma $\omega = \operatorname{Im} s \ne 0$, il limite non esiste ($e^{-i\omega r}$ assume, al variare di r in ogni intorno di $+\infty$, tutti i valori di modulo 1). Ne segue che l'integrale è semplicemente convergente se e solo se $\operatorname{Re} s > 0$; per tali valori è anche assolutamente convergente, essendo $|e^{-st}| = e^{-pt}$ se $p = \operatorname{Re} s$. Si è anche visto che la trasformata è

$$\Lambda H(s) = \frac{1}{s} \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$

3.1.1 Tendenza a zero all'infinito

Il lemma di Riemann–Lebesgue ha la seguente versione per le trasformate di Laplace.

Proposizione 3.2. *Sia $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, e sia $a \in S(f)$, a reale, nel semipiano di convergenza assoluta di f. Si ha allora:*

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ \operatorname{Re} s \ge a}} \Lambda f(s) = 0.$$

Dimostrazione. Anzitutto, moltiplicando f per e^{-at}, ci si riconduce ad $a = 0$ ed $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. La dimostrazione procede poi come nel lemma di Riemann–Lebesgue; se g è di classe $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto, integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\Lambda g(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-st}\, dt = \left[-g(t)\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)e^{-st}\, dt \\ &= \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)e^{-st}\, dt\end{aligned}$$

che tende a 0 per $s \to +\infty$. Fissato poi $\varepsilon > 0$ sia $g \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ tale che sia

$$\|f - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|\, dt \le \varepsilon;$$

si ha allora, per $\operatorname{Re} s \geq 0$:

$$|\Lambda f(s)| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-st} f(t)\,dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-st}(f(t)-g(t)+g(t))\,dt\right| \leq$$
$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-st}(f(t)-g(t))\,dt\right| + \left|\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-st}||f(t)-g(t)|\,dt + |\Lambda g(s)| =$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}|f(t)-g(t)|\,dt + |\Lambda g(s)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)-g(t)|\,dt + |\Lambda g(s)|,$$

avendo posto $p = \operatorname{Re} s$, ed osservato che $e^{-pt} \leq 1$ se $p, t \geq 0$. Ne segue

$$|\Lambda f(s)| \leq \varepsilon + |\Lambda g(s)|$$

e la dimostrazione è terminata. □

3.1.2 Olomorfia della trasformata di Laplace

Il risultato che segue è di fondamentale importanza.

Teorema 3.3. *All'interno del semipiano di convergenza assoluta la trasformata di Laplace di una funzione assolutamente $L-$trasformabile è olomorfa, e la derivata di $\Lambda f(s)$ si ottiene derivando rispetto ad s sotto il segno di integrale:*

$$(\Lambda f)'(s) = \int_0^{+\infty} (-t) f(t) e^{-st}\,dt \qquad \operatorname{Re} s > \rho(f).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è un'applicazione del teorema di derivazione per integrali dipendenti da parametri (Analisi Due, 9.22.2(ii)) e quindi in ultima analisi è conseguenza del teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Basta osservare che se $\operatorname{Re} s > \rho(f)$, preso $a \in \mathbb{R}$, con $\rho(f) < a < \operatorname{Re} s$, si ha $|(-t)f(t)e^{-st}| \leq te^{-at}|f(t)|$ per $t \geq 0$ e $\operatorname{Re} s > a$, e che $t \mapsto te^{-at}|f(t)|$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R}_+)$, dato che $a > \rho(f)$ (preso b, con $\rho(f) < b < a$, te^{-at} è o piccolo di e^{-bt} per $t \to +\infty$, e quindi esiste una costante K tale che sia $te^{-at} \leq Ke^{-bt}$). □

Osservazione 6. L'ascissa di convergenza di $t \mapsto tf(t)$ coincide con quella di f, come sopra visto.

Corollario 3.4. *Se f è assolutamente $L-$trasformabile si ha*

$$(\Lambda f)^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} (-t)^n f(t) e^{-st}\,dt \quad \operatorname{Re} s > \rho(f),\ n = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

Dimostrazione. Ovvia. □

Esercizio 3.1. Calcolare, usando quanto sopra, la trasformata di Laplace di $t \mapsto t^n H(t)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sapendo che $\Lambda H(s) = 1/s$.

Risoluzione.

$$\Lambda(\#)H(s) = -\frac{d\Lambda H}{ds}(s) = -\frac{d(1/s)}{ds} = \frac{1}{s^2}; \quad \Lambda(\#)^2 H(s) = \frac{d^2(1/s)}{ds^2} = \frac{d(-1/s^2)}{ds} = \frac{2}{s^3};$$

ed in generale

$$\Lambda(\#)^n H(s) = (-1)^n \frac{d^n(1/s)}{ds^n} = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

come è immediato vedere per induzione. □

Esercizio 3.2. In generale, data la funzione potenza $t \mapsto t^\alpha$, considerata nulla per $t < 0$ (la determinazione è quella principale, $t^\alpha := \exp(\alpha \log t)$), essa è localmente sommabile in $[0, +\infty[$ se e solo se $\operatorname{Re} \alpha > -1$; calcolarne la trasformata di Laplace.

Risoluzione. La funzione ha ascissa di convergenza assoluta nulla, come è facile intuire, e si ha, supposto s reale, $s > 0$

$$\Lambda(\#)^\alpha H(s) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st}\, dt = (\text{posto } st = u) = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{s^\alpha} e^{-u} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^{\alpha+1-1} e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Tale formula, provata per s reale > 0, vale anche per s complesso con $\operatorname{Re} s > 0$ per il principio di identità delle funzioni olomorfe. □

Esempio 3.2. La funzione $f : t \mapsto H(t)/(1 + t^2)$ ha ancora 0 come ascissa di convergenza assoluta (la verifica è facile); stavolta il semipiano di convergenza è chiuso, dato che la funzione $1/(1+t^2)$ è sommabile su $[0, +\infty[$. La trasformata di Laplace non è esprimibile con funzioni elementari; in ogni caso osserviamo che per $\operatorname{Re} s = 0$, cioè $s = i\omega$ si ha

$$\Lambda f(i\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+t^2}\, dt - i \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{1+t^2}\, dt =$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+t^2}\, dt - i \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} e^{-|\omega|} - i \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{1+t^2}\, dt$$

(la parte reale è un classico calcolo con il teorema dei residui). Si noti che quindi la funzione non è olomorfa su tutto il semipiano chiuso: la sua parte reale sull'asse immaginario non è parte reale di alcuna funzione olomorfa.

3.1.3 Linearità della trasformazione di Laplace

Si vede subito che

Proposizione 3.5. *Se $f, g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ sono assolutamente $L-$trasformabili, tali sono $f + g$ ed αf, per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{C}$; si ha inoltre $\rho(f + g) \le \max\{\rho(f), \rho(g)\}$ e*

$$\Lambda(f+g)(s) = \Lambda f(s) + \Lambda g(s) \quad \operatorname{Re} s > \max\{\rho(f), \rho(g)\}; \quad \lambda(\alpha f)(s) = \alpha \Lambda f(s) \quad \operatorname{Re} s > \rho(f).$$

Dimostrazione. Ovvia. □

3.1.4 Traslazione della trasformata

Si ha il seguente utile fatto:

Proposizione 3.6. *Se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ è assolutamente $L-$trasformabile, e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora $t \mapsto e^{\lambda t} f(t)$ è assolutamente $L-$trasformabile, si ha $\rho(e^{\lambda \#} f(\#)) = \operatorname{Re}\lambda + \rho(f)$ e si ha*

$$\Lambda(e^{\lambda\#} f(\#))s = \Lambda f(s-\lambda) \qquad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re}\lambda + \rho(f).$$

Dimostrazione. Essendo $e^{\lambda t} e^{-st} f(t) = e^{-(s-\lambda)t} f(t)$, posto $\sigma = s - \lambda$, la funzione $t \mapsto e^{-\sigma t} f(t)$ sta in L^1 se e solo se $\sigma \in S(f)$, cioè se e solo se $s \in \lambda + S(f)$; il resto è ovvio. □

Si ricorda dicendo: moltiplicazioni per esponenziali diventano traslazioni.

Esercizio 3.3. Come applicazione, trovare le trasformate di

$$H(t)\cos(\omega t); \quad H(t)\sin(\omega t); \quad H(t)\cosh(\omega t); \quad H(t)\sinh(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{C}).$$

Risoluzione. Si ha $H(t)\cos(\omega t) = \dfrac{H(t)e^{i\omega t} + H(t)e^{-i\omega t}}{2}$; per linearità si ha quindi

$$\Lambda H(t)\cos(\omega t)(s) = \frac{1}{2}\left(\Lambda H(t)e^{i\omega t} + \Lambda H(t)e^{-i\omega t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2};$$

l'ascissa di convergenza è $\geq \max\{\operatorname{Re}(i\omega), -\operatorname{Re}(i\omega)\} = |\operatorname{Im}\omega|$, ed è facile vedere che effettivamente vale proprio $|\operatorname{Im}\omega|$. Similmente

$$\Lambda H(t)\sin(\omega t)(s) = \frac{1}{2i}\left(\Lambda H(t)e^{i\omega t} - \Lambda H(t)e^{-i\omega t}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

per $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im}\omega|$. Si ha poi

$$\Lambda H(t)\cosh(\omega t)(s) = \frac{1}{2}\left(\Lambda H(t)e^{\omega t} + \Lambda H(t)e^{-\omega t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{s}{s^2-\omega^2},$$

nonché

$$\Lambda H(t)\sinh(\omega t)(s) = \frac{1}{2i}\left(\Lambda H(t)e^{\omega t} - \Lambda H(t)e^{-\omega t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2},$$

entrambi per $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Re}\omega|$. □

3.1.5 Trasformata della traslata

Proposizione 3.7. *Sia $a > 0$, e sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ assolutamente $L-$trasformabile. Allora $\tau_a f$, traslata di f mediante a, appartiene ancora ad $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, ha lo stesso semipiano di convergenza di f, e si ha*

$$\Lambda\tau_a f(s) = e^{-as}\Lambda f(s) \qquad \textit{per ogni} \quad s \in S(f).$$

(traslazioni diventano moltiplicazioni per esponenziali).

Dimostrazione. Si ha, per definizione di trasformata

$$\Lambda\tau_a f(s) = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(t)e^{-st}\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-a)e^{-st}\,dt =$$

(posto $t - a = \vartheta$)

$$\int_{\mathbb{R}} f(\vartheta)e^{-s(a+\vartheta)}\,d\vartheta = \int_{\mathbb{R}} e^{-as}f(\vartheta)e^{-s\vartheta}\,d\vartheta = e^{-as}\Lambda f(s).$$

Insomma: la proprietà detta non è in fondo altro che l'invarianza per traslazioni dell'integrale. □

Esercizio 3.4. Applicare quanto sopra per trovare la trasformata della funzione caratteristica $\chi_{]a,b[}$ dell'intervallo $]a,b[$, $0 \leq a < b$, scrivendo tale funzione come $\tau_a H - \tau_b H$; controllare poi il risultato con un calcolo diretto.

Risoluzione. Si ha, applicando i suggerimenti:

$$\Lambda(\tau_a H - \tau_b H)s = \Lambda\tau_a H(s) - \Lambda\tau_b H(s) = \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s} = \frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}.$$

Direttamente:

$$\Lambda\chi_{]a,b[}(s) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{]a,b[}(t)e^{-st}\,dt = \int_a^b e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=a}^{t=b} = \frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s},$$

□

Osservazione 7. Traslando a sinistra una $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ in generale si esce da $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, come è ovvio. Ma la formula precedente vale anche con $a < 0$ nell'ambito delle trasformate di Laplace bilatere.

3.1.6 Cambio scala

Il comportamento ripetto alle omotetie di rapporto positivo sul dominio è dato da

Proposizione 3.8. *Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ assolutamente $L-$trasformabile; sia $\lambda > 0$. Allora $t \mapsto f(\lambda t)$ è assolutamente $L-$trasformabile con ascissa di convergenza assoluta pari a $\lambda\rho(f)$, e si ha*

$$\Lambda f(\lambda\#)(s) = \frac{1}{\lambda}\Lambda f(s/\lambda) \qquad \operatorname{Re} s > \lambda\rho(f).$$

Dimostrazione. Esercizio. $\square$

3.2 Convoluzione

Si ricorda che la convoluzione di f, g è definita come $f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta$ quando questo integrale ha senso. Se una delle funzioni sta in $L^1(\mathbb{R})$ ed ha il supporto compatto, mentre l'altra sta in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, allora $f*g$ esiste e sta in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (questo segue dal fatto che la convoluzione di due funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ esiste e sta in $L^1(\mathbb{R})$). Un altro caso è quello di $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$; infatti in tal caso $\int_{\mathbb{R}} f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta$ diventa $\int_0^{+\infty} f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta$ (perché $g(\theta) = 0$ se $\theta < 0$) e questo a sua volta coincide con $\int_0^t f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta\,d\theta$ (perché $f(t-\theta) = 0$ se $t - \theta < 0$, cioè se $\theta > t$).

Una non difficile applicazione del teorema di Fubini–Tonelli mostra che $f * g$ è definita q.o. su $\mathbb{R}$ dalla formula precedente, ed appartiene a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, che pertanto è un'algebra di convoluzione, la convoluzione di due suoi membri è ancora una funzione di $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. La trasformazione di Laplace ha un ottimo comportamento riguardo alla convoluzione, come ora vediamo.

Proposizione 3.9. *Siano $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ assolutamente $L-$trasformabili. Allora $f * g(t) = \int_0^t f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta$ è assolutamente $L-$trasformabile, con ascissa $\rho(f*g) \le \max\{\rho(f), \rho(g)\}$, e si ha*

$$\Lambda(f*g)s = \Lambda f(s)\Lambda g(s) \qquad \operatorname{Re} s > \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$$

Dimostrazione. Sia $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \max\{\rho(f), \rho(g)\}$. Si deve provare che si ha

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-st}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta\right)dt = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-st_1} f(t_1)\,dt_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-st_2} g(t_2)\,dt_2\right).$$

Applichiamo il teorema di Tonelli alla funzione $(t,\theta) \mapsto e^{-st} f(t-\theta)g(\theta) = e^{-s(t-\theta)} f(t-\theta)e^{-s\theta}g(\theta)$ di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{C}$; si ha, se $p = \operatorname{Re} s$:

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |e^{-s(t-\theta)} f(t-\theta)e^{-s\theta}g(\theta)|\,dt\right)d\theta = \int_{\mathbb{R}} e^{-p\theta}|g(\theta)|\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-p(t-\theta)}|f(t-\theta)|\,dt\right)d\theta;$$

Posto $t - \theta = t_1$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-p(t-\theta)}|f(t-\theta)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-pt_1}|f(t_1)|\,dt_1,$$

quindi l'integrale precedente diventa

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-pt_1}|f(t_1)|\,dt_1\right)e^{-p\theta}|g(\theta)|\,d\theta = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-pt_1}|f(t_1)|\,dt_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-pt_2}|g(t_2)|\,dt_2\right),$$

avendo posto $t_2 = \theta$. Il teorema di Tonelli dice quindi che $(t,\theta) \mapsto e^{-st} f(t-\theta)g(\theta) = e^{-s(t-\theta)} f(t-\theta)e^{-s\theta}g(\theta)$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^2)$; il teorema di Fubini permette ora di svolgere lo stesso calcolo allo stesso modo senza il valore assoluto, e di pervenire al risultato voluto. $\square$

Corollario 3.10. *Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ tale che $f_{|[0,+\infty[}$ sia continua e C^1 a tratti. Se f' è assolutamente $L-$trasformabile, tale è anche f; si ha $\rho(f) \le \max\{\rho(f'), 0\}$, ed inoltre*

$$\Lambda f(s) = \frac{f(0^+) + \Lambda f'(s)}{s} \qquad \operatorname{Re} s > \max\{\rho(f'), 0\}.$$

Se poi f è di classe C^m in $[0,+\infty[$, con derivata $m-$esima assolutamente $L-$trasformabile, allora $f, f', \dots, f^{(m-1)}$ sono assolutamente $L-$trasformabili, con ascissa di convergenza assoluta maggiore o uguale a $\max\{\rho(f^{(m)}), 0\}$, e si ha

$$\Lambda f(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0^+)}{s^{k+1}} + \frac{\Lambda f^{(m)}(s)}{s^m} \qquad \operatorname{Re} s > \max\{\rho(f^{(m)}), 0\}.$$

Dimostrazione. Si ricorda che si ha, se $t > 0$

$$f(t) = f(0^+) + \int_0^t f'(\theta)\, d\theta = f(0^+) + H * f'(t),$$

ovvero

$$f = f(0^+)H + f' * H \quad \text{da cui } \Lambda f(s) = \frac{f(0^+)}{s} + \Lambda f'(s)\frac{1}{s}.$$

Per induzione su m si ha anche il secondo risultato: si ha

$$f^{(m-1)}(t) = f^{(m-1)}(0^+) + f^{(m)} * H(t) \quad \text{per } t > 0, \text{ da cui, come sopra}$$

$$\Lambda f^{(m-1)}(s) = \frac{f^{(m-1)}(0^+) + \Lambda f^{(m)}(s)}{s} \qquad \operatorname{Re} s > \max\{0, \rho(f^{(m)})\};$$

l'ipotesi induttiva porge

$$\Lambda f(s) = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{f^{(k)}(0^+)}{s^{k+1}} + \frac{\Lambda f^{(m-1)}(s)}{s^{m-1}},$$

e sostituendo in tale formula l'espressione sopra ottenuta per $\Lambda f^{(m-1)}(s)$ si conclude. $\square$

Osservazione 8. Si poteva naturalmente ricorrere anche alla formula di Taylor con il resto in forma integrale, che dice che si ha

$$f(t) = f(0^+) + f'(0^+)t + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(0^+)}{(m-1)!}t^{m-1} + H^{*m} * f^{(m)}(t) \qquad t \geq 0,$$

ovvero

$$f(t) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0^+)}{k!} t^k\right) H(t) + H^{*m} * f^{(m)}(t) \qquad t \in \mathbb{R},$$

che trasformando ambo i membri porge appunto la formula voluta; H^{*m} è la convoluzione di H con se stessa m volte, vedi poi, 0.18.

3.2.1 Trasformata della derivata

Le formule precedenti si scrivono spesso a rovescio, esplicitando $\Lambda f^{(m)}$:

$$\Lambda f'(s) = s\Lambda f(s) - f(0^+); \quad \Lambda f''(s) = s^2 \Lambda f(s) - s f(0^+) - f'(0^+);$$

ed in generale

$$\Lambda f^{(m)} = s^m \Lambda f(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-(k+1)} f^{(k)}(0^+).$$

Tale formula vale per $\operatorname{Re} s > \max\{0, \rho(f^{(m)})\}$, ammesso che $f^{(m)}$ sia assolutamente trasformabile. In generale, la trasformabilità di f non implica quella di f'; la funzione $H(t)\sin(e^{t^2})$ è assolutamente $L-$trasformabile con ascissa di convergenza assoluta 0, ma la sua derivata non è assolutamente trasformabile.

Osservazione 9. Esiste anche un metodo diretto, forse più agevole, di calcolare la trasformata della derivata: supponiamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, con $f(t) = 0$ per $t < 0$, coincida su $[0, +\infty[$ con una funzione di classe C^1, la cui derivata sia assolutamente $L-$trasformabile. Supposto di sapere che allora, almeno per $\operatorname{Re} s > \max\{\rho(f'), 0\}$, l'integrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt$ è (assolutamente) convergente, un'integrazione per parti permette di mostrare che si ha, per tali s, $\Lambda f'(s) = s\Lambda f(s) - f(0^+)$; si può scegliere una successione di reali positivi $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ che tende all'infinito lungo la quale si abbia $\lim_{k\to\infty} f(a_k)e^{-sa_k} = 0$, e ciò perché l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$ esiste finito; allora

$$\Lambda f'(s) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^{a_k} f'(t)e^{-st}\,dt = \text{per parti} =$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\left[f(t)e^{-st}\right]_{t=0}^{t=a_k} + s\int_0^{a_k} f(t)e^{-st}\,dt\right) = -f(0^+) + \lim_{k\to\infty} s\int_0^{a_k} f(t)e^{-st}\,dt =$$
$$-f(0^+) + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt = -f(0^+) + s\Lambda f(s).$$

Osservazione 10. Può sorgere qualche dubbio sulla formula precedente. Infatti, la funzione f' non è *ovunque* la derivata di f: nel punto $t=0$ in generale f non è continua, ed a più forte ragione non vi è derivabile. Inoltre la funzione f', identicamente nulla per $t<0$, ed uguale ad $f'(t)$ per $t>0$, non è la derivata della sola f, ma anche di tutte le funzioni quali $h = f + kH$, con k costante arbitraria; ma la formula esprime la trasformata di f' mediante la trasformata di f. Di fatto $\Lambda f'$ è però ben definita: per $\operatorname{Re} s > \max\{0, \rho(f)\}$ si trova

$$\Lambda h(s) = \Lambda(f + kH)(s) = \Lambda f(s) + \frac{k}{s},$$

ed essendo $h(0^+) = f(0^+) + k$, si ottiene

$$s\Lambda h(s) - h(0^+) = s\Lambda f(s) + k - (f(0^+) + k) = s\Lambda f(s) - f(0^+) = \Lambda f'(s).$$

In altre parole, si ottiene lo stesso risultato con un'altra "primitiva" h di f'. Ma a rigore, non è corretto dire che la funzione f' è la derivata di f su $\mathbb{R}$; essa è solo la parte funzionale di tale derivata, come vedremo quando faremo le distribuzioni.

3.2.2 Originale di $s(\Lambda(f))'(s)$

Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ è tale che $f_{|[0,+\infty[}$ sia continua e C^1 a tratti, ed f' è assolutamente $L-$trasformabile, allora $t \mapsto (tf(t))'$ è assolutamente L–trasformabile e si ha

$$\Lambda((tf(t))'(s) = -s(\Lambda f)'(s) \qquad \operatorname{Re} s > \rho(f')$$

Infatti, posto $g(t) = tf(t)$, si ha $g(0^+) = 0$, e quindi $\Lambda g'(s) = s\Lambda g(s)$, per il teorema sulla trasformata della derivata; inoltre $\Lambda g(s) = \Lambda((\#)f(\#))(s) = -(\Lambda f)'(s)$ per il teorema sulla derivata della trasformata; si è visto quindi che la trasformata del secondo membro è $s\dfrac{d}{ds}\Lambda f(s)$.

Esercizio 3.5. Determinare la funzione la cui trasformata di Laplace è $h(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$ (sugg: $h(s) = s\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\ldots$)

3.2.3 Trasformata di $f(t)/t$

Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ è assolutamente $L-$trasformabile, con $f(t)/t$ ancora in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, allora $f(t)/t$ ha la stessa ascissa di convergenza assoluta di f, e si ha, per $\operatorname{Re} s > \rho(f)$:

$$\Lambda f(\#)/(\#))(s) = \int_s^{+\infty} \Lambda f(\sigma)\,d\sigma \quad \text{(opposta di quella primitiva di } \Lambda f(s) \text{ che è nulla per } \operatorname{Re} s \to +\infty).$$

La verifica si basa sulla formula $(\Lambda g)'(s) = \Lambda((-\#)g(\#))$, e si lascia senz' altro al lettore; la notazione $\int_s^{+\infty} \Lambda f(\sigma)\,d\sigma$ indica l'integrale di $\Lambda f(\sigma)$ fatto sulla semiretta $t + i\operatorname{Im} s$, con $t \geq \operatorname{Re} s$.

Esercizio 3.6. Usando la formula sopra, fare le seguenti trasformate ($s \in \mathbb{R}$):

Funzione	Trasformata	Ascissa di conv. ass.
$H(\#)\dfrac{e^{\alpha\#} - e^{\beta\#}}{\#}$	$\log\left(\dfrac{s-\beta}{s-\alpha}\right)$	$\max\{\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta\}$

$H(\#)\dfrac{1-e^{-\#}}{\#}$	$\log\left(1+\dfrac{1}{s}\right)$	0
$H(\#)\dfrac{\sin(\omega\#)}{\#}$	$\dfrac{\pi}{2}-\arctan\left(\dfrac{s}{\omega}\right)$	$\lvert\mathrm{Im}\,\omega\rvert$
$H(\#)\dfrac{\sinh(\omega\#)}{\#}$	$\log\left(\dfrac{s+\omega}{s-\omega}\right)$	$\lvert\mathrm{Re}\,\omega\rvert$

3.3 Formula di inversione

La trasformazione di Fourier non si applica a funzioni esponenziali $e^{i\alpha t}$ con $\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$, e questo fatto ne limita grandemente l'applicabilità a situazioni importanti (le equazioni lineari a coefficienti costanti hanno tipicamente soluzioni che sono esponenziali). La trasformazione di Laplace, che ha proprietà strettamente analoghe come sopra visto, è una sorta di famiglia ad un parametro di trasformate di Fourier: data $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ con ascissa di convergenza $\rho < +\infty$ si ha, per $p > \rho$, che $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$; la trasformata di Fourier $\omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-pt}e^{-i\omega t}\,dt$ è il valore in $p+i\omega$ della trasformata di Laplace $s \mapsto \Lambda f(s)$ sulla retta $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z = p\}$. Ciò ha importanti conseguenze, che ora vediamo.

Antitrasformazione

La trasformazione di Laplace è iniettiva: è molto importante essere in grado di invertirla.

Teorema 3.11. Teorema di inversione *Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ assolutamente $L-$trasformabile. Se il numero reale p_0 appartiene ad $S(f)$, e se la funzione*

$$\omega \mapsto \Lambda f(p_0+i\omega) \qquad \textit{appartiene ad } L^1(\mathbb{R}),$$

allora f è (q.o. uguale ad) una funzione continua su $\mathbb{R}$, e si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Lambda f(p_0+i\omega)e^{(p_0+i\omega)t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \Lambda f(\zeta)e^{\zeta t}\,d\zeta$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, dove con $]p_0-i\infty, p_0+i\infty[$ indichiamo il cammino $p_0+i\omega, \omega \in \mathbb{R}$. (Si noti in particolare si ha $f(t) = 0$ per $t \leq 0$).

Dimostrazione. Come prima osservato, si può pensare che la funzione $\omega \mapsto \Lambda f(p_0+i\omega)$ sia la trasformata di Fourier della funzione $t \mapsto e^{-p_0t}f(t)$; se questa funzione sta in $L^1(\mathbb{R})$ il teorema di inversione dice che $t \mapsto e^{-p_0t}f(t)$ è continua su $\mathbb{R}$ (in particolare anche per $t = 0$), nulla all'infinito, e che si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{-p_0t}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda f(p_0+i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega,$$

che si riscrive

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda f(p_0+i\omega)e^{(p_0+i\omega)t}\,d\omega,$$

che è quanto voluto. □

Osservazione 11. Un simbolo spesso usato per scrivere la formula di inversione è

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{p_0+i\mathbb{R}} \Lambda f(\zeta)e^{\zeta t}\,d\zeta.$$

Definizione. Se h è una funzione olomorfa su $\mathrm{Re}\,s \geq p_0$ e $\omega \to h(p_0+i\omega)$ è sommabile, la funzione $\Lambda^{-1}(h)$ definita da

$$\Lambda^{-1}(h)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{p_0+i\mathbb{R}} h(\zeta)e^{\zeta t}\,d\zeta$$

si chiama *antitrasformata di Laplace* di h; tale definizione non dipende dalla scelta di p_0 se h tende a 0 per $|s| \to +\infty$.

Corollario 3.12. *La trasformazione di Laplace è iniettiva. Più precisamente se* $\Lambda f(s) = \Lambda g(s)$ *per* $\operatorname{Re} s > a$ $(a \in \mathbb{R})$ *allora* $f = g$ *q.o.*

Dimostrazione. Supponiamo $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ assolutamente $L-$trasformabili. Se $\Lambda f(s) = \Lambda g(s)$ per $\operatorname{Re} s > \rho(f) \vee \rho(g)$, allora $f = g$ q.o. in $\mathbb{R}$: infatti $f - g$ è assolutamente $L-$trasformabile con trasformata nulla; la funzione nulla sta in L^1, ed il teorema di inversione porge quindi $0 = f - g$ q.o.. □

Ciò motiva la definizione che segue.

Definizione. Se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ e $\Lambda f(s) = h(s)$ per $\operatorname{Re} s > a$ $(a \in \mathbb{R})$ diciamo che f è *l'originale di Laplace* di h. Un po' abusivamente si scrive spesso $f = \Lambda^{-1}(h)$ e si dice comunque che f è l'*antitrasformata di Laplace* h, anche se $h \notin L^1(\mathbb{R})$ e a rigore l'antitrasformata definita sopra tramite la formula integrale non si può calcolare.

3.4 Antitrasformate di trasformate non sommabili sugli assi verticali

Si noti, per quanto visto sopra che se h_1, h_2 sono olomorfe e coincidono su un semipiano del tipo $\operatorname{Re} s > a$ allora $\Lambda^{-1}(h_1) = \Lambda^{-1}(h_2)$ q.o.. La condizione che $\Lambda f(p_0 + i\omega)$ stia in $L^1(\mathbb{R})$ come funzione di $\omega \in \mathbb{R}$ è in realtà assai forte, e non è verificata ad esempio da nessuna funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ che sia discontinua, in particolare non sia nulla in $t = 0$ (ad esempio $\Lambda(\cos(\#)H)(s) = s/(1 + s^2)$ non verifica l'ipotesi). C'è però l'analogo del teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier (condizione di Dini).

Proposizione 3.13 (Formula di antitrasformazione)**.** *Sia* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ *assolutamente* $L-$*trasformabile, e sia* $p_0 \in \mathbb{R}$ *nell'insieme* $S(f)$ *di convergenza assoluta per* f*. Se in un punto* t_0 *esistono i limiti destro e sinistro* $f(t_0^+), f(t_0^-)$ *di* f*, e se i rapporti incrementali*

$$\frac{f(t_0 + \theta) - f(t_0^+)}{\theta}; \qquad \frac{f(t_0 - \theta) - f(t_0^-)}{-\theta}$$

si mantengono limitati per $0 < \theta \le \delta$*, essendo* $\delta > 0$ *opportuno, allora si ha*

$$\frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \,\mathrm{v.\,p.} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \Lambda f(\zeta) e^{\zeta t_0}\, d\zeta \left(= \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \Lambda f(p_0 + i\omega) e^{(p_0 + i\omega)t_0} i\, d\omega \right).$$

(Per la dimostrazione si rinvia all'analogo teorema per la trasformata di Fourier).

Esercizio 3.7. Trovare l'antitrasformata della funzione

$$\phi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2(s^2 + 2)}.$$

Risoluzione. Possiamo cercare l'originale di $s \mapsto 1/(s^2(s^2 + 2))$, che andrà poi traslato in avanti di 1. Si osserva ora che è

$$\frac{1}{s^2(s^2+2)} = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2(s^2+2)} = \frac{1}{2}\frac{2 + s^2 - s^2}{s^2(s^2+2)} = \frac{1/2}{s^2} - \frac{1/2}{s^2+2};$$

la prima è la trasformata di $(1/2)tH(t)$; quanto alla seconda, uno sguardo ai calcoli fatti ci dice che $\Lambda(H(t)\sin(\omega t)(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$, per cui l'originale di $(1/2)/(s^2 + 2) = (1/(2\sqrt{2}))\sqrt{2}/(s^2 + (\sqrt{2})^2)$ è $(1/(2\sqrt{2}))\sin(\sqrt{2}t)H(t)$. In definitiva, l'originale richiesto è

$$\frac{1}{2}(t-1)H(t-1) - 2^{-3/2}\sin(\sqrt{2}(t-1))H(t-1).$$

A titolo di esercizio, anche se qui il metodo è di certo più lungo, calcoliamo l'antitrasformata con la formula; usiamo l'ascissa 1 (alla destra dell'ascissa scelta non ci devono essere singolarità per la funzione ϕ). Integriamo sui semicerchi di diametro $1 - ir, 1 + ir$, con $\sigma_r(\vartheta) = 1 + re^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ la funzione $\phi(s)e^{st}$, $t > 0$, ottenendo, grazie al teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-r}^{r} \phi(1 + i\omega)e^{(1+i\omega)t} i\, d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_r} \phi(s)e^{st}\, ds = \operatorname{Res}(\phi e^{st}, s = 0) + \operatorname{Res}(\phi e^{st}, s = i\sqrt{2}) +$$

$$\mathrm{Res}(\phi e^{st}, s = -i\sqrt{2}).$$

L'integrale sul pezzo curvo tende a zero (lemma di Jordan) se $t > 1$: l'integrando infatti è $e^{s(t-1)}/(s^2(s^2+2))$, e si ha, se $s = 1 + re^{i\vartheta}$ $(1 + re^{i\vartheta})(t-1) = (t-1) + r(t-1)r\cos\vartheta + r(t-1)i\sin\vartheta$, da cui $|e^{s(t-1)}| = e^{1-t}e^{(t-1)r\cos\vartheta}$, ed $(t-1)r\cos\vartheta < 0$ se $t > 1$, essendo $\pi/2 < \vartheta < 3\pi/2$; e si ottiene

$$\Lambda^{-1}\phi(t) = \mathrm{Res}(\phi e^{st}, s = 0) + \mathrm{Res}(\phi e^{st}, s = i\sqrt{2}) + \mathrm{Res}(\phi e^{st}, s = -i\sqrt{2}).$$

Si ha

$$\mathrm{Res}(\phi e^{st}, s = 0) = \left(D\frac{e^{s(t-1)}}{s^2+2}\right)_{s=0} = \left(\frac{(t-1)e^{s(t-1)}(s^2+2) - 2se^{s(t-1)}}{(s^2+2)^2}\right)_{s=0} = \frac{2(t-1)}{4} = \frac{t-1}{2};$$

$$\mathrm{Res}(\phi e^{st}, s = i\sqrt{2}) = \frac{e^{i\sqrt{2}(t-1)}}{(-2)2(i\sqrt{2})} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\frac{e^{i\sqrt{2}(t-1)}}{2i};$$

ed essendo la funzione reale sui reali l'altro residuo è il coniugato di questo, e cioè

$$\mathrm{Res}(\phi e^{st}, s = -i\sqrt{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{e^{-i\sqrt{2}(t-1)}}{2i},$$

per cui si ha

$$\Lambda^{-1}\phi(t) = \frac{1}{2}(t-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}(t-1)) \quad t > 1.$$

Per $t < 1$ si integra sull'altro semicerchio contenuto nel semipiano $\mathrm{Re}\, s > 1$; non ci sono residui, per cui si trova 0. $\square$

Osservazione 12. La scelta dell'ascissa per la retta parallela all'asse immaginario su cui integrare è soggetta all'unico vincolo che alla destra di essa non vi siano singolarità per la funzione. Sopra si è scelta l'ascissa 1, si poteva scegliere altrettanto bene l'ascissa 1/2, od una qualsiasi ascissa positiva, ma non l'ascissa 0, e neanche un'ascissa negativa.

Esercizio 3.8. Originale di Laplace di $\phi(s) = (s-2)/(s^2+2s+1)$, direttamente e con i residui. Trovare poi l'originale di Laplace di $e^{-\pi s}(s-2)/(s^2+2s+1)$

Risoluzione. Si ha

$$\phi(s) = \frac{s-2}{s^2+2s+1} = \frac{(s+1)-3}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{3}{(s+1)^2};$$

l'originale di Laplace di $1/(s+1)^p$ è, per $p \geq 1$, $e^{-t}t^{p-1}H(t)/(p-1)!$, per cui l'originale richiesto è

$$f(t) = e^{-t}H(t) - 3e^{-t}tH(t) = e^{-t}(1-3t)H(t).$$

Usando la formula di antitrasformazione, si può prendere $p_0 = 0$, integrare cioè sull'asse immaginario (si noti che su nessuna retta parallela a tale asse la funzione $\omega \mapsto ((p_0 + i\omega) - 2)/(p_0 + i\omega + 1)^2$ sta in $L^1(\mathbb{R})$, dato che è dello stesso ordine $1/\omega$ per $\omega \to \pm\infty$, e quindi l'antitrasformata può non essere continua su $\mathbb{R}$). Si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-r}^{r}\frac{i\omega - 2}{(i\omega+1)^2}e^{i\omega t}i\,d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_r}\phi(s)e^{st}\,ds = \mathrm{Res}(\phi(s)e^{st}, -1).$$

Se $t > 0$ l'integrale sul semicerchio tende a 0, per il lemma di Jordan (precisare i calcoli). Il residuo è (polo del secondo ordine):

$$\big(D((s-2)e^{st}\big)_{s=-1} = (e^{st} + t(s-2)e^{st})_{s=-1} = e^{-t} - 3te^{-t}.$$

Si ha quindi

$$f(t) = \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-r}^{r}\frac{i\omega - 2}{(i\omega+1)^2}e^{i\omega t}i\,d\omega = e^{-t} - 3te^{-t} \quad (t > 0),$$

in accordo con quanto visto. Per $t < 0$ si integra sui semicerchi contenuti nel semipiano $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ e si trova 0. Resta $t = 0$; essendo $\lim_{s\to\infty_{\mathbb{C}}} s\phi(s) = 1$, il lemma del cerchio grande dice che l'integrale sul semicerchio tende a $i\pi$; inoltre il residuo $\mathrm{Res}(\phi, -1)$ vale 1; si ha quindi

$$\frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-r}^{r}\frac{i\omega - 2}{(i\omega+1)^2}i\,d\omega = \frac{1}{2},$$

in accordo con quanto visto $(f(0^-) = 0,\ f(0^+) = 1)$. $\square$

Esercizio 3.9. Determinare, usando la formula integrale di antitrasformazione, l'originale di Laplace di

$$\frac{s + e^{-\pi s}}{1 + s^2}$$

giustificando i vari passaggi.

3.5 Antitrasformate di Laplace di funzioni razionali proprie

Proposizione 3.14. *Ogni funzione razionale propria $R(s) = A(s)/B(s)$, con A, B polinomi e $\deg A < \deg B$ è trasformata di Laplace di una funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Inoltre si ha*

$$\rho_a(f) = \max\{\operatorname{Re} s : \ s \text{ polo di } R\};$$

in particolare $f \in L^1(\mathbb{R})$ se R non ha poli su $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Dimostrazione. Infatti, l'originale di Laplace delle funzioni

$$s \mapsto \frac{1}{(s-c)^m} \qquad c \in \mathbb{C};\ m = 1, 2, 3, \dots,$$

è $H(t)e^{ct}t^{m-1}/(m-1)!$ e in tal caso l'ascissa di convergenza assoluta è $\operatorname{Re} c$; inoltre ogni funzione razionale propria è somma di funzioni di questo tipo (frazioni semplici) come ben noto; si noti che queste funzioni sono tutte C^∞ su $[0, +\infty[$. □

Anzi, se $R(s) = A(s)/B(s)$ e B ha solo zeri semplici, siano essi $c_1, \dots, c_N$ si ha la

$$\Lambda^{-1}(A/B)(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A(c_k)}{B'(c_k)} e^{c_k t} H(t). \qquad \text{Formula di Heaviside}$$

Esercizio 3.10. Precisare nei dettagli la dimostrazione della formula di Heaviside.

Esercizio 3.11. Dimostrare che la funzione

$$\frac{e^{-as}}{(s-c)^m} \qquad c \in \mathbb{C},\ m = 1, 2, 3, \dots, a \in \mathbb{C},$$

è trasformata di Laplace di una funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ se e solo se a è reale e non negativo, $a \geq 0$; trovare in tal caso l'originale di Laplace della funzione stessa (se a non è reale, su nessuna retta parallela all'asse immaginario la funzione va a zero all'infinito …; l'originale è $H(t-a)e^{c(t-a)}(t-a)^{m-1}/(m-1)!$).

Forma reale dell'antitrasformata

Se le funzioni razionali sono reali, e si vuole l'antitrasformata in forma reale, si ricorre a seno e coseno. Ad esempio, dovendo trovare l'originale di $(cs + d)/(s^2 + b^2)$, dove b è reale non nullo, si scrive:

$$\frac{cs + d}{s^2 + b^2} = c\frac{s}{s^2 + b^2} + \frac{d}{b}\frac{b}{s^2 + b^2},$$

ed in tale forma è immediato vedere che l'originale è

$$c\cos(bt)H(t) + \frac{d}{b}\sin(bt)H(t).$$

Similmente, dovendo antitrasformare $(cs + d)/(s^2 - 2as + a^2 + b^2)$, b, a reali, $b \neq 0$, si scrive

$$\frac{cs + d}{s^2 - 2as + a^2 + b^2} = \frac{cs + d}{(s-a)^2 + b^2} = \frac{c(s - a + a) + d}{(s-a)^2 + b^2} = c\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{ca + d}{b}\frac{b}{(s-a)^2 + b^2},$$

che ha come originale

$$e^{at}\left(c\cos(bt) + \frac{ca + d}{b}\sin(bt)\right)H(t).$$

Ricordiamo che se $A(s)/B(s)$ è una funzione razionale a coefficienti reali, e le radici del denominatore sono: quelle reali, $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$, con molteplicità $\mu_1, \dots, \mu_p$; quelle complesse, $\alpha_k = a_k + ib_k$, $\bar{\alpha}_k = a_k - ib_k$, $k = 1, \dots, q$ con molteplicità $\nu_1, \dots, \nu_q$ (quindi $\deg B = (\mu_1 + \cdots + \mu_p) + 2(\nu_1 + \cdots + \nu_q)$), e numeratore e denominatore sono primi fra loro, si ha:

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{c_{-l}(x_j)}{(s-x_j)^l} + \sum_{k=1}^{q}\sum_{r=1}^{\nu_k} \frac{d_r(\alpha_k)s + g_r(\alpha_k)}{((s-a_k)^2 + b_k^2)^r},$$

con c_{-l}, d_r, g_r costanti reali univocamente determinate, che si possono trovare risolvendo un sistema lineare. Ci si serve poi del metodo illustrato nel seguente esempio.

Esempio 3.3. Una formula ricorrente per antitrasformare $1/(s^2+\omega^2)^p$ Ricordiamo che se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ è tale che $f_{|[0,+\infty[} \in C^1([0,+\infty[)$, con f' assolutamente $L-$trasformabile si ha

$$\Lambda^{-1}\left(s\frac{d}{ds}\Lambda f(s)\right) = -\frac{d}{dt}(tf(t)).$$

Sappiamo che $\Lambda^{-1}(1/(s^2+\omega^2))(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}H(t)$; si ha poi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2} - \frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right) = \\
&\frac{1}{\omega^3}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{2\omega^2}s\frac{-2s}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{\omega^3}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{2\omega^2}s\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right).
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
&\Lambda^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right)(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega^3}H(t) - \frac{1}{2\omega^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{t\sin(\omega t)}{\omega}H(t)\right) = \\
&\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{\sin(\omega t)}{2\omega} - \frac{t\cos(\omega t)}{2}\right)H(t) = \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - t\cos(\omega t)\right)H(t).
\end{aligned}$$

In generale, sia $F_p(t)$ l'originale di Laplace di $1/(s^2+\omega^2)^p$, per $p = 1, 2, 3, \dots$; scrivendo come sopra (si suppone $p \geq 2$):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(s^2+\omega^2)^p} = \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{(s^2+\omega^2)^{p-1}} + \frac{1}{2\omega^2(p-1)}s\frac{(1-p)2s}{(s^2+\omega^2)^p} = \\
&\frac{1}{\omega^2}\frac{1}{(s^2+\omega^2)^{p-1}} + \frac{1}{2\omega^2(p-1)}s\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s^2+\omega^2)^{p-1}}\right),
\end{aligned}$$

si ha antitrasformando la formula ricorrente

$$F_p(t) = \frac{1}{\omega^2}F_{p-1}(t) - \frac{1}{2\omega^2(p-1)}\frac{d}{dt}(tF_{p-1}(t)) = \frac{1}{2\omega^2(p-1)}\left((2p-3)F_{p-1}(t) - tF'_{p-1}\right).$$

Esercizio 3.12. Trovare l'originale di Laplace di

$$\frac{s^2+4}{(s^2+4s+8)(s^2+6s+32)}.$$

Risoluzione. Troviamo gli zeri del denominatore:

$$\begin{aligned}
&s^2+4s+8 = 0 \iff s = -2 \pm 2i; \text{ quindi } s^2+4s+8 = (s+2)^2+4; \\
&s^2+6s+32 = 0 \iff s = -3 \pm 5i; \text{ quindi } s^2+6s+32 = (s+3)^2+25.
\end{aligned}$$

Cerchiamo costanti reali a, b, c, d tali che sia

$$\frac{s^2+4}{((s+2)^2+4)((s+3)^2+25)} = \frac{as+b}{(s+2)^2+4} + \frac{cs+d}{(s+3)^2+25};$$

facendo il denominatore comune a secondo membro ed uguagliando i numeratori si ottiene

$$s^2+4=(as+b)((s+3)^2+25)+(cs+d)((s+2)^2+4));$$

posto in tale formula $s=-3+5i$ si ottiene

$$\begin{aligned}&(-3+5i)^2+4=(c(-3+5i)+d)((-1+5i)^2+4) \iff\\ &9-25-30i+4=(-3c+d+5ic)(-20+10i) \iff\\ &-12-30i=-2(-55c+10d+(35c+5d)i)\end{aligned}$$

Si trova il sistema lineare

$$-55c+10d=6; \qquad 7c+d=3 \quad \text{da cui } -55c+10(3-7c)=6 \iff -125c=-24$$

ed infine $c=24/125$, $d=207/125$. Sostituendo invece $s=-2+2i$ si ottiene

$$\begin{aligned}&-8i+4=(-2a+b+2ai)(1-4+4i+25) \iff\\ &-8i+4=2(-2a+b+2ai)(11+2i) \iff -4i+2=(-2a+b)11-4a+(-4a+2b+22a)i \iff\\ &-26a+11b=2;\ 18a+2b=-4 \text{da cui } -26a+11(-2-9a)=2,\end{aligned}$$

che porge $a=-24/125$, $b=-34/125$. Si è trovato insomma:

$$\frac{s^2+4}{((s+2)^2+4)((s+3)^2+25)}=\frac{1}{125}\frac{-24s-34}{(s+2)^2+4}+\frac{1}{125}\frac{24s+207}{(s+3)^2+25},$$

che ci conviene scrivere come segue

$$\frac{1}{125}\left(-24\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}+\frac{14}{(s+2)^2+2^2}+24\frac{s+3}{(s+3)^2+5^2}+\frac{135}{(s+3)^2+5^2}\right).$$

Ricordando le trasformate delle funzioni periodiche e la regola sulla traslata della trasformata si ha per la richiesta antitrasformata

$$f(t)=\frac{1}{125}\left(-24e^{-2t}\cos(2t)+7e^{-2t}\sin(2t)+24e^{-3t}\cos(5t)+27e^{-3t}\sin(5t)\right)H(t).$$

□

Esercizio 3.13. Determinare l'originale di Laplace di $\dfrac{s+5}{s^2(s^2+10s+29)}$ in due modi diversi: usando la decomposizione in funzioni semplici (reali) e tramite la formula di antitrasformazione.

Se ci sono radici complesse di molteplicità maggiore di uno è più conveniente, in generale, ricorrere alla formula di Hermite.

Proposizione 3.15 (Formula di Hermite)**.** *Nelle ipotesi e notazioni precedenti si ha*

$$\frac{A(s)}{B(s)}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{\mu_j}\frac{c_{-l}(x_j)}{(s-x_j)^l}+\sum_{k=1}^{q}\frac{d(\alpha_k)z+g(\alpha_k)}{(s-a_k)^2+b_k^2}+\frac{d}{ds}\left(\frac{H(s)}{((s-a_1)^2+b_1^2)^{\nu_1-1}\cdot\ldots((s-a_q)^2+b_q)^{\nu_q-1}}\right),$$

dove H è un polinomio di grado non superiore a $(\nu_1+\cdots+\nu_q)-q$.

Esercizio 3.14. Usando la formula di Hermite trovare l'originale di Laplace di

$$\frac{s^2+s-1}{s(s^2+3)^2}.$$

Risoluzione. Si cercano costanti reali a,b,c,m,q tali che sia

$$\frac{s^2+s-1}{s(s^2+3)^2}=\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{s^2+3}+\frac{d}{ds}\left(\frac{ms+q}{s^2+3}\right);$$

si sa che a è il residuo in $s=0$, e quindi $a=-1/9$; si ha poi

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{ms+q}{s^2+3}\right)=\frac{m(s^2+3)-(ms+q)2s}{(s^2+3)^2};$$

si ottiene

$$\frac{s^2+s-1}{s(s^2+3)^2}=\frac{(-1/9)(s^2+3)^2+(bs+c)s(s^2+3)+s(m(s^2+3)-(ms+q)2s)}{s(s^2+3)^2}$$

relazione che vale se e solo se si ha, per ogni s complesso

$$s^2+s-1=(-1/9+b)s^4+(c-m)s^3+(3b-2q-2/3)s^2+3(c+m)s-1$$

da cui $b=1/9$, $c=m$, $3b-2q-2/3=1$, $3(c+m)=1/$, quindi $c=m=1/6$, $q=-2/3$. Si è ottenuto

$$\frac{s^2+s-1}{s(s^2+3)^2}=\frac{-1/9}{s}+\frac{s/9+1/6}{s^2+3}+\frac{d}{ds}\left(\frac{s/6-2/3}{s^2+3}\right);$$

per antitrasformare scriviamo

$$\frac{s/9+1/6}{s^2+3}=\frac{1}{9}\frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2}+\frac{1}{6\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2};\qquad \frac{s/6-2/3}{s^2+3}=\frac{1}{6}\frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2},$$

da cui

$$\Lambda^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s(s^2+3)^2}\right)=$$
$$-\frac{1}{9}H(t)+\frac{1}{9}\cos(\sqrt{3}t)H(t)+\frac{1}{6\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)H(t)-\frac{t}{6}\cos(\sqrt{3}t)H(t)+\frac{2t}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)H(t).$$

Secondo metodo Per confronto, troviamo invece l'originale sviluppando la funzione razionale data in frazioni semplici complesse. Un polo è $s=0$, di ordine 1 con residuo $-1/9$ come visto; gli altri poli sono in $\pm 3i$, di ordine 2; cerchiamo la parte principale in $\sqrt{3}i$, l'altra si ottiene coniugando; si ha

$$c_{-2}(\sqrt{3}i)=\lim_{s\to 3i}(s-\sqrt{3}i)^2\frac{s^2+s-1}{s(s+\sqrt{3}i)^2(s-\sqrt{3}i)^2}=\frac{-3+\sqrt{3}i-1}{\sqrt{3}i(-12)}=-\frac{1}{12}-i/(3\sqrt{3});$$

ed inoltre

$$c_{-1}(3i)=\mathrm{Res}(\text{funz.raz.},\sqrt{3}i)=\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+s-1}{s(s+\sqrt{3}i)^2}\right)_{s=3i};$$

la derivata è

$$\frac{(2s+1)s(s+\sqrt{3}i)^2-(s^2+s-1)((s+\sqrt{3}i)^2+2s(s+\sqrt{3}i))}{s^2(s+\sqrt{3}i)^4},$$

e sostituendo $s=\sqrt{3}i$ si ottiene dopo alcuni calcoli

$$c_{-1}(3i)=\frac{2-i\sqrt{3}}{36}.$$

Ne segue la decomposizione in fratti semplici complessi:

$$\frac{s^2+s-1}{s(s^2+3)^2}=\frac{-1/9}{s}+\left(\frac{1/18-i\sqrt{3}/36}{s-\sqrt{3}i}+\frac{1/18+i\sqrt{3}/36}{s+\sqrt{3}i}\right)+\left(\frac{-1/12-i/(3\sqrt{3})}{(s-\sqrt{3}i)^2}+\frac{-1/12+i/(3\sqrt{3})}{(s+\sqrt{3}i)^2}\right),$$

dove abbiamo messo assieme i pezzi coniugati. L'antitrasformata è immediata, e porge (non scriviamo subito il fattore $H(t)$):

$$-\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{18}-\frac{i\sqrt{3}}{36}\right)e^{\sqrt{3}it}+\left(\frac{1}{18}+\frac{i\sqrt{3}}{36}\right)e^{-\sqrt{3}it}-\left(\frac{1}{12}+\frac{i}{3\sqrt{3}}\right)te^{\sqrt{3}it}-\left(\frac{1}{12}-\frac{i}{3\sqrt{3}}\right)te^{-\sqrt{3}it}$$

che è

$$-\frac{1}{9}+2\,\mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{18}-\frac{i\sqrt{3}}{36}\right)e^{\sqrt{3}it}\right)-2\,\mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{12}+\frac{i}{3\sqrt{3}}\right)te^{\sqrt{3}it}\right)=$$

$$-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cos(\sqrt{3}t)+\frac{\sqrt{3}}{18}\sin(\sqrt{3}t)-t\left(\frac{1}{6}\cos(\sqrt{3}t)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right),$$

coincidente (miracolosamente!) con l'altro. □

Esercizio 3.15. Dimostrare che per ogni funzione razionale propria $R(s)=A(s)/B(s)$, avente poli nei punti $c_1,\dots,c_m$ si ha:

$$\Lambda^{-1}R(t)=\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(R(s)e^{st},s=c_k)H(t).$$

Risoluzione. Si può usare la formula di antitrasformazione ed il lemma di Jordan. Alternativamente, osservato che la formula è lineare in R, basta provarla per le frazioni semplici proprie, $1/(s-\lambda)^p$, che hanno come antitrasformata $t^{p-1}e^{\lambda t}H(t)/(p-1)!$; per $t\geq 0$, questo è esattamente

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{st}}{(s-\lambda)^p},s=\lambda\right)=$$

(ricordando la formula per il residuo in un polo di ordine p)

$$\frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}\left((s-\lambda)^p\frac{e^{st}}{(s-\lambda)^p}\right)_{s=\lambda}=\frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}(e^{st})_{s=\lambda}=\frac{1}{(p-1)!}t^{p-1}e^{\lambda t}.$$

□

3.6 Funzioni olomorfe che sono trasformate di Laplace

Abbiamo visto che le funzioni razionali proprie sono immagini di Laplace di qualche funzione; il risultato che segue amplia la classe delle funzioni olomorfe sui semipiani "destri" che ammettono un originale di Laplace.

Teorema 3.16. *Sia $c\in\mathbb{R}$, sia F olomorfa in un aperto di $\mathbb{C}$ contenente il semipiano $\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,s>c\}$; supponiamo che esistano $K,\varepsilon>0$ tali che sia, in questo semipiano, $|F(s)|\leq K/|s|^{1+\varepsilon}$. In tal caso esiste $f\in C(\mathbb{R})$, con $\mathrm{Supp}(f)\subseteq[0,+\infty[$, assolutamente $L-$trasformabile, con $\rho(f)\leq c$, e $\Lambda f(s)=F(s)$ per $\mathrm{Re}\,s>c$. Tale f è data dalla formula:*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(s)\,e^{st}\,ds.$$

dove $a>c$ è un qualsiasi reale alla destra di c.

Dimostrazione. L'integrale dell'enunciato si scrive, posto $s=a+i\omega$:

$$\frac{e^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(a+i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

Chiaramente la funzione integranda sta in $L^1(\mathbb{R})$, essendo continua e dominata da $K/(a^2+\omega^2)^{(1+\varepsilon)/2}$; anzi, se chiamiamo $f(t)$ l'integrale dell'enunciato si ha:

$$|f(t)|\leq\frac{Ke^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^{(1+\varepsilon)/2}};$$

supposto $a\neq 0$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^{(1+\varepsilon)/2}}=2\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^{(1+\varepsilon)/2}}=\frac{2}{|a|^{\varepsilon}}\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{(1+\varepsilon)/2}}=\frac{2k}{|a|^{\varepsilon}},$$

dove si è posto $k=\int_0^{\infty}(du/(1+u^2)^{(1+\varepsilon)/2})$; si ottiene quindi, posto $M=Kk/\pi$:

$$|f(t)|\leq\frac{M}{|a|^{\varepsilon}}e^{at}\qquad a>c,a\neq 0,\,t\in\mathbb{R}.$$

Se $t < 0$, passando al limite per $a \to +\infty$ il secondo membro tende a 0; si ha quindi $f(t) = 0$ per $t < 0$, come asserito. Inoltre, se $b > c$ la funzione $|f(t)|e^{-bt}$ sta in $L^1(\mathbb{R})$: sia infatti a scelto in modo che sia $c < a < b$, con $a \neq 0$; si ha

$$|f(t)|e^{-bt} \leq \frac{M}{|a|^\varepsilon} e^{-(b-a)t},$$

ed essendo $(b-a) > 0$ la funzione a secondo membro è sommabile su $[0, +\infty[$. Ne segue che f è assolutamente $L-$trasformabile con $\rho(f) \leq c$. Inoltre $f(t)e^{-at}$ è esattamente l'antitrasformata di Fourier, in termini di pulsazione anziché di frequenza, della funzione $\omega \mapsto F(a + i\omega)$, sempre qualunque sia $a > c$ fissato. Poichè tale funzione sta in $L^1(\mathbb{R})$, il teorema di inversione ci dice che si ha, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$:

$$F(a + i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-at}e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(a+i\omega)t}\, dt = \Lambda f(a + i\omega).$$

Per il principio di identità le funzioni olomorfe F e Λf, coincidendo sulla retta $\operatorname{Re} s = a$, concidono in tutto il semipiano $\operatorname{Re} s > c$. $\square$

Osservazione 13. A posteriori risulta che f non dipende dalla particolare ascissa $a > c$ scelta per antitrasformare alla Laplace: ogni funzione f_a così ottenuta ha F come trasformata di Laplace, e pertanto $f_a = f_b$, se $a, b > c$. Comunque è facile vedere a priori che l'antitrasformata non cambia al cambiare dell'ascissa a: se $c < a < b$, ed $r > 0$, la funzione olomorfa $s \mapsto F(s)e^{st}$ ha integrale nullo sul bordo del rettangolo di vertici $a-ir, b-ir, b+ir, a+ir$; ne segue

$$\int_{-r}^{r} (F(b + i\omega)e^{(b+i\omega)t} - F(a + i\omega)e^{(a+i\omega)t})\, d\omega = \int_a^b (F(p + ir)e^{(p+ir)t} - F(p - ir)e^{(p-ir)t})\, dp;$$

per l'integrale a secondo membro si ha

$$\left|\int_a^b (F(p + ir)e^{(p+ir)t} - F(p - ir)e^{(p-ir)t})\, dp\right| \leq \int_a^b |F(p + ir)e^{(p+ir)t} - F(p - ir)e^{(p-ir)t}|\, dp \leq$$
$$2\int_a^b e^{pt}\mu(r)\, dp = 2\mu(r)\frac{e^{bt} - e^{at}}{t},$$

dove $\mu(r) = \max\{|F(p \pm ir)| : p \in [a, b]\} \leq K/(d^2 + r^2)^{(1+\varepsilon)/2}$ (con $d = \min\{|a|, |b|\}$), e se $t = 0$ il termine $(e^{bt} - e^{at})/t$ va sostituito con 1. Ne segue che il secondo membro è infinitesimo con $r \to +\infty$; quindi gli integrali di antitrasformazione coincidono.

3.7 Trasformata di Laplace e trasformata di Fourier

3.7.1 Antitrasformate di Fourier di funzioni razionali senza l'uso del teorema dei residui

Se $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ è $L-$trasformabile e l'ascissa di convergenza assoluta $\rho(f) < 0$ allora, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si ha

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}\, dt = \Lambda f(i\xi);$$

cioè f è l'originale di Fourier di $\Lambda(f)(i\xi)$. Occorre fare attenzione che, se $\rho(f) > 0$ o $\rho(f) = 0$ ma $f \notin L^1(\mathbb{R})$, l'uguaglianza precedente perde di senso anche se Λf si estende ad una funzione olomorfa su un dominio contente l'asse $\operatorname{Re} s = 0$. Il risultato che segue si basa sull'osservazione precedente; la sua dimostrazione fornisce anche un metodo alternativo a quello usato nel capitolo sulla trasformata di Fourier per trovare l'originale di Fourier di una tale funzione. Sarà utile ricordare che, per quanto visto precedentemente, ogni funzione razionale propria è la trasformata di Laplace di una funzione la cui ascissa di convergenza è il massimo delle parti reali dei poli della funzione razionale data; in particolare l'originale di Laplace di una funzione razionale propria priva di poli sul semipiano $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ è sommabile.

Indichiamo al solito con $\widetilde{\varphi}(x) \doteq \varphi(-x)$ la simmetrizzata di una funzione φ; ricordiamo che $\widehat{\widehat{\varphi}} = \widetilde{\varphi}$.

Proposizione 3.17. *Ogni funzione razionale propria priva di zeri reali è la trasformata di Fourier di una funzione sommabile.*

Dimostrazione. Per comodità scriviamo la funzione razionale data come $R(i\xi)$, con R razionale senza poli immaginari puri; ciò è sempre possibile. Utilizzando la decomposizione di una funzione razionale propria come somma delle sue parti singolari nei poli ci possiamo ricondurre alla funzione razionale

$$R(s) = \frac{c}{(s-a)^k} \qquad c \in \mathbb{C},\, a \notin i\mathbb{R}$$

Se $\operatorname{Re} a < 0$ allora $R = \Lambda f$ con $\rho(f) = \operatorname{Re} a < 0$: ha senso calcolare Λf sui punti di $\operatorname{Re} s = 0$ e si ha, posto $\widehat{f}(\xi) = \Lambda f(i\xi) = R(i\xi)$; se invece $\operatorname{Re} a > 0$ ci si può ricondurre al caso precedente osservando che

$$\widetilde{R}(i\xi) \doteq R(-i\xi) = \frac{c}{(-i\xi - a)^k} = \frac{(-1)^k c}{(i\xi - (-a))^k}$$

ed è $\operatorname{Re}(-a) < 0$; allora se $\widehat{g}(\xi) = \widetilde{R}(i\xi)$ si ha $\widehat{\widetilde{g}}(\xi) = \widetilde{\widehat{g}}(\xi) = R(i\xi)$. □

Osservazione 14. Una funzione razionale con poli reali, non essendo continua su $\mathbb{R}$, non è la trasformata di Fourier di una funzione sommabile.

Osservazione 15. Se la funzione razionale data è $R(i\xi)$ con R razionale reale priva di zeri immaginari puri conviene effettuare la decomposizione di R in funzioni semplici reali del tipo

$$\frac{c}{(s-a)^k} \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0) \quad \text{o} \quad \frac{cs+d}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^k} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R},\, \alpha \neq 0)$$

si distingue poi a seconda del segno di a e di α.

Se $a < 0$ e $\Lambda f(s) = \dfrac{c}{(s-a)^k}$ si ha

$$\widehat{f}(\xi) = \Lambda f(i\xi) = \frac{c}{(i\xi - a)^k};$$

se $a > 0$ e $\Lambda f(s) = \dfrac{c}{(-s-a)^k}$ allora

$$\widehat{\widetilde{f}}(\xi) = \widetilde{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \Lambda f(-i\xi) = \frac{c}{(i\xi - a)^k}:$$

$\widetilde{f}$ è pertanto l'originale di $\dfrac{c}{(i\xi - a)^k}$.

Analogamente, se $\alpha < 0$ e $\Lambda f(s) = \dfrac{cs+d}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^k}$ con poli in $\alpha \pm i\beta$ si ha

$$\widehat{f}(\xi) = \Lambda f(i\xi) = \frac{ci\xi + d}{[(i\xi - \alpha)^2 + \beta^2]^k};$$

se $\alpha > 0$ e $\Lambda f(s) = \dfrac{c(-s)+d}{[(-s-\alpha)^2+\beta^2]^k}$ allora

$$\widehat{\widetilde{f}}(\xi) = \widetilde{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \Lambda f(-i\xi) = \frac{ci\xi + d}{[(i\xi - \alpha)^2 + \beta^2]^k}:$$

$\widetilde{f}$ è pertanto l'originale di $\dfrac{ci\xi + d}{[(i\xi - \alpha)^2 + \beta^2]^k}$.

Siano infatti f, g tali che

$$\Lambda g(s) = \frac{cs+d}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^k}.$$

Esempio 3.4. Determinare l'originale di Fourier di $\dfrac{1}{-\xi^2 + 2i\xi + 2}$.
Scriviamo la funzione razionale in termini di $i\xi$: si ha

$$-\xi^2 + 2i\xi + 2 = (i\xi)^2 + 2(i\xi) + 2$$

I poli di $R(s) = s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$ sono $-1 \pm i$, entrambi sul semipiano $\operatorname{Re}(s) < 0$: se f è tale che $\Lambda(f)(s) = R(s)$ si ha allora $\widehat{f}(\xi) = R(i\xi)$. Antitrasformando alla Laplace si trova subito

$$f(t) = \Lambda^{-1} \frac{1}{(s+1)^2+1} = \Lambda^{-1}\left(\tau_{-1} \frac{1}{s^2+1}\right) = e^{-t} \sin t H(t).$$

ESEMPIO 3.5. Determinare l'originale di Fourier di $\dfrac{1}{-\xi^2 - 2i\xi + 2}$.
Scriviamo la funzione razionale in termini di $i\xi$: si ha

$$-\xi^2 - 2i\xi + 2 = (i\xi)^2 - 2(i\xi) + 2$$

I poli di $R(s) = \dfrac{1}{s^2 - 2s + 2} = \dfrac{1}{(s-1)^2 + 1}$ sono $1 \pm i$, entrambi sul semipiano $\operatorname{Re}(s) > 0$: l'ascissa di convergenza dell'antitrasformata di Laplace f di R è ora strettamente positiva, non ha quindi senso calcolare $\Lambda f(i\xi)$ dato che $\operatorname{Re} i\xi = 0 < \rho(f)$. Consideriamo la simmetrizzata di R

$$\widetilde{R}(s) = R(-s) = \frac{1}{(-s-1)^2 + 1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}:$$

ora i poli di $\widetilde{R}$ sono $-1 \pm i$ e siamo ricondotti all'esempio precedente. Se $f(t) = e^{-t} \sin t H(t)$ si ha $\widehat{f}(\xi) = \tilde{R}(\xi)$ da cui $\widehat{\widetilde{f}}(\xi) = R(\xi)$: l'originale cercato è quindi $\widetilde{f}(t) = -e^t \sin t H(-t)$. Confrontare con quanto trovato nell'esempio analogo usando la formula di antitrasformazione di Fourier (versione puntuale).

ESERCIZIO 3.16. Determinare con il metodo illustrato sopra l'originale di Fourier di

$$\frac{1}{i\xi - 1} + \frac{i\xi - 1}{(i\xi + 3)^2 + 4}$$

(Sugg.: Trovare gli originali di Fourier di entrambi gli addendi, poi sommarli)

ESERCIZIO 3.17. Sia α reale; si ponga $f_\alpha(t) = e^{-t} t^{\alpha - 1} H(t)$. Dire per quali α si ha $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$; trovare poi la trasformata di Fourier di f_α, dalla trasformata di Laplace di f_α (mostrare prima che l'ascissa di convergenza di f_α è strettamente negativa). Dire poi per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $f_\alpha \in L^2(\mathbb{R})$. Supposto che sia f_α, f_β in $L^2(\mathbb{R})$ mostrare che si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{(1+i\nu)^\alpha (1-i\nu)^\beta} = \frac{4\pi}{(\alpha+\beta-1)2^{\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(= \frac{4\pi}{(\alpha+\beta-1)2^{\alpha+\beta}} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \right)$$

Dedurne la *formula di duplicazione per la funzione* Γ (Gauss-Legendre):

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(p)\Gamma(p+1/2) \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

Risoluzione. Per l'appartenenza ad $L^1(\mathbb{R})$ basta vedere attorno a $t = 0$; per $t \to 0^+$ la funzione è asintotica a $1/t^{1-\alpha}$, sommabile se e solo se $1 - \alpha < 1 \iff \alpha > 0$. L'ascissa di convergenza di f_α è -1, come risulta dalla formula per la traslata della trasformata. Si ha

$$\Lambda f_\alpha(s) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(s+1)^\alpha};$$

la trasformata di Fourier si ottiene ponendo in questa formula $i\nu$ in luogo di s e quindi è

$$\widehat{f_\alpha}(\nu) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(i\nu + 1)^\alpha} = \Gamma(\alpha) \frac{1}{(1+i\nu)^\alpha}.$$

Dato che $f_\alpha \in L^2(\mathbb{R})$ vuol dire $(f_\alpha)^2 \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $f_\alpha \in L^2(\mathbb{R})$ se e solo se $2\alpha - 2 > -1 \iff 2\alpha > 1 \iff \alpha > 1/2$. Quindi, se $\alpha, \beta > 1/2$ si può fare il prodotto scalare di f_α ed f_β , e per il teorema di Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t) f_\beta(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f_\alpha(\nu) \overline{\mathcal{F} f_\beta(\nu)}\, d\nu = \frac{1}{2\pi} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{(1+i\nu)^\alpha (1-i\nu)^\beta}$$

D'altra parte:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t) f_\beta(t) H(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} t^{\alpha+\beta-2} H(t)\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{2^{\alpha+\beta-1}} = \frac{1}{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{2^{\alpha+\beta-1}};$$

(abbiamo usato la formula per la trasformata di Laplace di $t^{\alpha+\beta-2}H(t)$, e l'identità fondamentale per la funzione Γ). Uguagliando si ha

$$\frac{1}{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{2^{\alpha+\beta-1}} = \frac{1}{2\pi} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{(1+i\nu)^\alpha (1-i\nu)^\beta},$$

e quindi il risultato.

Posto nella formula $\alpha = \beta = p$ si ha il risultato ($p > 1/2$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{(1+\nu^2)^p} = \frac{4\pi}{(2p-1)2^{2p}} \frac{\Gamma(2p)}{(\Gamma(p))^2};$$

si ha ora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{(1+\nu^2)^p} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{d\nu}{(1+\nu^2)^p} = \int_{0}^{+\infty} \frac{\xi^{-1/2}}{(1+\xi)^p}\, d\xi$$

(si è posto sopra $\nu = \sqrt{\xi}$; si usano ora le formule 90, 91 del formulario):

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\xi^{1/2-1}}{(1+\xi)^{(p-1/2)+1/2}}\, d\xi = B(1/2, p-1/2) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(p)};$$

si ha quindi la relazione

$$\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(p)} = \frac{4\pi}{(2p-1)2^{2p}} \frac{\Gamma(2p)}{(\Gamma(p))^2},$$

che permette di concludere. □

3.8 Trasformata di una funzione periodica

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodica di periodo τ localmente in L^1. È facile vedere che Hf è assolutamente $L-$trasformabile con ascissa di convergenza assoluta $\rho(f) \le 0$ (si può vedere anzi che è $\rho(f) = 0$) e che si ha

$$\Lambda Hf(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-st} f(t)H(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} e^{-st} f(t)\, dt =$$

(posto $t = k\tau + \theta$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk\tau} \int_{0}^{\tau} e^{-s\theta} f(k\tau+\theta)\, d\theta = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s\tau})^k\right) \int_{0}^{\tau} e^{-s\theta} f(\theta)\, d\theta =$$
$$\frac{\int_0^\tau e^{-s\theta} f(\theta)\, d\theta}{1-e^{-s\tau}}.$$

Esercizio 3.18. Trasformata di $H(t)q(t)$, dove $q(t) = \chi_{[0,\tau/2[} - \chi_{[\tau/2,\tau[}$, prolungata poi in periodicità τ, è l'onda quadra.

Risoluzione. Si ha dalla formula sopra scritta:

$$\Lambda(Hq)(s) = \frac{1}{1-e^{-s\tau}} \left(\int_{0}^{\tau/2} e^{-st}\, dt - \int_{\tau/2}^{\tau} e^{-st}\, dt\right) = \frac{1}{1-e^{-s\tau}} \left(\frac{1-e^{-s\tau/2}}{s} - \frac{e^{-s\tau/2}-e^{-s\tau}}{s}\right) =$$
$$\frac{1-2e^{-s\tau/2}+e^{-s\tau}}{s(1-e^{-s\tau})} = \frac{1}{s}\frac{(1-e^{-s\tau/2})^2}{1-e^{-s\tau}} = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-s\tau/2}}{1+e^{-s\tau/2}} = \frac{1}{s}\tanh(s\tau/4);$$

la conclusione è raggiunta. □

Esercizio 3.19. Trasformare alla Laplace:

$$H(t)\operatorname{frac}(t/\tau); \quad H(t)|\sin(2\pi t/\tau)|; \quad H(t)\max\{\sin(\omega t), 0\} \quad (\omega > 0).$$

Alcune considerazioni sulla formula precedente sono istruttive. La trasformata di Hf si presenta come quoziente di $s \mapsto \int_0^\tau e^{-s\theta} f(\theta)\, d\theta$, trasformata della funzione a supporto compatto $f\chi_{[0,\tau]}$, che è olomorfa intera, per la funzione $s \mapsto 1 - e^{-s\tau}$, pure olomorfa intera, che ha zeri di molteplicità 1 in tutti i punti

s_k tali che $s_k\tau = 2k\pi i$, e quindi $s_k = 2ki\pi/\tau = i\omega k$, avendo posto $\omega = 2\pi/\tau$ $(k \in \mathbb{Z})$. La trasformata $\Lambda Hf(s)$ ha quindi in s_k poli del primo ordine, oppure singolarità eliminabili, con residuo

$$\operatorname{Res}(\Lambda Hf, i\omega k) = \frac{\int_0^\tau e^{-i\omega k\theta} f(\theta)\, d\theta}{\tau e^{-i\omega k\tau}} = \int_0^\tau e^{-i\omega k\theta} f(\theta)\, \frac{d\theta}{\tau} = c_k(f),$$

che è *esattamente il $k-$esimo coefficiente di Fourier di f.*

Esercizio 3.20. Trovare l'originale di Laplace di $\tanh(s/4)/s$, tentando di ricondursi alla trasformata di una funzione periodica.

Risoluzione.

$$\frac{\tanh(s/4)}{s} = \frac{1}{s}\frac{e^{s/4} - e^{-s/4}}{e^{s/4} + e^{-s/4}} = \frac{1}{s}\frac{1 - e^{-s/2}}{1 + e^{-s/2}} =$$

(moltiplicando numeratore e denominatore per $1 - e^{-s/2}$)

$$\frac{(1 - e^{-s/2})^2}{s}\frac{1}{1 - e^{-s}} = \left(\frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s/2}}{s} + \frac{e^{-s}}{s}\right)\frac{1}{1 - e^{-s}}.$$

Se il termine in parentesi è la trasformata di una funzione che ha supporto contenuto in $[0, 1]$, allora la funzione data è la trasformata del prolungamento per periodicità in periodo 1 di tale funzione. Ed infatti si ha

$$\Lambda^{-1}\left(\frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s/2}}{s} + \frac{e^{-s}}{s}\right) = H - 2\tau_{1/2}H + \tau_1 H,$$

che vale 0 per $t < 0$ e per $t \geq 1$, vale 1 per $0 \leq t < 1/2$, e vale -1 per $1/2 \leq t < 1$. Il prolungamento per periodicità è un'onda quadra di cui $\tanh(s/4)/s$ è trasformata di Laplace. □

Esercizio 3.21. Sia

$$h(s) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}}\left[\frac{e^{-2\pi s} - e^{2\pi}}{s + 1} + e^{2\pi}\frac{e^{-2\pi s} - 1}{s^2 + 1}\right], \quad s \in \mathbb{C}.$$

Provare che h è la trasformata di Laplace di una funzione periodica f da determinare.

3.9 Teoremi del valore iniziale e finale

Abbiamo visto che se f è di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti e continua su $[0, +\infty[$ e la derivata f' è assolutamente $L-$trasformabile allora f è $L-$trasformabile e si ha

$$\Lambda(f')(s) = s\Lambda(f)(s) - f(0^+);$$

da ciò segue in particolare che

$$\lim_{s\to+\infty} s\Lambda(f)(s) = f(0^+), \tag{*}$$

essendo $\lim_{s\to+\infty} \Lambda(f')(s) = 0$. Proviamo ora che la formula precedente vale sotto condizioni molto meno restrittive.

Teorema 3.18. *Siano $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ e $\alpha > -1$. Allora:*

(i) Teorema del valore iniziale *Se si ha $\lim_{t\to0^+} \frac{f(t)}{t^\alpha} = L$, ed f è assolutamente $L-$trasformabile, si ha*

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{s^{\alpha+1}\Lambda f(s)}{\Gamma(\alpha + 1)} = L.$$

(ii) Teorema del valore finale *Se si ha $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} = L$, allora $\rho(f) \leq 0$, e si ha*

$$\lim_{s\to0^+} \frac{s^{\alpha+1}\Lambda f(s)}{\Gamma(\alpha + 1)} = L.$$

Osservazione 16.

- Occorre una precisazione: siccome la funzione f è definita a meno di un insieme di misura nulla, è necessario dire cosa si intende per limite. Diciamo che f ha limite L per $t \to +\infty$ se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$|f(t) - L| \leq \varepsilon \quad \text{q.o. per} \quad t \geq R$$
Analogamente, f ha limite L per $t \to 0^+$ se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$|f(t) - L| \leq \varepsilon \quad \text{q.o. per} \quad t \in]0, \delta[$$
- Nel caso $\alpha = 0$, il teorema del valore iniziale generalizza $(*)$ (per la quale si richiedevano ipotesi più restrittive su f).
- Come conseguenza del teorema del valore iniziale, se $L \neq 0$ e $f(t) \sim Lt^\alpha$ per $t \to 0^+$ allora $\Lambda f(s) \sim L\Lambda(t^\alpha H(t))(s)$ per $s \to +\infty$; segue invece dal teorema del valore finale che, sempre per $L \neq 0$, se $f(t) \sim Lt^\alpha$ per $t \to +\infty$ allora $\Lambda f(s) \sim L\Lambda(t^\alpha H(t))(s)$ per $s \to 0^+$. Attenzione: non è vero in generale che se $f \sim g$ per $t \to +\infty$ sono assolutamente $L-$-trasformabili allora $\Lambda f(s) \sim \Lambda g(s)$ per $s \to 0^+$: considerare ad esempio le funzioni $(e^{-t} + e^{-2t})H(t)$ e $e^{-t}H(t)$.

Cominciamo con un Lemma, che in realtà tratta due casi particolari dell'enunciato del Teorema: quelli di una funzione f che è a supporto in $[a, +\infty[$ con $a > 0$ (e che quindi vale 0 in 0) e di una funzione che è a supporto compatto (in particolare nulla all'infinito).

Lemma. Sia f una funzione $L-$trasformabile.

- Se f è nulla q.o. in un intorno di 0 allora $\lim_{s\to+\infty} \frac{s^{\alpha+1}\Lambda f(s)}{\Gamma(\alpha+1)} = 0$ per ogni $\alpha > -1$;
- Se f è nulla q.o. in un intorno di $+\infty$ (cioè su $[a, +\infty[$ per qualche $a > 0$) allora $\lim_{s\to 0} \frac{s^{\alpha+1}\Lambda f(s)}{\Gamma(\alpha+1)} = 0$ per ogni $\alpha > -1$.

Esempio 3.6. Considerare le funzioni $\sin tH(t)$ e $\cos tH(t)$ e verificare direttamente la validità del teorema per i vari valori di α. Osservare inoltre che, per alcuni valori di α, il limite $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{s^{\alpha+1}\Lambda f(s)}{\Gamma(\alpha+1)}$ vale 0 senza che esista il limite $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}$: dunque il risultato non si può invertire.

Dimostrazione. Sia $g = f - aH$; si ha che g verifica le ipotesi con $a = 0$, e si ha $s\Lambda g(s) = s\Lambda f(s) - a$; $\lim_s s\Lambda g(s) = 0$ equivale a $\lim_s s\Lambda f(s) = a$; basta quindi provare il caso $a = 0$.

Valore finale: fissato $\varepsilon > 0$, sia $M > 0$ tale che sia $|f(t)| \leq \varepsilon$ per $t \geq M$. Si ha, per $p = \operatorname{Re} s > 0$:

$$|\Lambda f(s)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt\right| = \left|\int_0^M f(t)e^{-st}\,dt + \int_M^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt\right| \leq$$
$$\left|\int_0^M f(t)e^{-st}\,dt\right| + \int_M^{+\infty} |f(t)|e^{-pt}\,dt \leq \left|\int_0^M f(t)e^{-st}\,dt\right| + \int_M^{+\infty} \varepsilon e^{-pt}\,dt = \left|\int_0^M f(t)e^{-st}\,dt\right| + \varepsilon\frac{e^{-pM}}{p}$$

Posto $f_M = f\chi_{[0,M]}$, la funzione f_M è a supporto compatto, quindi la sua trasformata di Laplace $\Lambda f_M(s) = \int_0^M f(t)e^{-st}\,dt$ è olomorfa intera. Si ha insomma

$$|\Lambda f(s)| \leq |\Lambda f_M(s)| + \varepsilon\frac{e^{-pM}}{p} \quad \text{da cui} \quad |s\Lambda f(s)| \leq |s\Lambda f_M(s)| + \varepsilon|s|\frac{e^{-pM}}{p}$$

Si ha ora $\lim_{s\to 0} s\Lambda f_M(s) = 0$, essendo $\Lambda f_M(s)$ olomorfa anche in $s = 0$; inoltre, se $s = p + i\omega$ si ha

$$\frac{|s|}{p} = \sqrt{1 + (\omega/p)^2} \leq \sqrt{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

se $s \in A(0, \alpha]$. La conclusione è ormai facile.

Valore iniziale: anche qui, fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che sia $|f(t)| \leq \varepsilon$ per $t \in]0, r]$; si ha

$$|\Lambda f(s)| = \left|\int_0^r f(t)e^{-st}\,dt + \int_r^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt\right| \leq \left|\int_0^r f(t)e^{-st}\,dt\right| + \left|\int_r^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt\right| \leq$$

(si maggiora il primo integrale, e si pone nel secondo $t = r + u$)

$$\int_0^r |f(t)|e^{-pt}\,dt + \left|\int_0^{+\infty} f(r+u)e^{-sr-su}\,du\right| \le \varepsilon\frac{1-e^{-pr}}{p} + e^{-pr}|\Lambda f_r(s)|,$$

dove $f_r(u) = f(u+r)$ per $u \ge 0$, $f_r(u) = 0$ per $u < 0$; si vede subito che è $\rho(f_r) \le \rho(f)$. Si ha insomma, moltiplicando per $|s|$:

$$|s\Lambda f(s)| \le \varepsilon\frac{|s|}{p}(1-e^{-pr}) + |s|e^{-pr}|\Lambda f_r(s)| \le \frac{1}{\cos\alpha}\left(\varepsilon(1-e^{-pr}) + pe^{-pr}|\Lambda f_r(s)|\right).$$

Si conclude, ricordando anche che $\Lambda f_a(s)$ tende a zero per $s \to \infty$ con $\mathrm{Re}\, s$ che si mantiene maggiore di un conveniente numero reale.

□

3.10 Convoluzione in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$

Si sa che $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ è un'algebra rispetto alla convoluzione: se $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ allora

$$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta = \int_0^t f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta,$$

esiste ed è ancora in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, come si vede usando il teorema di Fubini–Tonelli: la cosa è già stata discussa in precedenza. Osserviamo che se $H = \chi_{\mathbb{R}_+}$ è lo scalino di Heaviside, per ogni $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ si ha

$$H * f(t) = \int_0^t f(\theta)\,d\theta,$$

in altre parole la convoluzione con H è l'operatore che associa ad $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ la sua funzione integrale di punto iniziale 0 (tale funzione è continua su $\mathbb{R}$, è ovviamente nulla su $]-\infty, 0[$, ed è derivabile, con derivata quasi ovunque coincidente con f; questo è il teorema di derivazione di Lebesgue). Si ha in particolare

$$H^{*2}(t) = H * H(t) = \int_0^t d\theta = t \qquad t \ge 0;$$

in altre parole si ha $H^{*2}(t) = tH(t)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$; iterando il procedimento, non è difficile vedere (fare induzione su m) che per ogni intero $m \ge 1$ si ha

$$H^{*m}(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}H(t) \qquad t \in \mathbb{R};$$

data una funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ la funzione

$$H^{*m} * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\theta)^{m-1}}{(m-1)!} f(\theta)\,d\theta,$$

è pertanto quella primitiva di ordine m di f che è nulla in 0 assieme con le sue derivate fino all'ordine $m-1$; è una funzione che appartiene a $C^{m-1}(\mathbb{R})$, con derivata $(m-1)-$esima assolutamente continua, quindi con derivata $m-$esima esistente q.o., e q.o. coincidente con f. Nel caso di f continua, tutto ciò era ben noto, grazie alla formula di Taylor con il resto in forma integrale. Si può generalizzare ponendo, per definizione, quando $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $H^{*\alpha}(t) = (t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha))H(t)$; si ha

$$H^{*\alpha} * H^{*\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1}\theta^{\beta-1}\,d\theta = (\text{posto } \theta = tu) =$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-u)^{\alpha-1}\theta^{\beta-1}u^{\beta-1}\theta\,du = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}\,du = t^{\alpha+\beta-1}\frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} =$$
$$\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (t > 0) \quad \text{cioè} \quad H^{*\alpha} * H^{*\beta} = H^{*(\alpha+\beta)} \quad \text{per} \quad \mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta > 0.$$

Esercizio 3.22. Mostrare che si ha, per $t > 0$:

$$\int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{(t-\theta)\theta}} = \pi.$$

Osservazione 17. Sia $h \in \mathrm{L}^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$ assolutamente L–trasformabile; vogliamo l'antitrasformata di $\Lambda h(s)/s^m$, dove $m \geq 1$ è intero. Per quanto sopra visto essa è $H^{*m} * h$, e quindi è quella primitiva di ordine m di h che è nulla in 0, insieme con le sue derivate prima, seconda, ..., $(m-1)$–esima. Insomma $g(t) = \Lambda^{-1}(\Lambda h(s)/s^m)(t)$ è individuato dall'essere $g^{(m)}(t) = h(t)$, nonché $g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(m-1)}(0) = 0$. Quest'osservazione può essere utile nel calcolo di antitrasformate; se ad esempio si vuole antitrasformare $1/(s^2(s^2+\omega^2))$ si nota che $\Lambda^{-1}(1/(s^2+\omega^2))(t) = \sin(\omega t)\,H(t)/\omega$; la richiesta antitrasformata $g(t)$ è quindi individuta dall'essere, per $t \geq 0$:

$$g''(t) = \sin(\omega t)/\omega; \qquad g(0) = g'(0) = 0;$$

ne segue $g'(t) = -(\cos(\omega t))/\omega^2 + c$, da cui $g'(t) = (1-\cos(\omega t))/\omega^2$, dovendo essere $g'(0) = 0$; un'ulteriore integrazione porge $g(t) = t/\omega^2 - \sin\omega t/\omega^3 + k$ (sempre per $t \geq 0$), e la condizione $g(0) = 0$ dice che $k = 0$; in definitiva:

$$g(t) = \frac{\omega t - \sin(\omega t)}{\omega^3}\,H(t).$$

Naturalmente in certi casi la ricerca delle primitive può essere onerosa, ed essere invece conveniente usare altri metodi.

3.11 La funzione di Bessel di indice 0

La funzione in $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$ la cui trasformata di Laplace è $1/(s-\lambda)^\beta$, con $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ (altrimenti questa non è trasformata di una funzione nulla su $]-\infty, 0[$) è (si ricordi che si ha $\Lambda((\#)^\alpha H)(s) = \Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1}$ se $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$) la funzione $t \mapsto e^{\lambda t} t^{\beta-1} H(t)/\Gamma(\beta)$. Ne viene che l'antitrasformata di $1/\sqrt{1+s^2}$ è, scritto $\sqrt{1+s^2} = \sqrt{s+i}\sqrt{s-i}$ ($\alpha = -1/2$)

$$\Lambda^{-1}(1/\sqrt{1+s^2})(t) = \Lambda^{-1}(1/\sqrt{s+i}) * \Lambda^{-1}(1/\sqrt{s-i}) = \left(\frac{e^{-it}}{\Gamma(1/2)} t^{-1/2} H\right) * \left(\frac{e^{it}}{\Gamma(1/2)} t^{-1/2} H\right)(t) =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{e^{-i(t-\theta)}}{\sqrt{t-\theta}}\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\theta}}\,d\theta = (\text{posto } \theta = tu) = \frac{e^{-it}}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{2itu}}{\sqrt{u(1-u)}}\,du \quad (t \geq 0).$$

Per ottenere un'espressione più simmetrica per l'ultimo integrale, facciamo l'ulteriore cambiamento di variabili $u = (v+1)/2$, che riporta l'integrale all'intervallo $[-1, 1]$:

$$\Lambda^{-1}(1/\sqrt{1+s^2})(t) = \frac{e^{-it}}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{e^{it(v+1)}}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{e^{itv}}{\sqrt{1-v^2}}\,dv \quad (t \geq 0);$$

La formula

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{e^{ixv}}{\sqrt{1-v^2}}\,dv \qquad x \in \mathbb{C},$$

definisce una funzione olomorfa intera che è la funzione di Bessel di indice 0. Essa è la trasformata di Fourier della funzione a supporto compatto $v \mapsto 1/\pi\sqrt{1-v^2}$, nulla per $|v| \geq 1$.

Esercizio 3.23. Mostrare direttamente che la trasformata di Laplace di $J_0 H$ è $1/\sqrt{1+s^2}$.

Risoluzione. Supposto s reale, $s > 0$ si ha:

$$\Lambda\pi J_0 H(s) = \int_0^{+\infty}\left(\int_{-1}^1 \frac{e^{itv}}{\sqrt{1-v^2}}\,dv\right) e^{-st}\,dt = (\text{Fubini}) =$$
$$= \int_{-1}^1\left(\int_0^\infty e^{-(s-iv)t}\,dt\right)\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \int_{-1}^1 \frac{1}{(s-iv)\sqrt{1-v^2}}\,dv =$$
$$\int_{-1}^1 \frac{s+iv}{(s^2+v^2)\sqrt{1-v^2}}\,dv = (\text{simmetrie}) = 2s\int_0^1 \frac{dv}{(s^2+v^2)\sqrt{1-v^2}} =$$

(posto $v = \cos\theta$)

$$2s\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{s^2+\cos^2\theta} = 2s\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+s^2(1+\tan^2\theta)}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 2s\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+s^2)+(s\tan\theta)^2}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} =$$
$$\frac{2}{\sqrt{1+s^2}}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(s\tan\theta/\sqrt{1+s^2})^2}\frac{s\,d\theta}{\sqrt{1+s^2}\cos^2\theta} = \frac{2}{\sqrt{1+s^2}}\left[\arctan\left(s\tan\theta/\sqrt{1+s^2}\right)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+s^2}}.$$

□

Esercizio 3.24. Cercare la soluzione assolutamente trasformabile dell'equazione di Bessel

$$ty'' + y' + ty = 0$$

Risoluzione. Posto $u(s) = \Lambda y(s)$ si ottiene, se $y(0^+) = \alpha,\ y'(0^+) = \beta$:

$$-\frac{d}{ds}(s^2 u(s) - \alpha s - \beta) + (su(s) - \alpha) - \frac{d}{ds}u(s) = 0,$$

cioè

$$-2su(s) - s^2 u'(s) + \alpha + su(s) - \alpha - u'(s) = 0 \iff (1+s^2)u'(s) = -su(s) \iff u'(s) = \frac{-s}{1+s^2}u(s);$$

le soluzioni sono

$$u(s) = ke^{-\log(1+s^2)/2} = \frac{k}{\sqrt{1+s^2}},$$

che si antitrasformano in $kJ_0H(t)$. Per ottenere la condizione iniziale si pone $k = \alpha$; in ogni caso si ha $y'(0^+) = 0$, come del resto risulta dall'equazione stessa. □

Esercizio 3.25. Cercare $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ tale che sia

$$\int_0^t u(t-\theta)u(\theta)\,d\theta = H(t)\sin t, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Risoluzione. $J_0(t)H(t)$. □

Esercizio 3.26. Utilizzando le trasformate di Laplace trovare la soluzione dell'equazione

$$tu''(t) + u'(t) + tu(t) = 0 \quad u(0) = 1; \quad u'(0) = 0. \quad (R : J_0(t)).$$

3.12 Risoluzione di equazioni lineari con la trasformazione di Laplace

Data l'equazione di ordine n, lineare a coefficienti costanti

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = \sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)} = b(t),$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, e b continua a tratti, se ne cercano le soluzioni con supporto contenuto in $[0, +\infty[$, di classe $\mathcal{C}^{n-1}$ e $\mathcal{C}^n$ a tratti su $[0, +\infty[$ soddisfacenti alle condizioni iniziali $u(0^+) = \alpha_0, u'(0^+) = \alpha_1, \ldots, u^{(n-1)}(0^+) = \alpha_{n-1}$. Si dimostra facilmente che esiste unica una soluzione siffatta.

Si ha allora (posto $a_n = 1$):

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(s^k \Lambda u(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j} u^{(j-1)}(0^+) \right) = \Lambda b(s)$$

da cui

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k \right) \Lambda u(s) = \Lambda b(s) + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} s^{k-j} \alpha_{j-1} \right);$$

si ottiene quindi, posto $\chi(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$, *polinomio caratteristico* dell'equazione:

$$\Lambda u(s) = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} s^{k-j} \alpha_{j-1} \right)}{\chi(s)} + \frac{\Lambda b(s)}{\chi(s)}.$$

È evidente che questa è immagine di Laplace di una funzione: sia

$$\varphi_\alpha(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} s^{k-j} \alpha_{j-1} \right) / \chi(s)$$

che $1/\chi(s)$ sono funzioni razionali proprie, e come tali immagini di Laplace di un'unica funzione. Si ha quindi, per $t \geq 0$:

$$u(t) = \Lambda^{-1}\varphi_\alpha(t) + \eta * b(t),$$

dove $\eta(t)$, *risolvente* dell'equazione data, è la preimmagine di Laplace di $1/\chi(s)$. Si noti che se $b = 0$ identicamente allora $\Lambda^{-1}\varphi_\alpha$ è quella soluzione dell'equazione omogenea che ha $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ come condizioni iniziali. Il caso particolare $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-2} = 0$ ed $\alpha_{n-1} = 1$ porge $\varphi_\alpha(s) = 1/\chi(s)$; ne segue che il risolvente η è quella soluzione dell'omogenea associata che soddisfa alle condizioni iniziali $(0, 0, \dots, 0, 1)$. La soluzione della non omogenea con condizioni iniziali identicamente nulle è

$$u(t) = \eta * b(t) = \int_0^t \eta(t - \theta) b(\theta)\, d\theta.$$

Ed a posteriori, derivando tale funzione sotto il segno di integrale, si vede che essa fornisce sempre una soluzione dell'equazione data, anche se il dato b non era assolutamente $L-$trasformabile.

Naturalmente il metodo risolutivo per l'equazione omogenea associata coincide essenzialmente con quello già conosciuto: antitrasformando la funzione $\varphi_\alpha(s)/\chi(s)$ si ritrova esattamente una combinazione lineare di funzioni quali $t^r e^{\lambda t}$, con λ radice del polinomio caratteristico $\chi(s)$, ed $r = 0, 1, \dots, m_\lambda - 1$, se la radice λ ha molteplicità m_λ. Ed anche la soluzione della non omogenea è quella già nota dal metodo di variazione delle costanti; in sostanza, tutte le formule per la risoluzione delle equazioni lineari erano già conosciute. Ma il metodo delle trasformate di Laplace è uniforme, facile da ricordare, fornisce la soluzione anche per i sistemi lineari, e permette gli stessi metodi risolutivi anche quando si usano funzioni generalizzate, ed è per questa ragione di gran lunga il favorito di tutti gli elettrici.

Esempio 3.7. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = \chi_{[0,1]}(t) \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Risoluzione. Il polinomio caratteristico è $\chi(s) = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$; si ha $\varphi_a(s) = (2+s)/(s+1)^2 = 1/(s+1) + 1/(s+1)^2$, con preimmagine di Laplace $e^{-t}(1+t)H(t)$, mentre il risolvente è $\Lambda^{-1}(1/\chi)(t) = te^{-t}H(t)$. Ne segue che la soluzione è

$$u(t) = e^{-t}(1+t)H(t) + \int_0^t (t-\theta)e^{-(t-\theta)}\chi_{[0,1]}(\theta)\, d\theta \qquad t \geq 0.$$

L'integrale non presenta difficoltà, è solo noioso:

$$\int_0^t (t-\theta)e^{-(t-\theta)}\chi_{[0,1]}(\theta)\, d\theta = e^{-t}\left(\int_0^t te^\theta \chi_{[0,1]}(\theta)\, d\theta - \int_0^t \theta e^\theta \chi_{[0,1]}(\theta)\, d\theta \right) =$$

se $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} &e^{-t}\left(t[e^\theta]_0^t - \left[\theta e^\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=t} + \int_0^t e^\theta\, d\theta \right) = e^{-t}(te^t - t - te^t + e^t - 1) = \\ &e^{-t}(e^t - t - 1) = 1 - te^{-t} - e^{-t}, \end{aligned}$$

mentre, se $t > 1$ si ottiene:

$$e^{-t}(t(e-1) - e + e - 1) = e^{-t}(t(e-1) - 1) = (e-1)te^{-t} - e^{-t}.$$

Comunque si poteva anche trasformare $\chi_{[0,1]}$ ottenendo $(1 - e^{-s})/s$; si ha quindi

$$\frac{1}{\chi(s)}\Lambda\chi_{[0,1]}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{1+s-s}{(s+1)^2}\frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{1}{s+1}\frac{1-e^{-s}}{s} - \frac{1-e^{-s}}{(s+1)^2} =$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s}-\frac{1-e^{-s}}{s+1}-\frac{1-e^{-s}}{(s+1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{e^{-s}}{s+1}-\left(\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\right);$$

antitrasformando

$$H(t)-H(t-1)-e^{-t}H(t)+e^{-(t-1)}H(t-1)-\Big(e^{-t}tH(t)-e^{-(t-1)}(t-1)H(t-1)\Big).$$

Tale funzione, per $0\le t<1$ vale $1-e^{-t}-te^{-t}$, mentre se $t>1$ vale

$$1-1-e^{-t}+e^{-(t-1)}-te^{-t}+(t-1)e^{-(t-1)}=e^{-t}(-1+e-t+te-e)=e^{-t}(t(e-1)-1),$$

in accordo con il precedente risultato. □

Esempio 3.8. (dalle dispense di N.Trevisan) Avendo un circuito "RC passa basso" schematizzato in figura, con $b(t)$ la tensione in ingresso, $u(t)$ quella in uscita, esso obbedisce all'equazione $Tu'+u=b(t)$, dove $T=RC$ è costante. Vediamo la risposta ad un impulso rettangolare $b(t)=k\chi_{[0,a[}(t)$ (è sottinteso che $u(0)=0$). Trasformando alla Laplace si ha

$$s\Lambda u(s)+\frac{1}{T}\Lambda u(s)=\frac{k}{T}\frac{1-e^{-as}}{s}\quad\text{da cui}\quad\Lambda u(s)=\frac{k}{T}\frac{1-e^{-as}}{s(s+1/T)}=$$
$$k\left(\frac{1/T}{s(s+1/T)}-\frac{(1/T)e^{-as}}{s(s+1/T)}\right)=k\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/T}-\frac{e^{-as}}{s}+\frac{e^{-as}}{s+1/T}\right),$$

ed antitrasformando

$$u(t)=k\chi_{[0,a[}(t)-ke^{-t/T}H(t)+kH(t-a)e^{-(t-a)/T}=k(1-e^{-t/T})\chi_{[0,a[}(t)+k(e^{a/T}-1)e^{-t/T}H(t-a).$$

Dal grafico di u si vede che il condensatore si carica fino a che dura l'impulso rettangolare ($t=a$), poi si scarica con andamento esponenziale.

Se si pone $k=1/a$ si ottiene a secondo membro

$$(1-e^{-t/T})\frac{\chi_{[0,a[}(t)}{a}+\frac{e^{a/T}-1}{a}e^{-t/T}H(t-a),$$

e se si fa tendere a a 0^+ il secondo membro converge puntualmente alla funzione

$$\frac{e^{-t/T}}{T}H(t),$$

che è esattamente $\Lambda^{-1}(1/(s+1/T))(t)$.

Esercizio 3.27. Risolvere l'equazione differenziale

$$y''+y'+y=\sin tH(t-\pi/2)\qquad y(0^+)=0,\ y'(0^+)=0.$$

Risoluzione. Si ha, trasformando, $\Lambda y''(s)=s^2\Lambda y(s)$, $\Lambda y'(s)=s\Lambda y(s)$; per trasformare $\sin tH(t-\pi/2)$ osserviamo che si ha $\sin tH(t-\pi/2)=\cos(\pi/2-t)H(t-\pi/2)=\cos(t-\pi/2)H(t-\pi/2)$, per cui è $\Lambda(\sin\#H(\#-\pi/2))(s)=e^{-s\pi/2}s/(s^2+1)$, in base al teorema sulla trasformata della traslata. Si ha quindi

$$(s^2+s+1)\Lambda y(s)=e^{-s\pi/2}\frac{s}{s^2+1}\quad\text{da cui}\quad\Lambda y(s)=e^{-s\pi/2}\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+s+1}.$$

Decomponiamo in frazioni semplici:

$$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+s+1)}=\frac{as+b}{s^2+1}+\frac{cs+d}{(s+1/2)^2+3/4};$$

si trova fra i numeratori:

$$s=(a+c)s^3+(a+b+d)s^2+(a+c+b)s+b+d,$$

valida se e solo se si ha $a+c=0$, $a+b+d=0$, $a+c+b=1$, $b+d=0$, da cui $a=0$, $b=1$, $c=0$, $d=-1$; insomma

$$\Lambda y(s)=e^{-s\pi/2}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{(s+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right);$$

l'antitrasformata è immediata:

$$y(t) =\tau_{\pi/2}\left(\sin tH(t)+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)H(t)\right)=$$
$$\left(\sin(t-\pi/2)+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-(t-\pi/2)/2}\sin(\sqrt{3}(t-\pi/2)/2)\right)H(t-\pi/2)$$

□

Esercizio 3.28. Determinare, utilizzando la trasformata di Laplace, la soluzione Laplace trasformabile di

$$y''-3y'+2y=8e^{2t}H(t),\quad y(0)=-6,\, y'(0)=10$$

Esempio 3.9. **Circuito** LCR Si ha un circuito elettrico, con induttanza L, resistenza R e capacità C; supposta nulla la carica del condensatore all'inizio, e che sia applicata un forza elettromotrice $V(t)$ al circuito (nulla prima di $t=0$) l'intensità $I(t)$ della corrente nel circuito obbedisce all'equazione integro–differenziale:

$$L\frac{d}{dt}I(t)+R\,I(t)+\frac{1}{C}\int_0^t I(\theta)\,d\theta=V(t).$$

La *risposta* del circuito alla sollecitazione $V(t)$ è la corrente $I(t)$. Usando le trasformate di Laplace si ottiene (poniamo $Z(s)=\Lambda I(s)$; si assume $I(0)=0$):

$$LsZ(s)+R\,Z(s)+\frac{1}{C}\frac{Z(s)}{s}=\Lambda V(s)\iff Z(s)=\frac{s}{Ls^2+Rs+1/C}\Lambda V(s);$$

detta $A(t)$ l'antitrasformata di $G(s)=s/(Ls^2+Rs+1/C)$ si ha quindi

$$I(t)=A*V(t),\qquad \text{risposta del circuito a } V.$$

cerchiamo le radici di $Ls^2+Rs+1/C=0$ trovando $(-R\pm\sqrt{R^2-4L/C})/(2L)$; si suppone $R^2<4L/C$ (resistenza piccola) e si trovano radici con parte reale negativa; posto $T=2L/R$ (T ha la dimensione di un tempo; più grande è T, e più lentamente si smorzano le oscillazioni)) le radici sono $-(1/T)\pm i\omega$, con $\omega=\sqrt{1/(LC)-\rho^2}$ *pulsazione propria* del circuito. Proseguendo:

$$\frac{s}{Ls^2+Rs+1/C}=\frac{1}{L}\frac{s}{(s+(1/T))^2+\omega^2}\quad\text{da cui}\quad A(t)=\frac{e^{-t/T}}{L}\left(\cos(\omega t)-\frac{\sin(\omega t)}{\omega T}\right)H(t)\quad T=2L/R,$$

con $\omega^2=1/(LC)-R^2/(4L^2)$.

3.12.1 Soluzioni periodiche

Apriamo una breve parentesi sulle soluzioni periodiche di equazioni lineari a coefficienti costanti con secondo membro periodico:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}=b(t),\tag{sol.per}$$

dove b è periodica di periodo $\tau>0$ e continua (ma si potrebbe generalizzare). Si dimostra che

se il polinomio caratteristico dell'equazione non ha $2ki\pi/\tau$ fra i suoi zeri, per nessun $k\in\mathbb{Z}$, allora l'equazione precedente ha un'unica soluzione periodica di periodo τ.

Un suggerimento per una dimostrazione generale si trova in Analisi Due/2, XII.4, Esercizio 3, ma tale soluzione è agevole solo nell'ambito dei sistemi. Vediamo comunque di farlo in pratica per un'equazione del primo ordine, per cui è facile. Prendiamola con coefficiente dominante 1:

$$y'+ay=b\qquad b \text{ periodica di periodo } \tau,\ a\in\mathbb{C} \text{ costante.}$$

La soluzione con $y(0)=\alpha$ si trova trasformando alla Laplace e si ha, posto al solito $u(s)=\Lambda y(s)$;

$$su(s)-\alpha+au(s)=\Lambda b(s)\iff u(s)=\frac{\alpha}{s+a}+\frac{\Lambda b(s)}{s+a}\iff y(t)=\alpha e^{-at}+e^{-at}\int_0^t e^{a\theta}b(\theta)\,d\theta$$

Per unicità della soluzione, y è periodica di periodo τ se e solo se si ha $y(0) = y(\tau)$, e cioè se e solo se

$$\alpha = \alpha e^{-a\tau} + e^{-a\tau}\int_0^\tau e^{a\theta} b(\theta)\,d\theta \iff \alpha(1 - e^{-a\tau}) = e^{-a\tau}\int_0^\tau e^{a\theta} b(\theta)\,d\theta,$$

equazione che se $1 - e^{-a\tau} \neq 0$ ha l'unica soluzione

$$\alpha = \frac{e^{-a\tau}}{1 - e^{-a\tau}}\int_0^\tau e^{a\theta} b(\theta)\,d\theta;$$

e la condizione $1 - e^{-a\tau} \neq 0$ equivale a $-a\tau \neq 2k\pi i$, e cioè a $-a \neq 2ki\pi/\tau$, come per l'appunto ipotizzato. Riprendendo l'equazione precedente (sol.per), supponiamo che sia $b(t) = e^{i\omega t}$, con ω reale; se $i\omega$ non è radice del polinomio caratteristico $\chi(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$, il metodo dei coefficienti indeterminati dice subito che si ha $e^{i\omega t}/\chi(i\omega)$ come soluzione periodica di periodo $\tau = 2\pi/\omega$. Se la risolvente $\eta(t) = \Lambda^{-1}G(s)$ (dove $G(s) = 1/\chi(s)$ è la funzione razionale reciproca del polinomio caratteristico), ha ascissa di convergenza strettamente negativa (il che equivale a supporre che le radici caratteristiche abbiano tutte parte reale strettamente negativa), $G(i\omega) = 1/\chi(i\omega)$ è esattamente la *trasformata di Fourier $\mathcal{F}\eta(\omega)$ di η, calcolata in ω* (in funzione della pulsazione ω invece che della frequenza). Si ha anzi la decomposizione seguente:

$$\eta * (e^{i\omega\#})(t) = \int_0^t e^{i\omega(t-\theta)}\eta(\theta)\,d\theta = e^{i\omega t}\int_0^t e^{-i\omega\theta}\eta(\theta)\,d\theta =$$
$$e^{i\omega t}\left(\int_0^{+\infty} e^{-i\omega\theta}\eta(\theta)\,d\theta - \int_t^{+\infty} e^{-i\omega\theta}\eta(\theta)\,d\theta\right) = \mathcal{F}\eta(\omega)e^{i\omega t} - e^{i\omega t}\int_t^{+\infty} e^{-i\omega\theta}\eta(\theta)\,d\theta,$$

dove $\mathcal{F}\eta(\omega)e^{i\omega t} = e^{i\omega t}/\chi(i\omega)(= G(i\omega)e^{i\omega t}$ è la soluzione periodica prima trovata col metodo dei coefficienti indeterminati; essa è il *regime permanente*, il resto (che è una soluzione dell'omogenea associata) fa parte del *transitorio*, e tende a zero all'infinito, tanto più rapidamente quanto più grandi sono i moduli delle parti reali delle radici caratteristiche. In generale, se si ha un'equazione lineare a coefficienti costanti, le soluzioni dell'equazione omogenea sono tutte infinitesime per $t \to +\infty$ esattamente quando le parti reali degli zeri del polinomio caratteristico sono tutte strettamente negative; se ciò avviene, ed il termine noto è periodico, tutte le soluzioni dell'equazione sono, per t grande, molto vicine all'unica soluzione periodica dell'equazione, donde il nome di *regime permanente* per essa.

3.13 Esercizi ricapitolativi

Esercizio 3.29. Servendosi della formula di inversione, e di opportuni integrali di circuito, calcolare l'antitrasformata di

$$\phi(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{1+s^2}.$$

Ritrovare poi il risultato con le regole di (anti-)trasformazione.

Risoluzione. La funzione ϕ ha poli del primo ordine nei punti $\pm i$. Per ogni $x > 0$ la funzione $\omega \mapsto \phi(x+i\omega) = e^{-2\pi x - 2\pi i\omega}/(1+(x+i\omega)^2)$ sta in $L^1(\mathbb{R})$ (per $\omega \to \pm\infty$ è dello stesso ordine di $1/\omega^2$). Per ogni tale x la formula di inversione è quindi applicabile; si tratta di calcolare

$$f(t) = \Lambda^{-1}\phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x+i\mathbb{R}} \phi(s)e^{st}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{x+i\mathbb{R}} \frac{e^{s(t-2\pi)}}{1+s^2}\,ds$$

Essendo $\lim_{s\to\infty} s/(1+s^2) = 0$, possiamo pensare di integrare su semicerchi di diametro $[x - ir, x + ir]$, di centro x; posto $s = x + \sigma$, si sceglie quello in cui $\operatorname{Re}\sigma(t - 2\pi) = (\operatorname{Re}\sigma)(t - 2\pi) \le 0$ (lemma di Jordan). Per $t - 2\pi \le 0$, cioè per $t \le 2\pi$, deve essere allora $\operatorname{Re}\sigma \ge 0$; si integra sul semicerchio di destra, e poiché dentro non ci sono singolarità, l'integrale sul semicerchio vale 0; si ha allora $f(t) = 0$ per $t \le 2\pi$. Se invece è $t > 2\pi$ deve essere $\operatorname{Re}\sigma \le 0$; si integra sul semicerchio di sinistra; i residui sono

$$\operatorname{Res}(\phi(s)e^{st}, s = i) = \frac{e^{-2\pi i}e^{it}}{2i}; \qquad \operatorname{Res}(\phi(s)e^{st}, s = -i) = \frac{e^{2\pi i}e^{-it}}{-2i};$$

si ha quindi

$$f(t) = \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} = \sin t \qquad \text{per } t > 2\pi; \quad f(t) = 0 \quad \text{per } t \le 2\pi.$$

Con le regole: l'antitrasformata di $1/(1+s^2)$ è $\sin t H(t)$; il fattore $e^{-2\pi s}$ comporta una traslazione a destra di 2π nei tempi; l'antitrasformata è quindi la funzione $\tau_{2\pi} \sin t H(t) = \sin(t-2\pi)H(t-2\pi)$, la traslata a destra di 2π della funzione $\sin t H(t)$, funzione che coincide con la f prima trovata, perché $\sin(t-2\pi) = \sin t$. □

Esercizio 3.30. Usando le trasformate di Laplace, calcolare la soluzione di

$$y'' + 2y' + 2y = 0; \qquad y(0) = 1;\ y'(0) = 2$$

(viene $e^{-t}(\cos t + 3\sin t)H(t)$). Stessa cosa per

$$y'' + y' + y = \sin t; \qquad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$$

(viene $\left(e^{-t/2}(\cos(\sqrt{3}t/2) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t/2)) - \cos t\right) H(t)$).

Esercizio 3.31. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = -10\cos t \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 2;\ y''(0) = -4.$$

Risoluzione. Detta $u(s)$ la trasformata della soluzione si ha, trasformando l'equazione data:

$$(s^3u(s) - 0s^2 - 2s + 4) + 2(s^2u(s) - 0s - 2) + (su(s) - 0) + 2u(s) = \frac{-10s}{s^2+1}$$

riordinando

$$(s^3 + 2s^2 + s + 2)u(s) - 2s = \frac{-10s}{s^2+1} \iff u(s) = \frac{2s}{(s+2)(s^2+1)} - \frac{10s}{(s^2+1)^2(s+2)},$$

che si riscrive

$$u(s) = \frac{2s(s^2+1) - 10s}{(s^2+1)^2(s+2)} = \frac{2s^3 - 8s}{(s^2+1)^2(s+2)} = \frac{2s(s^2-4)}{(s^2+1)^2(s+2)} = \frac{2s(s-2)}{(s^2+1)^2};$$

Si osserva ora che è $2s/(s^2+1)^2 = -D(1/(s^2+1))$; quindi

$$u(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)s + 2\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right);$$

L'antitrasformata di $-D(1/(s^2+1))$ è $t\sin t H(t)$; tale funzione è nulla in $t = 0$, per cui l'antitrasformata di $s(-D(1/(s^2+1)))$ è la derivata di $t\sin t H(t)$, che è $(\sin t + t\cos t)H(t)$. In definitiva l'antitrasformata di u è

$$y(t) = (\sin t + t\cos t)H(t) - 2t\sin t H(t) = (\sin t + t(\cos t - 2\sin t))H(t).$$

□

Esercizio 3.32. Risolvere l'equazione

$$y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0; \qquad y(0) = 1;\ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$$

Trovare poi anche la risolvente η (quella soluzione con condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$; $y'''(0) = 1$). Applicazione: trovare la convoluzione $H(\#)\sinh(2\#) * H(\#)\sin\#$.

Risoluzione. Si ha, posto al solito $u(s) = \Lambda y(s)$:

$$(s^4u(s) - s^3) - 3(s^2u(s) - s) - 4u(s) = 0 \iff (s^4 - 3s^2 - 4)u(s) = s(s^2-3)$$

e quindi

$$u(s) = \frac{s(s^2-3)}{(s^2-4)(s^2+1)};$$

Cerchiamo una decomposizione in fratti semplici

$$\frac{s(s^2-3)}{(s^2-4)(s^2+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+2} + \frac{cs+d}{s^2+1} \iff$$

$$s(s^2-3) = a(s+2)(s^2+1) + b(s-2)(s^2+1) + (cs+d)(s^2-4).$$

Posto ordinatamente nella precedente $s = 2, -2, i$ si ottiene

$$2 = a4 \cdot 5; \quad -2 = b(-4)5; \quad i(-1-3) = (ci+d)(-5)$$

da cui

$$a = 1/10; \qquad b = 1/10; \qquad -5d - 5ci = -4i \iff d = 0,\, c = 4/5.$$

Si scrive allora

$$u(s) = \frac{1}{5}\frac{s}{s^2-4} + \frac{4}{5}\frac{s}{s^2+1},$$

che porge subito

$$y(t) = \left(\frac{1}{5}\cosh(2t) + \frac{4}{5}\cos t\right) H(t).$$

Per la risolvente η si ha, se $v(s) = \Lambda\eta(s)$:

$$(s^4 v(s) - 1) - 3s^2 v(s) - 4v(s) = 0 \iff (s^4 - 3s^2 - 4)v(s) = 1 \iff v(s) = \frac{1}{(s^2-4)(s^2+1)}$$

Ancora decomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{(s^2-4)(s^2+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+2} + \frac{cs+d}{s^2+1};$$

i calcoli precedenti dicono

$$1 = a(s+2)(s^2+1) + b(s-2)(s^2+1) + (cs+d)(s^2-4),$$

e ponendo $s = 2, -2, i$ si ottiene

$$1 = a4 \cdot 5; \quad 1 = b(-4)5; \quad 1 = (ci+d)(-5),$$

da cui

$$a = 1/20; \quad b = -1/20; \quad c = 0,\, d = -1/5,$$

e quindi

$$v(s) = \frac{1}{10}\frac{2}{s^2-4} - \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1}; \qquad \eta(t) = \left(\frac{\sinh(2t)}{10} - \frac{\sin t}{5}\right) H(t).$$

Trasformando alla Laplace la convoluzione data si ottiene

$$\frac{2}{s^2-4}\frac{1}{s^2+1},$$

la cui antitrasformata, a meno del fattore 2, è stata appena trovata; si ha quindi

$$H(\#)\sinh(2\#) * H(\#)\sin\#(t) = 2\left(\frac{\sinh(2t)}{10} - \frac{\sin t}{5}\right) H(t).$$

□

Esercizio 3.33. Antitrasformare, usando la formula di Hermite

$$\frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}.$$

Risoluzione. Cerchiamo costanti reali a, b, c, d, m, q tali che sia

$$\frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2(s^2+1)^2} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{(s+1)^2} + \frac{cs+d}{s^2+1} + \frac{d}{ds}\left(\frac{ms+q}{s^2+1}\right);$$

la derivata è $(m(s^2+1) - 2s(ms+q))/(s^2+1)^2) = (m - ms^2 - 2sq)/(s^2+1)^2)$, per cui

$$\begin{aligned} 2s^3 - s^2 - 1 =& a(s+1)(s^2+1)^2 + b(s^2+1)^2 + (cs+d)(s+1)^2(s^2+1) + \\ & (m - ms^2 - 2sq)(s+1)^2; \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 2s^3 - s^2 - 1 = a + b + d + m + (a + c + 2\,d + 2\,m - 2\,q)\ s + (2\,a + 2\,b + 2\,c + 2\,d - 4\,q)\ s^2 + \\ (2\,a + 2\,c + 2\,d - 2\,m - 2\,q)\ s^3 + (a + b + 2\,c + d - m)\ s^4 + (a + c)\ s^5 \end{aligned}$$

da cui, con semplici e noiosi calcoli

$$a = 0,\ b = -1,\ c = 0,\ d = 1/2,\ m = -1/2,\ q = 0$$

e la funzione da antitrasformare è scritta ora

$$\frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2(s^2+1)^2} = \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{1/2}{s^2+1} + \frac{d}{ds}\left(\frac{-s/2}{s^2+1}\right),$$

quindi l'antitrasformata è

$$\left(-te^{-t} + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\cos t\right) H(t).$$

□

Esercizio 3.34. Ricordando che la trasformata di Laplace di $\chi = \chi_{[0,1]}$ è $(1 - e^{-s})/s$, trovare le trasformate di Laplace di

$$f(t) = t\chi_{[0,1]}(t); \qquad g(t) = (1-t)\chi_{[0,1]}(t),$$

deducendo poi da queste la trasformata di Laplace di

$$h(t) = t \quad \text{per } 0 \le t \le 1; \quad h(t) = 2 - t \quad \text{per } 1 \le t \le 2; \quad h(t) = 0 \quad \text{per } t < 0,\, t > 2.$$

È vero che è $h = \chi * \chi$?

Risoluzione. Si ha, per il teorema sulla derivata della trasformata

$$\Lambda f(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right) = \frac{-se^{-s} + 1 - e^{-s}}{s^2};$$

inoltre

$$\Lambda g(s) = \Lambda\chi(s) - \Lambda f(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} - \frac{-se^{-s} + 1 - e^{-s}}{s^2} = \frac{s - 1 + e^{-s}}{s^2}.$$

Si ha poi $h = f + \tau_1 g$, e quindi

$$\Lambda h(s) = \Lambda f(s) + e^{-s}\Lambda g(s) = \frac{1 - se^{-s} - e^{-s} + se^{-s} - e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right)^2.$$

Tale trasformata è il quadrato di quella di χ, per cui effettivamente $\chi * \chi = h$. □

Esercizio 3.35. Trovare le funzioni con $y(0^+) = 0$ che per $t \ge 0$ verificano:

$$4y(t) - y'(t) = 5\int_0^t \cos(t - \theta)y(\theta)\,d\theta + 5\sin t$$

(viene $y(t) = (5/2)\left(-e^{2t} + e^t(\cos t + \sin t)\right) H(t)$.)

ESERCIZIO 3.36. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} + y &= 2\cos t \\ \dot{y} - x &= 1 \end{cases} \qquad x(0) = -1; \quad y(0) = 1$$

(viene $x(t) = t\cos t - 1$, $y(t) = t\sin t + \cos t$).

ESERCIZIO 3.37. Trovare, usando le trasformate di Laplace, la soluzione del sistema differenziale

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= 4x - y \end{cases} \qquad x(0) = \alpha;\ y(0) = \beta.$$

Stessa cosa per

$$\begin{cases} x' &= 2x - 5y - \sin(2t) \\ y' &= x - 2y + t \end{cases} \qquad x(0) = 0;\ y(0) = 1$$

e per

$$\begin{cases} x' &= 3x - 4y + e^t \\ y' &= x - y - e^t \end{cases} \qquad x(0) = 1;\ y(0) = -1.$$

ESERCIZIO 3.38. Trovare tutte le funzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che sia

$$u(t) + \int_0^t (t-\theta)u(\theta)\,d\theta = \sin(2t)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3.39. Trovare tutte le funzioni u tali che sia

$$u'(t) - u(t) + 2\int_0^t e^{t-\theta}u(\theta)\,d\theta = 0 \quad t > 0; \qquad \left(R: \quad u(t) = u(0^+)e^t\cos(\sqrt{2}t)\right).$$

Stessa cosa per

$$u'(t) + \int_0^t (t-\theta)u(\theta)\,d\theta = 1 \qquad \left(R: \quad u(t) = e^{t/2}(\cos(\sqrt{3}t/2) + (1/\sqrt{3})\sin(\sqrt{3}t/2))\right)$$

e per

$$u'(t) + 5\int_0^t \cos 2(t-\theta)\,u(\theta)\,d\theta = 10H(t); \quad u(0^+) = 1;$$

$$\left(R: \quad u(t) = \frac{1}{27}(24 + 120t + 30\cos t + 50\sin 3t)\right).$$

ESERCIZIO 3.40. Risolvere, con le trasformate di Laplace

$$y'' - ty' + y = 1; \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

(viene $(1+2t)H(t)$).

ESERCIZIO 3.41. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(t) = 0$ per $t \le 0$, $f(t) = t^2$ per $0 < t \le 1$, $f(t) = t$ per $t > 1$, in due modi: direttamente dalla definizione, ed osservando che si ha

$$f = t^2(H(t) - \tau_1 H(t)) + \tau_1((t+1)H(t)).$$

Risoluzione. Primo modo Si ha, per $\operatorname{Re} s > 0$:

$$\Lambda f(s) = \int_0^1 t^2 e^{-st}\,dt + \int_1^\infty te^{-st}\,dt.$$

Sul Formulario di trova una primitiva di t^2e^{-st} (si pone t al posto di x, $-s$ al posto di a):

$$\int t^2 e^{-st}\,dt = e^{-st}\left(\frac{t^2}{-s} - \frac{2t}{(-s)^2} + \frac{2}{(-s)^3}\right),$$

ed anche una primitiva di te^{-st}:

$$\int te^{-st}\,dt = e^{-st}\left(\frac{t}{-s} - \frac{1}{(-s)^2}\right),$$

per cui

$$\begin{aligned}\Lambda f(s) = \left[-e^{-st}\left(\frac{t^2}{s}+\frac{2t}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)\right]_{t=0}^{t=1} + \left[-e^{-st}\left(\frac{t}{s}+\frac{1}{s^2}\right)\right]_{t=0}^{t=\infty} = \\ \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right) + e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right) = \\ \frac{2}{s^3} - \frac{e^{-s}}{s^2}\left(1+\frac{2}{s}\right).\end{aligned}$$

Secondo modo Si osserva che la trasformata di $(t+1)H(t)$ è $1/s^2+1/s$, e la trasformata di $H-\tau_1 H$ è $1/s - e^{-s}/s$, per cui

$$\Lambda f(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right) + e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right);$$

Si trova

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}\right) = \frac{-1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} = \frac{-1}{s^2} + e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right);$$

ed un'ulteriore derivazione porge

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right) + e^{-s}\left(\frac{-1}{s^2}+\frac{-2}{s^3}\right) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right),$$

riottenendo il precedente risultato.

Osservazione 18. Il primo modo è stato più rapido del secondo solo perché si è usato il Formulario per calcolare gli integrali!

□

Esercizio 3.42. Calcolare la trasformata della gaussiana, $H(t)e^{-at^2}$ $(a>0)$; ricordando che è $\mathrm{erf}(s) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^s e^{-t^2}\,dt$ si trova

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{\exp(s^2/(4a))}{2}\left(1-\mathrm{erf}\left(s/(2\sqrt{a}\right)\right) \qquad \mathrm{Re}\, s > -\infty$$

.

Risoluzione. Si ha, supposto s reale:

$$\begin{aligned}\Lambda He^{-a\#^2}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-at^2}e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-at^2-st}\,dt = \\ \int_0^{+\infty} \exp\left(-a(t^2+(s/a)t+(s/(2a))^2-(s/(2a))^2)\right)\,dt = \\ \exp(s^2/(4a))\int_0^{+\infty}\exp(-a(t+(s/(2a))^2)\,dt =\end{aligned}$$

si pone $\sqrt{a}(t+s/(2a)) = \theta$:

$$\begin{aligned}\exp(s^2/(4a))\int_{s/(2\sqrt{a})}^{+\infty} e^{-\theta^2}\,d\theta/\sqrt{a} = \\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}\exp(s^2/(4a))\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{s/(2\sqrt{a})}^{+\infty} e^{-\theta^2}\,d\theta = \\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}\exp(s^2/(4a))\left(1-\mathrm{erf}(s/(2\sqrt{a}))\right)\end{aligned}$$

□

Esercizio 3.43. Partendo dalla formula

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-st}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \qquad (\operatorname{Re}\alpha > 0),$$

derivando rispetto ad α ambo i membri, trovare la *trasformata del logaritmo*:

$$\Lambda(H\log)(s) = -\frac{\gamma + \log s}{s} \quad \text{dove} \quad \gamma = -\Gamma'(1),$$

con (accettiamo tale fatto) $\gamma := \lim_{n\to\infty}(\log n - (1 + 1/2 + \cdots + 1/n)) \approx 0{,}577216\ldots$ costante di Eulero–Mascheroni.

Risoluzione. È lecito derivare rispetto ad α sotto il segno di integrale grazie al teorema di derivazione, vedi Analisi Due, 9.22.2(ii); si ha

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\log t e^{-st}\,dt = \frac{\Gamma'(\alpha)}{s^\alpha} - \log s\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}.$$

Posto $\alpha = 1$ in tale formula si ottiene

$$\Lambda(H\log)(s) = \int_0^{+\infty} \log t e^{-st}\,dt = \frac{\Gamma'(1) - \log s\Gamma(1)}{s} = \frac{-\gamma - \log s}{s}$$

□

Esercizio 3.44. Calcolare la trasformata di $H(t)[t]$, dove $[t]$ è la parte intera di t, massimo intero non maggiore di t; si trova

$$\Lambda[\#]H(s) = \frac{1}{s(e^s-1)} \qquad \operatorname{Re}s > 0.$$

Generalizzazione: sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di numeri complessi; sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da $f(t) = 0$ se $t < 0$, $f(t) = a_{[t]}$ se $t \geq 0$. Mostrare che f è assolutamente $L-$trasformabile se e solo se la serie di potenze $\sum_{n=0}^\infty a_n Z^n$ ha raggio di convergenza R non nullo. Supposto che ciò accada, esprimere mediante R l'ascissa di convergenza assoluta di f; e detta $\varphi(Z)$ la somma della serie si esprima $\Lambda f(s)$ mediante φ (questo è un legame tra la trasformata di Laplace e la funzione generatrice, chiamata “trasformata zeta” dagli ingegneri; viene $\rho(f) = -\log R$; $\Lambda f(s) = \varphi(e^{-s})(1 - e^{-s})/s$, per $\operatorname{Re}s > -\log R$).

Esercizio 3.45. Risolvere l'equazione integrale (del tipo di Volterra, di seconda specie)

$$u(t) = \int_0^t \sin(t-\theta)u(\theta)\,d\theta - at \qquad a \text{ costante},$$

nella funzione incognita $u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (farlo dapprima per $t \geq 0$, con la trasformata di Laplace).

Risoluzione. Trasformiamo, sostituendo u , $\sin t$, con Hu, $H\sin tH(t)$; si noti che l'integrale è in tal caso esattamente la convoluzione $H\sin *Hu$; supponendo Hu trasformabile si ha

$$\Lambda Hu(s) = \frac{\Lambda Hu(s)}{1+s^2} - \frac{a}{s^2} \quad \text{da cui} \quad \Lambda Hu(s) = -\frac{s^2+1}{s^4}a = -a\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\right).$$

Antitrasformando si ha

$$H(t)u(t) = -a\left(t + \frac{t^3}{6}\right)H(t)$$

Un calcolo diretto, noioso ma banale, mostra che effettivamente la funzione $u(t) = -a(t + t^3/6)$ risolve la questione su tutto $\mathbb{R}$. Peraltro in questo caso si poteva procedere come segue: si vede che una soluzione u è necessariamente in $C^1(\mathbb{R})$; derivando sotto il segno di integrale si ha $u'(t) = \int_0^t \cos(t-\theta)u(\theta)\,d\theta - a$, ed un'ulteriore derivazione porge $u''(t) = -\int_0^t \sin(t-\theta)u(\theta)\,d\theta + u(t)$; usando l'equazione si ottiene $u''(t) = -at$; ed essendo $u(0) = 0$, $u'(0) = -a$ si ottiene $u(t) = -a(t + t^3/6)$. □

Esercizio 3.46. Risolvere le equazioni integrali

$$u(t) = t - \int_0^t (t-\theta)u(\theta)\,d\theta; \quad u(t) = 1 + \lambda \int_0^t (t-\theta)u(\theta)\,d\theta; \quad u(t) = \lambda \int_0^t (t-\theta)u(\theta)\,d\theta + t^2;$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ è un parametro costante.

Esercizio 3.47. Risolvere l'equazione integrale

$$u(t) = \int_0^t u(\theta)\sin(t-\theta)\,d\theta + \sin t.$$

Risoluzione. Trasformando alla Laplace si ha

$$\Lambda u(s) = \frac{\Lambda u(s)}{1+s^2} + \frac{1}{1+s^2} \qquad \text{da cui} \quad \Lambda u(s) = \frac{1}{s^2}$$

che implica $u(t) = t$, per $t \geq 0$. È immediato verificare che la funzione $u(t) = t$ soddisfa su tutto $\mathbb{R}$ all'equazione data. □

Esercizio 3.48. Calcolare la trasformata di Laplace di $t \mapsto H(t)\sin^2 t/t$ e di

$$t \mapsto H(t)te^{2t} \int_0^t \frac{\sin^2\theta}{\theta}\,d\theta.$$

Esercizio 3.49. i) Determinare l' originale di Laplace della funzione

$$\frac{1}{s(s+1)(s^2+1)}.$$

ii) Determinare la funzione z che assieme alla funzione y risolve il sistema, per $t \geq 0$,

$$\begin{cases} y' + z' = t \\ y'' - z = \exp(-t) \end{cases} \text{con le condizioni } y(0) = 3, y'(0) = -2, z(0) = 0.$$

Esercizio 3.50. Sia

$$F(s) = \frac{(1-e^{-s\pi/2})(1+e^{-s\pi})}{(1+s^2)}.$$

(i) Si calcoli l'antitrasformata di Laplace $\Lambda^{-1}F$ di F;

(ii) Mostrare che il supporto di $\Lambda^{-1}F$ è contenuto in $[0, 2\pi]$; se ne deduca che $F(s)\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}$ è la trasformata di Laplace di una funzione periodica $\tilde{f}$, da determinare;

(ii) sia $g(t)$ la prolungata π-periodica della funzione che vale 1 per $t \in [0, \pi/2]$ e 0 per $t \in (\pi/2, \pi)$: si calcoli la trasformata di Laplace di gH (H è la funzione di Heaviside);

(iii) usando (i) e (ii) si risolva il problema di Cauchy

$$x''(t) + x(t) = g(t)H(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Esercizio 3.51. (i) Determinare l'originale di Laplace di $\varphi(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}$;

(ii) Determinare la soluzione Laplace trasformabile dell'equazione

$$u(x) = \int_0^x \sin(x-t)u(t)\,dt + \cosh x$$

[Suggerimento: interpretare l'integrale al secondo membro come una opportuna convoluzione]

Esercizio 3.52. Siano

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s^2)} \qquad F(s) = \frac{(1-e^{-s\pi/2})(1+e^{-s\pi})}{s(1+s^2)}.$$

(a) Si calcoli l'antitrasformata di Laplace g di G; dedurne l'antitrasformata f di F (determinarne i valori sui singoli intervalli $[0, \pi/2[$, $[\pi/2, \pi[$, $[\pi, 3\pi/2[$, $[3\pi/2, 2\pi[$ e su ciò che resta;

(b) dedurre che $F(s)\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}$ è la trasformata di Laplace di una funzione periodica $\tilde{f}$, da determinarsi;

(c) sia $h(t)$ la prolungata π-periodica della funzione che vale 1 per $t \in [0, \pi/2]$ e 0 per $t \in (\pi/2, \pi)$: si calcoli la trasformata di Laplace di h;

(d) usando (a) e (b) si risolva il problema di Cauchy nell'ambito delle distribuzioni $\mathcal{L}$-trasformabili

$$x''(t) + x(t) = h(t)H(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Esercizio 3.53. Determinare, ammettendone l'esistenza, la soluzione Laplace trasformabile dell'equazione

$$y(x) = 2\int_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt + e^x \qquad x \geq 0$$

Esercizio 3.54. Determinare, ammettendone l'esistenza, la soluzione Laplace trasformabile dell'equazione

$$y(x) = 2\int_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt + e^x$$

[R: $(\cosh t + te^t)H(t)$]

Trasformate di Laplace

Con $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ si indica il sottospazio lineare di $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ consistente delle (classi di) funzioni q.o. uguali a funzioni identicamente nulle sulla semiretta $\{t \in \mathbb{R} : t < 0\}$; per ogni $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $\rho(f)$, *ascissa di convergenza assoluta* di f, coincide con $\rho(f) = \inf\{p \in \mathbb{R} : t \mapsto e^{-pt} f(t) \in L^1(\mathbb{R})\}$.

Trasformata

$$\Lambda f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \left(= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right) \qquad \operatorname{Re} s > \rho(f)$$

Antitrasformata

$$\Lambda^{-1}\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} \phi(\zeta) e^{\zeta t}\, d\zeta$$

Convoluzione

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau \qquad f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$$

Derivata $n-$esima della trasformata

$$D^n \Lambda f(s) = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n f(t)\, dt \,(= \Lambda((-\#)^n f(\#))(s)\,) \qquad \operatorname{Re} s > \rho(f)$$

Trasformata della derivata m-esima

$$\Lambda \left(f^{(m)} \right)(s) = s^m \Lambda f(s) - \sum_{j=1}^{m} s^{m-j} f^{(j-1)}(0^+) \qquad \operatorname{Re} s > \max\{\rho(f^{(m)}), 0\}$$

Traslata della trasformata

$$\Lambda(e^{\lambda \#} f)(s) = \Lambda f(s - \lambda); \qquad \rho(e^{\lambda \#} f) = \rho(f) + \operatorname{Re} \lambda$$

Trasformata della traslata in avanti, $(\tau_a f(t) = f(t-a))$, $a \geq 0$

$$\Lambda(\tau_a f)(s) = e^{-as} \Lambda f(s) \qquad a \geq 0;\ \operatorname{Re} s > \rho(f)$$

Cambio scala

$$\Lambda f(\lambda \#)(s) = \frac{\Lambda(s/\lambda)}{\lambda} \qquad \lambda > 0;\ \rho(f(\lambda\#)) = \lambda \rho(f)$$

Convoluzione (la trasformata è il prodotto delle trasformate)

$$\Lambda(f * g)(s) = \Lambda f(s) \Lambda g(s) \qquad \operatorname{Re} s > \max\{\rho(f), \rho(g)\}$$

$$\Lambda^{-1}(e^{-as} h(s))(t) = \tau_a \Lambda^{-1} h(t) = \Lambda^{-1} h(t-a) \qquad a \geq 0;$$

$$\Lambda^{-1}(\tau_\lambda h)(t) = e^{\lambda t} \Lambda^{-1} h(t) \qquad \lambda \in \mathbb{C};$$

Equazione lineare di ordine n

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = \sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)} = b(t),$$

Condizioni iniziali $u(0^+) = \alpha_0, u'(0^+) = \alpha_1, \dots, u^{(n-1)}(0^+) = \alpha_{n-1}$; $\chi(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$, *polinomio caratteristico*;

$$\Lambda u(s) = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} s^{k-j}\alpha_{j-1}\right)}{\chi(s)} + \frac{\Lambda b(s)}{\chi(s)}.$$

Posto $\varphi_\alpha(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} s^{k-j}\alpha_{j-1}\right)/\chi(s)$ si ha, per $t \geq 0$:

$$u(t) = \Lambda^{-1}\varphi_\alpha(t) + \eta * b(t),$$

dove $\eta(t)$, *risolvente* dell'equazione data, è la preimmagine di Laplace di $1/\chi(s)$.

Tabella di trasformate di Laplace

Funzione	Trasformata	Ascissa di conv. ass.
$H(\#)$	$\frac{1}{s}$	0
$H(\#)e^{\omega\#}$	$\frac{1}{s-\omega}$	$\operatorname{Re}\omega$
$H(\#)\cos(\omega\#)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
$H(\#)\sin(\omega\#)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
$H(\#)\cosh(\omega\#)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\lvert\operatorname{Re}\omega\rvert$
$H(\#)\sinh(\omega\#)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\lvert\operatorname{Re}\omega\rvert$
$H(\#)(\#)^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$\frac{H(\#)}{\sqrt{\#}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	0

ed in generale, se $\operatorname{Re}\alpha > -1$

$H(\#)(\#)^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	0
δ	1	$-\infty$
δ'	s	$-\infty$
$\delta^{(m)}$	s^m	$-\infty$

Funzione di Bessel J_0

$H(\#)J_0(\#)$	$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$	0

Funzione periodica f di periodo τ

$H(\#)f(\#)$	$\frac{\int_0^\tau e^{-s\theta} f(\theta)\,d\theta}{1-e^{-s\tau}}$	0

(ricordiamo che è $J_0(t) = (1/\pi)\int_{-1}^{1}\left(e^{i\theta t}/\sqrt{1-\theta^2}\right)\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}/(2^{2n}(n!)^2)$)

Capitolo 4

Distribuzioni in una variabile

Dare un'unità alla convoluzione L'algebra di convoluzione $L^1(\mathbb{R})$ ha unità approssimate, ma non ha unità moltiplicativa, che dovrebbe avere proprietà impossibili per una funzione: avere integrale 1, ma essere nulla al di fuori dell'origine. Venne definita un "funzione" δ, con la proprietà di essere unità per la convoluzione, cioè tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x-t)f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{per ogni } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ continua.}$$

Coerentemente con quanto sopra, tale "funzione" era nulla per ogni reale non nullo, mentre era infinita in 0 (zero), in modo tale che fosse $\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$! Nessuna funzione come la conosciamo può avere simili proprietà: se è nulla su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, essa è quasi ovunque nulla, ed il suo integrale non può che essere nullo, secondo ogni possibile definizione. È un nuovo oggetto quello che vogliamo, occorre uscire dall'ambiente $L^1(\mathbb{R})$, più in generale dall'ambito delle funzioni. Uno dei metodi possibili sarebbe quello di dire che il nuovo oggetto è la successione approssimante stessa. In ogni caso, come sempre quando si introducono dei nuovi enti matematici, perché la cosa sia utile essi debbono essere *rappresentabili* in qualche modo, e deve essere possibile dare le regole di calcolo con tali enti. Una teoria di essi fatta con classi di equivalenza di successioni esiste. Da vari anni tuttavia si è imposto un metodo dovuto a Laurent Schwartz (1915–2001); tale metodo ha l'inconveniente di richiedere alcune conoscenze di analisi funzionale, ma nel complesso è più agile dell'altro. Una funzione reale a valori complessi (facciamo di dominio $\mathbb{R}$) è un ente che ad ogni numero reale x associa un ben preciso complesso $f(x)$. Tuttavia, specie studiando la teoria dell'integrazione, una funzione è diventata un oggetto assai più vago: si sono identificate funzioni che sono q.o. uguali, e due funzioni possono anche differire su infiniti elementi e rappresentare lo stesso oggetto. Una funzione è in questo caso definita più dalle sue proprietà di *media* che dai valori che assume sui singoli punti. Una generalizzazione del concetto di funzione può essere trovata nel concetto di *misura*; ma, senza discutere ulteriormente questo punto, diciamo subito che in generale la derivata di una misura smette di essere una misura, e ciò blocca ulteriori sviluppi della cosa. La generalizzazione che cerchiamo della nozione di funzione deve avere i seguenti requisiti (parliamo di enti definiti su tutto $\mathbb{R}$; si possono generalizzare anche le funzioni definite su porzioni aperte di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{R}^n$):

- Ogni funzione continua deve essere una funzione generalizzata.
- Ogni funzione generalizzata deve essere derivabile, ed avere per derivate funzioni generalizzate; le funzioni di classe C^1 devono avere derivate nel nuovo senso coincidenti con quelle del vecchio senso.
- Ci devono essere abbastanza possibilità di passare al limite sotto il segno di derivata.

L'idea di Schwartz è stata quella di introdurre le funzioni generalizzate, da lui e d'ora in poi anche da noi chiamate *distribuzioni*, come enti che operano su una classe di funzioni "test" regolarissime, le funzioni indefinitamente derivabili a supporto compatto su $\mathbb{R}$: con un procedimento di dualità, le operazioni di derivazione impossibili sulla distribuzione vengono scaricate sulla funzione test, su cui si possono sempre fare. Il procedimento era da tempo usato da vari matematici, per definire soluzioni in senso debole di equazioni alle derivate parziali; il merito di Schwartz è stato quello di unificare e sistematizzare le tecniche usate in modo più o meno corretto da utenti di molteplice provenienza, collegandole al calcolo simbolico di Heaviside, ed all'unità di convoluzione δ di Dirac.

Traduzione del primo paragrafo del libro "Théorie des distributions" *di Laurent Schwartz, ed. Hermann, Paris, 1965, primo testo apparso sulla teoria delle distribuzioni.*

Oltre cinquant'anni fa l'ingegnere Heaviside introdusse le sue regole di calcolo simbolico, in un'audace memoria dove calcoli matematici assai poco giustificati erano utilizzati per la risoluzione di problemi di fisica. Tale calcolo simbolico, od operazionale, non ha cessato di svilupparsi in seguito, e serve di base agli studi teorici degli elettrici. Gli ingegneri lo utilizzano sistematicamente, ciascuno con la sua concezione personale, con la coscienza più o meno tranquilla; è "una tecnica non rigorosa, ma che riesce bene". In seguito all'introduzione da parte di Dirac della famosa funzione $\delta(x)$, che sarebbe nulla ovunque salvo che per $x = 0$ in modo tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = +1$, le formule di calcolo simbolico sono diventate ancora più inaccettabili per il rigore dei matematici. Scrivere che la funzione di Heaviside $H(x)$ uguale a 0 per $x < 0$ e ad 1 per $x \geq 0$ ha per derivata la funzione di Dirac $\delta(x)$ la cui stessa definizione è matematicamente contraddittoria, e parlare delle derivate $\delta'(x)$, $\delta''(x), \dots$ di questa funzione priva di esistenza reale, è oltrepassare i limiti che ci sono permessi. Come spiegare il successo di questi metodi? Quando una simile situazione contraddittoria si presenta, è assai raro che non ne risulti una nuova teoria matematica che giustifichi, in forma modificata, il linguaggio dei fisici: in ciò è un'importante fonte di progresso sia per la matematica che per la fisica. Infatti numerose giustificazioni del calcolo simbolico sono state realizzate: le più importanti sono dovute a Carson e van der Pol. Ma, pur essendo matematicamente rigorose, esse non soddisfano i fisici, giacché o passano per la trasformazione di Laplace, il che modifica completamente la questione, oppure eliminano la funzione δ e le sue derivate e proibiscono metodi il cui successo era incontestabile.

4.1 Funzioni indefinitamente derivabili a supporto compatto

Il simbolo $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, abbreviato in $\mathcal{D}$, indica lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che siano C^∞, ed a supporto compatto: ricordiamo che il *supporto* di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è la chiusura dell'insieme dei punti in cui essa non è nulla

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}, \qquad \text{(la barra indica la chiusura in } \mathbb{R})$$

per cui affermare che f, definita su $\mathbb{R}$, è a supporto compatto, equivale a dire che f è nulla al di fuori di un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$, ovvero che esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che sia $f(x) = 0$ per $x < a$ e per $x > b$. Grafici di alcune funzioni siffatte sono come in figura.

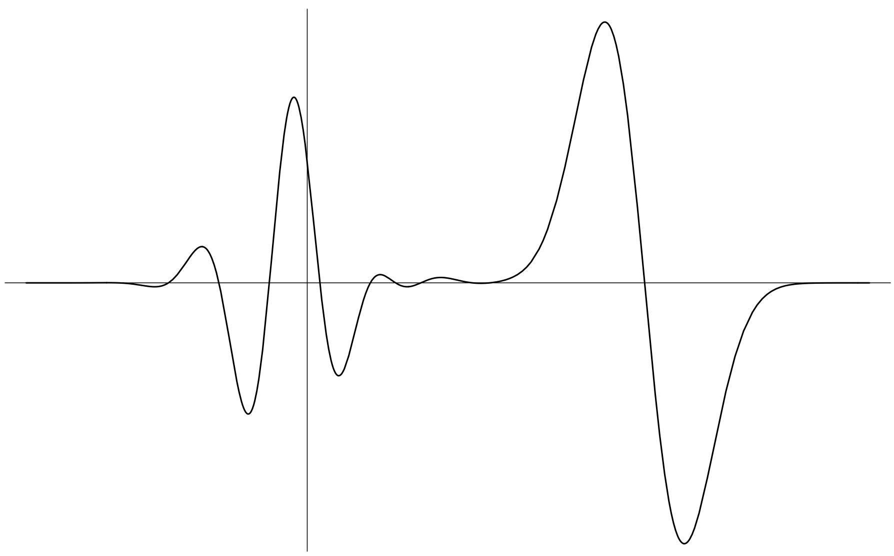

Figura 4.1: Funzioni test

Esempio 4.1. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e C un chiuso di $\mathbb{R}$. Allora $\mathrm{Supp}(f) \subseteq C$ se e solo se $f(x) = 0$ per $x \notin C$.

Si noti che una tale funzione, pur essendo regolarissima ed a grafico assai liscio non è *mai*, se non quando è identicamente nulla, la traccia reale di una funzione olomorfa intera (principio di identità). Esistono molte tali funzioni: si dimostra anzitutto che la funzione $u_0(t) = 0$ per $t \le 0$, $u_0(t) = e^{-1/t}$ per $t > 0$ è una funzione C^∞. Si ha poi subito che la funzione $u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $u_1(t) = u_0(1 - t^2)$, essendo composizione di funzioni C^∞, è pure C^∞; essa è nulla se $1 - t^2 \le 0$, e cioè se $|t| \ge 1$, mentre è strettamente positiva in $]-1, 1[$, ed ha un grafico come in figura.

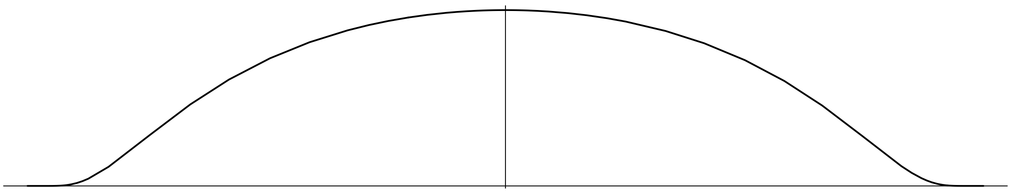

Figura 4.2: La funzione $u_1(t) = e^{1/(t^2-1)}$, per $|t| < 1$.

Dopo di ciò la funzione $u_{c,r}(t) = u_1((t - c)/r)$, per ogni $c \in \mathbb{R}$ ed ogni $r > 0$, è una funzione C^∞ positiva che ha per supporto esattamente l'intervallo $[c - r, c + r]$ di centro c e raggio $r > 0$.

Si dimostra che ogni chiuso di $\mathbb{R}$ è il luogo degli zeri di una funzione C^∞ positiva; ne segue che si ha

Proposizione 4.1. *Per ogni compatto K di $\mathbb{R}$, ed ogni aperto V di $\mathbb{R}$ contenente K esiste una funzione $v \in \mathcal{D}$ (C^∞ a supporto compatto) che è identicamente 1 su un intorno compatto U di K, identicamente nulla fuori di V, e compresa fra 0 ed 1, $0 \le v(t) \le 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Omessa (ma facile con il risultato prima citato). □

Se $K \subset \mathbb{R}$ è compatto, indichiamo con $\mathcal{D}_K$ il sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}$ consistente delle $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq K$. Muniamo $\mathcal{D}_K$ della topologia della convergenza uniforme, con tutte le derivate di tutti gli ordini: in altre parole, dire che una successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{D}_K$ converge ad $u \in \mathcal{D}_K$ significa dire che per ogni $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ si ha che $u_n^{(k)} \to u^{(k)}$ uniformemente. Introduciamo qualche simbolo per il seguito: per ogni funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, il simbolo $\|u\|_\infty = \sup\{|u(t)| : t \in \mathbb{R}\}$ (finito oppure $+\infty$) indica al solito la sup–norma di u; se $m \in \mathbb{N}$, ed $u \in C^m(\mathbb{R})$, il simbolo $\|u\|_{(m)}$ indica $\max\{\|u\|_\infty, \ldots, \|u^{(m)}\|_\infty\}$, la norma C^m di u (finita o no; tali norme sono tutte finite, ovviamente, quando $u \in \mathcal{D}$, dato che allora u e tutte le sue derivate sono nulle fuori del supporto di u, che è compatto).

In un $\mathcal{D}_K$ ogni intorno dello 0 contiene un intorno dello 0 che è la palla di centro 0 raggio ε per qualche norma $\|\cdot\|_{(m)}$, con m abbastanza grande, cioè come il seguente

$$\{u \in \mathcal{D}_K : \|u\|_{(m)} \le \varepsilon\} \qquad \text{per convenienti } m \in \mathbb{N} \text{ e } \varepsilon > 0;$$

pertanto una successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{D}_K$ tende a 0 uniformemente con tutte le derivate di ogni ordine se e solo se per ogni $m \in \mathbb{N}$ ed $\varepsilon > 0$ dati esiste $n_{\varepsilon,m} \in \mathbb{N}$ tale che sia $\|u_n\|_{(m)} \le \varepsilon$ per $n \ge n_{\varepsilon,m}$. La cosa è in realtà assai semplice, e si lascia al lettore.

Si noti che $\mathcal{D}$ è unione di tutti i $\mathcal{D}_K$, al variare di K nell'insieme dei compatti di $\mathbb{R}$; si ha anzi $\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_j}$ per ogni successione di compatti K_n invadente $\mathbb{R}$, in particolare ad esempio $\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{[-n,n]}$.

Data una forma lineare $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, molto spesso scriveremo $\langle T, \varphi\rangle$ in luogo di $T(\varphi)$ per indicare il valore che la forma T assume su φ.

Proposizione 4.2. *Sia $T : \mathcal{D}_K \to \mathbb{C}$ forma lineare. Allora T è continua su $\mathcal{D}_K$ se e solo se esistono $m \in \mathbb{N}$ e $L > 0$ tali che sia*

$$|T(u)| \le L\|u\|_{(m)} \qquad \textit{per ogni } u \in \mathcal{D}_K.$$

Dimostrazione. Se m ed L esistono come nell'enunciato, certamente T è continua, nel senso che se una successione $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge ad $u \in \mathcal{D}_K$ uniformemente con tutte le derivate allora $T(u_j)$ converge a $T(u)$: infatti si ha

$$|T(u) - T(u_j)| = |T(u - u_j)| \le L \max\{\|(u - u_j)^{(k)}\|_\infty : k = 0, 1, \ldots, m\},$$

e poiché per ipotesi ciascun $\|(u - u_j)^{(k)}\|_\infty$ è infinitesimo per $j \to \infty$ si conclude.

Se poi T è continua, essa è continua in 0, e fissato $\varepsilon = 1$ esiste un intorno U dello 0 in $\mathcal{D}_K$ tale che sia $|T(u)| \le 1$ per ogni $u \in U$; e poiché esistono $\rho > 0$ ed $m \in \mathbb{N}$ tali che sia $u \in U$ se è $\|u\|_{(m)} \le \rho$, si ha $|T(u)| \le 1$ se $\|u\|_{(m)} \le \rho$; scritto $u = (\|u\|_{(m)}/\rho)v$, con $v = \rho u/\|u\|_{(m)}$ si ha $\|v\|_{(m)} = \rho$ e

$$|T(u) = |T((\|u\|_{(m)}/\rho)v)| = \frac{\|u\|_{(m)}}{\rho}|T(v)| \le \frac{1}{\rho}\|u\|_{(m)};$$

si conclude quindi, con $L = 1/\rho$. □

4.2 Distribuzioni

Definizione. Una distribuzione su $\mathbb{R}$ è una forma lineare $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tale che T sia continua su ogni $\mathcal{D}_K$, per ogni compatto K di $\mathbb{R}$, o equivalentemente,

Proposizione 4.3. *Una forma lineare $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ è una distribuzione se e solo se, per ogni successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni indefinitamente derivabili su $\mathbb{R}$, i cui supporti siano tutti contenuti in uno stesso compatto $K \subset \mathbb{R}$, che tendano uniformemente alla funzione nulla con le loro derivate di ogni ordine, si ha $\lim_{n\to\infty} T(u_n) = 0$.*

oppure, ponendo $\|u\|_{(m)} = \max\{\|u\|_\infty, \dots, \|u^{(m)}\|_\infty\}$,

Proposizione 4.4. *Una forma lineare $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ è una distribuzione se e solo se, per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}$ esistono un naturale $m_K \in \mathbb{N}$, ed una costante $L_K > 0$ tali che sia*

$$|T(u)| \le L_K \|u\|_{(m_K)} \qquad \textit{per ogni } u \in \mathcal{D}_K$$

*(il minimo tale m_K è l'*ordine *della distribuzione su K).*

Esempio 4.2. Ogni funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ è una distribuzione (che si indica ancora con f, ma che in questo esempio indichiamo con T_f), che opera in questo modo

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\, dt.$$

Per la continuità: se K è compatto, e $\varphi \in \mathcal{D}_K$ si ha

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int_K f(t)\varphi(t)\, dt\right| \le \int_K |f(t)||\varphi(t)|\, dt \le \int_K |f(t)|\, \|\varphi\|_\infty\, dt = \left(\int_K |f(t)|\, dt\right) \|\varphi\|_\infty.$$

Su ogni compatto l'ordine è quindi è 0.
Si noti che se $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ sono tali che $T_f = T_g$ allora $f = g$ q.o.; la dimostrazione si ricava dal fatto, provato nella prossima sezione, che se $\int_{\mathbb{R}} (f-g)(x)\varphi(x)\, dx = 0$ per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora $f - g = 0$ q.o.

Esempio 4.3. La δ di Dirac, concentrata in 0, è la distribuzione

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0), \quad \textit{valutazione } \text{su } 0$$

La verifica della continuità è immediata. La δ di Dirac concentrata in $a \in \mathbb{R}$ è

$$\langle \delta_{(a)}, \varphi\rangle = \varphi(a), \quad \textit{valutazione } \text{su } a.$$

Sono distribuzioni di ordine 0.

Esempio 4.4. Sia $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un'arbitraria successione di complessi. Si ottiene una distribuzione T ponendo, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, $T(\varphi) = \sum_0^{+\infty} c_n\varphi(n)$. La somma è infatti finita per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, dato che φ è nulla fuori di un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$; su ogni compatto K, se $L_K = \sum\{|c_n| : n \in K\}$ si ha

$$|T(u)| = \left|\sum\{c_n u(n) : n \in K\}\right| \le \sum\{|c_n u(n)| : n \in K\} \le \sum\{|c_n|\|u\|_0 : n \in K\} = L_K\|u\|_0.$$

si ha quindi ancora una distribuzione di ordine 0. Si ha invece una distribuzione T, il cui ordine non ha un estremo superiore finito, ponendo

$$T(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(n);$$

verificare che tale distribuzione ha ordine m sul compatto $[-m, m]$.

La funzione $t \mapsto 1/t$ non è sommabile su alcun intorno di 0, e quindi *non* definisce una distribuzione. Però esiste una distribuzione *valore principale* di $1/t$, v. p.$(1/t)$, che svolge lo stesso ruolo di $1/t$, in vari casi (vedi Esempio 4.13, dopo).

4.3 Un simbolismo poco rigoroso ma suggestivo

In accordo con il fatto che le distribuzioni sono funzioni generalizzate, continueremo ad indicarle con i simboli usati per le funzioni, e spesso scriveremo

$$\int_{\mathbb{R}} T(t)\varphi(t)\,dt \qquad \text{invece di} \quad \langle T, \varphi\rangle = T(\varphi),$$

per indicare l'azione della distribuzione T sulla funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$; scriveremo anche $T(t-a)$ per indicare la traslata $\tau_a T$, $T'(t)$ per la derivata, ecc. ecc.; Osserviamo invece che è lecito identificare una funzione di $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ con una distribuzione: se infatti $f, g \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ sono tali che $T_f = T_g$, allora $f(t) = g(t)$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Ciò si verifica nel modo seguente: se $h \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ è tale che $T_h = 0$, cioè tale che sia $\int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t)\,dt = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, allora $h = 0$ quasi ovunque. La verifica di tale fatto non è del tutto banale (vedi sotto); accettiamo la cosa.

Ricordiamo l'approssimante dell'unità o mollificatori definiti in 2.4.5, formata da funzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: $u_\lambda(t) = \lambda u(\lambda t)$, dove $u(t) = e^{1/(t^2-1)}/c$ per $|t| < 1$, $u(t) = 0$ per $|t| \geq 1$, e c scelto in modo che $\int_{\mathbb{R}} u = 1$; si ha allora

Proposizione 4.5. *Sia $h \in \mathrm{L}^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$; se A è un aperto di $\mathbb{R}$ tale che sia $\int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t)\,dt = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con supporto contenuto in A, allora si ha $h(t) = 0$ per quasi ogni $t \in A$.*

Dimostrazione. Sia $K = [a, b]$ intervallo compatto contenuto in A, e sia $\rho = \operatorname{dist}(K, \mathbb{R} \smallsetminus A)$; se $\lambda > 0$ è tale che $1/\lambda < \rho$ si ha, per $t \in K$:

$$h * u_\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} u_\lambda(t-\theta)h(\theta)\,d\theta = \int_{a-1/\lambda}^{b+1/\lambda} u_\lambda(t-\theta)h(\theta)\,d\theta,$$

e per l'ipotesi fatta l'integrale è nullo ($\theta \mapsto u_\lambda(t-\theta)$ è funzione C^∞ il cui supporto è $[t - 1/\lambda, t + 1/\lambda] \subseteq A$). Per λ che tende $+\infty$ la successione $u_\lambda * h_{|K}$ converge in $L^1(K)$ ad $h_{|K}$, che quindi è q.o. nullo. Questo accade per ogni intervallo compatto K contenuto in A, e quindi q.o. in A. □

4.4 La δ di Dirac non è una funzione

Proposizione 4.6. *La δ di Dirac non è una funzione, non esiste cioè $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ tale che $\delta = T_f$.*

Dimostrazione. Supponiamo esista f tale che $\delta = T_f$. Allora si ha

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \int f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0);$$

da cui

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \operatorname{Supp}\varphi \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \int f(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

La proposizione precedente allora implica $f = 0$ q.o. su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e quindi su $\mathbb{R}$. Ma allora

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \varphi(0) = \int f(x)\varphi(x)\,dx = 0;$$

una contraddizione: una f siffatta non esiste. □

4.5 Operazioni con le distribuzioni

Le distribuzioni sono uno spazio vettoriale $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *duale topologico* di $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$, e possono quindi essere sommate fra loro, e moltiplicate per scalari. In generale non è possibile moltiplicare fra loro due distribuzioni (anche moltiplicando fra loro funzioni localmente sommabili la sommabilità locale in genere si perde, si pensi ad esempio a $t \mapsto 1/\sqrt{|t|}$, il cui quadrato $t \mapsto 1/|t|$ non è sommabile su alcun intorno di $t = 0$). Tuttavia si può moltiplicare una distribuzione T per una funzione $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$; si pone, per definizione di αT:

$$\alpha T(\varphi) := T(\alpha\varphi)$$

Il secondo membro ha significato e definisce effettivamente αT come forma lineare su $\mathcal{D}$; la continuità si verifica facilmente, usando la formula di Leibniz per la derivata $m-$esima di un prodotto; la accettiamo senz'altro. Si osservi che se $\alpha(t) = t$, e $T = \delta$, delta di Dirac concentrata in $t = 0$, si ha

$$t\delta(u) = \delta(tu) = 0u(0) = 0$$

cioè $t\delta$ è la distribuzione nulla. È importante osservare che la cosa si inverte:

Proposizione 4.7. *Se $T \in \mathcal{D}'$ è una distribuzione tale che sia $tT = 0$, allora si ha $T = c\delta$, con c costante.*

Dimostrazione. Infatti, se una funzione u di $\mathcal{D}$ è nulla su un intorno di 0, essa si scrive $tv(t)$, con $v = u(t)/t$ dove $u \neq 0$, v nulla dove u è nulla; la verifica è immediata. Ne consegue che $T(u) = T(tv) = tT(v) = 0$ per ogni tale funzione; di conseguenza, se due funzioni $u_1, u_2 \in \mathcal{D}$ coincidono su un intorno di 0 si ha $T(u_1) = T(u_2)$; in particolare, esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che per ogni funzione w che sia costantemente 1 su un intorno di 0 si abbia $T(w) = c$. Si scrive poi $u(t) = u(0) + tv(t)$, con $v(t) = \int_0^1 u'(t\theta)\,d\theta$ funzione C^∞ (ma certamente non a supporto compatto, se $u(0) \neq 0$); sia $w \in \mathcal{D}$ una funzione che sia costantemente 1 su un intorno di $\mathrm{Supp}(u) \cup \{0\}$; si ha allora $u = wu = w(u(0) + tv(t)) = u(0)w + tv(t)w(t)$, con $vw \in \mathcal{D}$; ne segue $T(u) = u(0)T(w) + tT(vw) = u(0)c$, come voluto. □

Naturalmente si ha anche:

Proposizione 4.8. *Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, e sia $a \in \mathbb{R}$; si ha $T = c\delta_{(a)}$ per una costante $c \in \mathbb{C}$ se e solo se $(t-a)T = 0$.*

Esempio 4.5. Provare che $t^2\delta = 0$ e che $t^2\delta' = 0$ ma che $t^2\delta^{(2)} \neq 0$.

Concludiamo la sezione con un risultato sulle soluzioni dell'equazione $\psi(t)T = 0$.

Proposizione 4.9. *Sia $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con zeri reali isolati e di molteplicità finita. Allora, in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\psi(t)T = 0$ se e solo se T è la serie (o somma se gli zeri di ψ sono finiti) di distribuzioni*

$$T = \sum_{z \in Z(\psi)} \sum_{i=0}^{\nu(z)-1} c_{z,i}\delta_z^{(i)} \qquad c_{z,i} \in \mathbb{C},$$

dove $Z(\psi)$ è l'insieme (necessariamente al più numerabile) degli zeri di ψ e, per ogni $z \in Z(\psi)$, $\nu(z)$ è la molteplicità di z.

Esempio 4.6. Le soluzioni in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ di $(t-2)(t-5)^2(t^2+1)T = 0$ sono le distribuzioni del tipo

$$T = a\delta_2 + b\delta_5 + c\delta_5' \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

Per futuro uso, si osservi che si ha $t\,\mathrm{v.\,p.}(1/t) = 1$ (verifica facile). Si ha quindi, ricordando che $tS = 0$ avviene se e solo se $S = k\delta$, $k \in \mathbb{C}$:

Proposizione 4.10. *Ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tale che sia $tT = 1$ è della forma $T = k\delta + \mathrm{v.\,p.}(1/t)$, con k costante.*

4.6 Supporto di una distribuzione

Definizione. Sia C un chiuso di $\mathbb{R}$. Si dice che una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ha il supporto contenuto in C se $T(\varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq \mathbb{R} \setminus C$. Il *supporto* $\mathrm{Supp}(T)$ di T è il minimo chiuso C con tale proprietà (si dimostra che tale minimo esiste).

Esempio 4.7. Siano $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con $\mathrm{Supp}\, T \subset C$, dove C è chiuso, e φ nulla su un aperto A contenente C. Allora $T(\varphi) = 0$. Infatti in tal caso si ha $\mathrm{Supp}\,\varphi \subseteq \mathbb{R} \setminus A \subseteq \mathbb{R} \setminus C$ (si usa qui il fatto che A è aperto!) e pertanto $T(\varphi) = 0$.

Esempio 4.8. Ogni funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ha il medesimo supporto come funzione e come distribuzione, cioè $\mathrm{Supp}(f) = \mathrm{Supp}(T_f)$: è il chiuso complementare degli aperti su cui f è quasi ovunque nulla.

Esempio 4.9. La delta di Dirac concentrata in a ha come supporto $\{a\}$.

Definizione. Si dice che due distribuzioni $S, T \in \mathcal{D}'$ coincidono sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ se $\mathrm{Supp}(S-T) \subset \mathbb{R} \setminus A$, cioè se $S(\varphi) = T(\varphi)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq A$.

L'insieme delle distribuzioni con il supporto contenuto in $[0, +\infty[$ si indica con $\mathcal{D}'_+ = \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$; è chiaramente un sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}'$.

4.7 Traslata di una distribuzione

Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, ed $a \in \mathbb{R}$, la traslata $\tau_a f$ opera su $\mathcal{D}$ nel modo seguente:

$$\langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t-a)\varphi(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(\theta)\varphi(a+\theta)\, d\theta = \langle T_f, \tau_{-a}\varphi \rangle.$$

Pertanto, se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ed $a \in \mathbb{R}$, si definisce la distribuzione $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, traslata di T mediante $a \in \mathbb{R}$, ponendo

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle.$$

La traslata di a della delta di Dirac concentrata in 0 è la delta di Dirac $\delta_{(a)}$ concentrata in a, come subito si vede ($\tau_a \delta(\varphi) = \delta(\tau_{-a}\varphi) = (\varphi(t+a))_{t=0} = \varphi(a)$). Una distribuzione si dice *periodica* se esiste $\tau \neq 0$ tale che sia $\tau_\tau T = T$; si dice in tal caso che τ è un periodo della distribuzione. L'insieme dei periodi, 0 incluso, è un sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$, come è immediato vedere; se T non è costante (nel qual caso, banalmente, ogni numero reale è un periodo) il gruppo dei periodi è l'insieme dei multipli di un $\tau > 0$, *periodo fondamentale*, minimo tra i periodi strettamente positivi.

4.8 Simmetrizzata

Similmente, la *simmetrizzata* $\tilde{T}$ di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è, per definizione:

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle,$$

dove $\tilde{\varphi}(t) := \varphi(-t)$ è la simmetrizzata di φ. Una distribuzione T si dice *pari, risp. dispari*, se coincide con la sua simmetrizzata $\tilde{T}$ (risp. con l'opposta della simmetrizzata, $-\tilde{T}$). L'esempio che segue è immediato ma molto utile nel calcolo delle trasformate di Fourier nell'ambito delle distribuzioni, come vedremo in seguito.

Esercizio 4.1. Sia T una distribuzione pari e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dispari. Provare che $T(\varphi) = 0$.

Esercizio 4.2. Sia T distribuzione pari e dispari. Allora $T = 0$.

4.9 Derivazione delle distribuzioni

Sia f una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}$. La sua derivata prima f' essendo continua è una distribuzione, e si ha, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, se $\operatorname{Supp}(\varphi)$ è contenuto nell'intervallo $[a, b]$:

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)\, dt = \int_a^b f'(t)\varphi(t)\, dt = [f(t)\varphi(t)]_a^b - \int_a^b f(t)\varphi'(t)\, dt =$$

(si ricordi che è $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$)

$$-\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)\, dt = \langle T_f, -\varphi' \rangle.$$

Si è insomma visto che se f è di classe C^1 la sua derivata f', pensata come distribuzione, opera su $\varphi \in \mathcal{D}$ allo stesso modo in cui f, pensata come distribuzione, opera su $-\varphi'$. E questo induce a porre la seguente:

Definizione. Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La *derivata* $DT = T'$ di T è la distribuzione

$$\langle T', \varphi \rangle := \langle T, -\varphi' \rangle \qquad \text{per ogni} \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Esempio 4.10. Come visto sopra, ogni funzione di classe C^1 ha per derivata distribuzionale la sua derivata classica. Più generalmente una funzione f continua e C^1 a tratti ha come derivata distribuzionale la sua derivata ordinaria: infatti anche per tali funzioni è possibile applicare la formula di integrazione per parti, come si è più volte fatto. Ad esempio, verifichiamo direttamente che la derivata della funzione $|t|$ è la funzione $\operatorname{sgn} t$:

$$\langle DT_{|\#|}, \varphi \rangle := \langle T_{|\#|}, -\varphi' \rangle = \int_a^b |t|(-\varphi'(t))\, dt =$$

(al solito, $a, b \in \mathbb{R}$ sono tali che sia $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq [a, b]$; qui supponiamo in più che sia $a < 0 < b$)

$$\int_a^0 (-t)(-\varphi'(t))\,dt + \int_0^b t(-\varphi'(t))\,dt = \int_a^0 t\varphi'(t)\,dt - \int_0^b t\varphi'(t)\,dt = [t\varphi(t)]_a^0 - \int_a^0 \varphi(t)\,dt - [t\varphi(t)]_0^b +$$

(si ricordi che, al solito, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$)

$$\int_0^a \varphi(t)\,dt = -\int_a^0 \varphi(t)\,dt + \int_0^a \varphi(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{sgn} t\varphi(t)\,dt = \langle \operatorname{sgn}, \varphi\rangle.$$

Esempio 4.11. Consideriamo lo scalino di Heaviside $H = \chi_{\mathbb{R}_+}$, che è una funzione di classe C^1 a tratti, ma discontinua. Si ha

$$\langle H', \varphi\rangle := \langle H, -\varphi'\rangle = \int_{\mathbb{R}} H(t)(-\varphi'(t))\,dt = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\,dt =$$
$$-\int_0^b \varphi'(t)\,dt = -[\varphi(t)]_0^b = \varphi(0) - \varphi(b) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle,$$

in altre parole

$$H' = \delta.$$

La derivata distribuzionale dello scalino di Heaviside è la delta di Dirac concentrata in 0.

Più generalmente, avendo una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente di classe C^1 a tratti, tale cioè che la sua restrizione ad ogni intervallo compatto $[a, b]$ sia di classe C^1 a tratti secondo la definizione data in Analisi Due, 13.5.5, l'insieme dei punti di salto di f può essere indicato in modo strettamente crescente, $j \mapsto a_j$, mediante un segmento di $\mathbb{Z}$, sia esso $J = \{n \in \mathbb{Z} : \alpha < n < \beta\}$, dove α, β sono numeri reali non interi, oppure $\alpha = -\infty$, e $\beta = +\infty$, od entrambi; si ha allora, detta f' la derivata classica di f, esistente in $\mathbb{R} \smallsetminus \{a_j : j \in J\}$

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{j\in J} (f(a_j^+) - f(a_j^-))\delta_{(a_j)}.$$

Sia infatti $\varphi \in \mathcal{D}$; se nell'intervallo $[a, b]$ contenente il supporto di φ cadono i punti $a_{j(1)}, \dots, a_{j(N)}$, per semplicità scritti $a_1 < \dots < a_N$, in cui f ha dei salti, si ha:

$$\langle T_f', \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)(-\varphi'(t))\,dt = -\int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt =$$
$$-\int_a^{a_1} f(t)\varphi'(t)\,dt - \sum_{k=1}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\varphi'(t)\,dt - \int_{a_N}^b f(t)\varphi'(t)\,dt = -[f(t)\varphi(t)]_a^{a_1} + \int_a^{a_1} f'(t)\varphi(t)\,dt -$$
$$-\sum_{k=1}^{N-1}[f(t)\varphi(t)]_{a_k}^{a_{k+1}} + \sum_{k=1}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\varphi(t)\,dt - [f(t)\varphi(t)]_{a_N}^b + \int_{a_N}^b f'(t)\varphi(t)\,dt =$$

gli integrali si accorpano fra loro, e risulta

$$\int_a^b f'(t)\varphi(t)\,dt - f(a_1^-)\varphi(a_1) - \sum_{k=1}^{N-1}(f(a_{k+1}^-)\varphi(a_{k+1}) - f(a_k^+)\varphi(a_k)) + f(a_N^+)\varphi(a_N) =$$
$$\int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)\,dt - \sum_{k=1}^{N} f(a_k^-)\varphi(a_k) + \sum_{k=1}^{N} f(a_k^+)\varphi(a_k) = \langle T_{f'}, \varphi\rangle + \sum_{k=1}^{N}(f(a_k^+) - f(a_k^-))\varphi(a_k).$$

La distribuzione $\varphi \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$ è la derivata distribuzionale della funzione $f(t) = [t]$, parte intera di t.

Esempio 4.12. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^m a tratti, come sopra. Si ha allora, per le successive derivate della distribuzione T_f:

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{j\in J}(f(a_j^+) - f(a_j^-))\delta_{(a_j)}$$

$$T_f'' = T_{f''} + \sum_{j\in J}(f'(a_j^+) - f'(a_j^-))\delta_{(a_j)} + \sum_{j\in J}(f(a_j^+) - f(a_j^-))\delta'_{(a_j)}$$

....

$$T_f^{(m)} = T_{f^{(m)}} + \sum_{j\in J}\left(\sum_{k=1}^{m}(f^{(m-k)}(a_j^+) - f^{(m-k)}(a_j^-))\delta_{(a_j)}^{(k-1)}\right).$$

In particolare, sia $g \in C^m(\mathbb{R})$; alteriamo la g ponendola d'autorità uguale a 0 su $]-\infty, 0[$, consideriamo cioè $f = Hg$; si ha (c'è un unico salto in $t = 0$):

$$(Hg)' = Hg'_{\text{cl}} + g(0^+)\delta$$
$$(Hg)'' = Hg''_{\text{cl}} + g'(0^+)\delta + g(0^+)\delta'$$

....

$$(Hg)^{(m)} = Hg_{\text{cl}}^{(m)} + g^{(m-1)}(0^+)\delta + g^{(m-2)}(0^+)\delta' + \cdots + g(0^+)\delta^{(m-1)},$$

dove a primo membro sono le derivate distribuzionali di Hg, a secondo membro $Hg_{\text{cl}}^{(k)}$ è invece il prodotto dello scalino di Heaviside H per la derivata $k-$esima classica di g; è la parte funzionale della derivata distribuzionale di Hg, e coincide con $(Hg)^{(k)}$, intesa nel senso delle distribuzioni, sull'aperto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: la differenza è infatti la distribuzione $\sum_{j=1}^{k-1} g^{(k-j)}(0^+)\delta^{(j)}$, che ha $\{0\}$ come supporto; tutte queste distribuzioni sono ovviamente nulle su $]-\infty, 0[$.

Esempio 4.13. La funzione $t \mapsto \log|t|$ (prolungata ad arbitrio in $t = 0$), è localmente sommabile in $\mathbb{R}$ e quindi definisce una distribuzione. La derivata ordinaria esiste per $t \neq 0$ ed è $1/t$, non sommabile su nessun intorno di 0. La derivata distribuzionale si chiama "valore principale di $1/t$" e può essere descritta come

$$\langle \text{v. p.}(1/t), \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right).$$

Infatti si ha

$$\langle D\log|\#|, \varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty}\log|t|\varphi'(t)\,dt = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\log|t|\varphi'(t)\,dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\log|t|\varphi'(t)\,dt\right);$$

Un'integrazione per parti porge

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\log|t|\varphi'(t)\,dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\log|t|\varphi'(t)\,dt = [\log|t|\varphi(t)]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt +$$
$$[\log|t|\varphi(t)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt = -\log\varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) - \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right)$$

Per concludere basta provare che si ha $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\log\varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) = 0$, che è immediato:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\log\varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\log\varepsilon)\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = 0\cdot(2\varphi'(0)) = 0$$

(è ben noto che $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\log\varepsilon = 0$).

4.9.1 Derivata di δ: il dipolo

La derivata della distribuzione δ è $\delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$. Come la δ viene raffigurata massa concentrata in 0, così la sua derivata δ' è raffigurata come *dipolo* posto in 0.

Si ricorda che un *dipolo elettrico ideale* è una versione idealizzata del campo generato da due cariche di egual valore assoluto e segno opposto, molto vicine fra loro. Spieghiamoci: due cariche $-q, q$ piazzate in x_1, x_2 rispettivamente sull'asse delle ascisse sono un dipolo di momento $q(x_2 - x_1)$ (rispetto all'asse x); per fissare le idee sia $x_1 = 0$ ed $x_2 = d > 0$, di modo che il momento è qd. Facciamo ora tendere d a 0^+, in modo che il momento resti costante, cioè che la distanza fra le cariche diventi εd e le cariche siano $\pm q/\varepsilon$. Un carica concentrata in un punto x, di valore c, è schematizzata con $c\delta_{(x)}$; il dipolo è quindi dato da $-(q/\varepsilon)\delta_{(0)} + (q/\varepsilon)\delta_{(\varepsilon d)} = (q/\varepsilon)(\delta_{(\varepsilon d)} - \delta)$; testandolo contro una $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ si ha

$$\frac{q}{\varepsilon}\langle\delta_{(\varepsilon d)} - \delta, \varphi\rangle = \frac{q}{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon d) - \varphi(0)) = qd\,\frac{\varphi(\varepsilon d) - \varphi(0)}{\varepsilon d} \to (qd)\,\varphi'(0) \quad \text{per } \varepsilon \to 0^+.$$

E poiché $\varphi'(0) = -\langle\delta', \varphi\rangle$ si ha:

. *La distribuzione* $(qd)\,\delta'$ *è un dipolo ideale di momento* $-qd$ *piazzato nell'origine.*

Le successive derivate di δ sono distribuzioni di ordine via via più elevato.

4.9.2 Formula di Leibnitz

. *Sia* $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *Dimostrare che si ha*

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'; \qquad (\alpha T)'' = \alpha'' T + 2\alpha' T' + \alpha T'';$$

(in generale, vale la formula di Leibnitz $(\alpha T)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \alpha^{(m-k)} T^{(k)}$*).*

Risoluzione. Si ha

$$\langle (\alpha T)', \varphi \rangle = -\langle \alpha T, \varphi' \rangle = -\langle T, \alpha \varphi' \rangle$$

Dalla formula di Leibnitz per funzioni si ha $(\alpha\varphi)' = \alpha'\varphi + \alpha\varphi'$; sostituendo nella precedente $(\alpha\varphi)' - \alpha'\varphi$ in luogo di $\alpha\varphi'$ si ottiene

$$\langle (\alpha T)', \varphi \rangle = -\langle T, (\alpha\varphi)' - \alpha'\varphi \rangle = \langle T', \alpha\varphi \rangle + \langle T, \alpha'\varphi \rangle = \langle \alpha T', \varphi \rangle + \langle \alpha' T, \varphi \rangle,$$

e la conclusione è raggiunta. La formula per la derivata seconda, e successive, si ottengono poi per induzione, esattamente come visto per le funzioni. □

Esercizio 4.3. Dimostrare che traslazione e derivazione commutano, cioè che per ogni $a \in \mathbb{R}$ ed ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si ha

$$(\tau_a T)' = \tau_a (T)';$$

applicazione: la derivata di $t \mapsto H(t-a)$ è $\delta_{(a)}$.

4.9.3 Derivate di funzioni continue e distribuzioni

Introducendo le distribuzioni non si sono fatti sprechi. Secondo le linee programmatiche tracciate all'inizio, tutte le funzioni continue devono essere distribuzioni, e tutte le distribuzioni devono essere derivabili quante volte si vuole. Si può dimostrare il seguente

Teorema 4.11. *Ogni* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *è localmente derivata* $N-$*esima di una funzione continua: ciò significa che data* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *ed un aperto* $A \subset \mathbb{R}$ *a chiusura compatta esistono una funzione continua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *ed un naturale* N *tali che la derivata* $N-$*esima di* f *nel senso delle distribuzioni coincida con* T *su* A.

Il teorema è conseguenza della proposizione seguente, la cui dimostrazione è omessa:

Proposizione 4.12. *Se* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *è distribuzione di ordine* m *esiste* $f \in C(\mathbb{R})$ *tale che sia* $T = T_{f^{(m+2)}}$.

4.10 Limiti di distribuzioni

La topologia sulle distribuzioni è quella debole.

Definizione. Una successione di distribuzioni $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Analogamente, si dice che una serie di distribuzioni $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} T_n$ converge a S se la successione delle ridotte $S_n = T_0 + ... + T_n$ converge a S.

Le convergenze nelle norme studiate precedentemente implicano la convergenza in distribuzione. Premettiamo alla dimostrazione di questa affermazione una ulteriore definizione di convergenza.

Definizione. Si dice che la successione f_n di funzioni di $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ converge ad una funzione f in $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ se per ogni intervallo $[a, b]$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0.$$

Lasciamo al lettore la facile la facile dimostrazione del seguente importante esempio.

Esempio 4.14. Sia f_n una successione di funzioni in $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. La convergenza uniforme, o in L^1, o in L^2 della successione implica la convergenza della stessa in $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

Proposizione 4.13. *Sia f_n una successione di funzioni convergenti ad f in $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Allora f_n converge ad f in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Di conseguenza la convergenza uniforme o in L^p $(p = 1, 2)$ implica la convergenza in distribuzione.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con supporto contenuto in $[a, b]$. Allora

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx - \int f(x)\varphi(x)\,dx \right| \le \|\varphi\|_\infty \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

da cui la conclusione. □

Ecco un esempio di convergenza in distribuzione che non è una convergenza uniforme o in L^p.

Esempio 4.15. Una $\delta-$sequenza è una successione di funzioni di $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ che tende alla distribuzione di Dirac (concentrata in 0). I mollificatori (definiti in 2.4.5) sono $\delta-$sequenze (esercizio successivo), ma le ipotesi sono più restrittive di quanto occorre per essere una $\delta-$sequenza.

Verifichiamo che, ad esempio, la successione di funzioni

$$f_k(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(kt)}{t} \qquad k \in \mathbb{N}$$

è una $\delta-$sequenza, anche se $\sin t/t \notin L^1(\mathbb{R})$. Se $\varphi \in \mathcal{D}$ e $\varphi(t) = 0$ per $|t| \ge a > 0$ si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\frac{\sin(kt)}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \varphi(t)\frac{\sin(kt)}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} (\varphi(t) - \varphi(0) + \varphi(0))\,\frac{\sin(kt)}{t}\,dt =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}\sin(kt)\,dt + \frac{\varphi(0)}{\pi}\int_{-ka}^{ka} \frac{\sin s}{s}\,ds;$$

poiché $t \mapsto (\varphi(t) - \varphi(0))/t$ appartiene ad $L^1([-a, a])$, il lemma di Riemann–Lebesgue mostra che il primo integrale tende a 0; e ricordando che $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(kt)/t = \pi$, il secondo integrale tende a $\varphi(0) = \delta(\varphi)$, sempre al tendere di k a $+\infty$. Si noti che la derivabilità di φ in $t = 0$ è importante.

Esercizio 4.4. Ricordiamo la definizione di famiglia di mollificatori data nella sezione sulla trasformazione di Fourier: si prende $g \in L^1(\mathbb{R})$, con $\int_{\mathbb{R}} g = 1$, e per $\lambda > 0$ si pone $g_\lambda(t) = \lambda g(\lambda t)$. Al tendere di λ a $+\infty$ la distribuzione g_λ tende in $\mathcal{D}'$ alla δ di Dirac; anzi, se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua e limitata si ha

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0).$$

Risoluzione. Si scrive

$$\int_{\mathbb{R}} g_\lambda(t)\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \lambda g(\lambda t)\varphi(t)\,dt = (\text{posto } \lambda t = \theta) = \int_{\mathbb{R}} g(\theta)\varphi(\theta/\lambda)\,dt =$$
$$\int_{\mathbb{R}} g(\theta)\varphi(0)\,d\theta = \varphi(0);$$

infatti $\lim_{\lambda\to+\infty} \varphi(\theta/\lambda)g(\theta) = \varphi(0)\,g(\theta)$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ (perché φ è continua in 0), tutte queste funzioni essendo dominate da $\|\varphi\|_\infty|g(\theta)|$, funzione che sta in $L^1(\mathbb{R})$. □

Esempio 4.16. Si consideri la successione $u_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Provare che u_n converge quasi ovunque ad una funzione u da determinare;

(b) È vero che u_n converge a u in $L^1(\mathbb{R})$?

(c) Mostrare direttamente (cioè fare il calcolo!) che u_n converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ad una distribuzione da determinare.

Risoluzione. La successione $u_n(x)$ converge a 0 se $x \neq 0$ a $+\infty$ altrimenti; essa quindi converge a 0 q.o. Si ha poi

$$\|u_n - 0\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2}\, dx = (t = \sqrt{n}x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

che non tende a 0 per $n \to +\infty$: u_n non converge a 0 in $L^1(\mathbb{R})$ (e non converge quindi in L^1 a nessuna funzione f, altrimenti una sua sottosuccessione convergerebbe q.o. a f, da cui $f = 0$ ma si è appena visto che ciò non accade). Infine, se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)\varphi(x)\, dx = (t = \sqrt{n}x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \varphi(t/\sqrt{n})\, dt$$

Per ogni t si ha poi $\lim_{t\to+\infty} e^{-t^2}\varphi(t/\sqrt{n}) = e^{-t^2}\varphi(0)$ ed è $|e^{-t^2}\varphi(t/\sqrt{n})| \leq e^{-t^2}\|\varphi\|_\infty \in L^1(\mathbb{R})$: per il teorema di convergenza dominata si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}\varphi(0) = \sqrt{\pi}\delta(\varphi):$$

la successione u_n converge a $\sqrt{\pi}\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. □

ESEMPIO 4.17. La successione δ_n converge a 0 in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: infatti se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha $\delta_n(\varphi) = \varphi(n) = 0$ per n sufficientemente grande.

ESERCIZIO 4.5. Sia u_n la successione definita da

$$u_n(x) = \frac{n}{1 + n^2x^2}$$

i) Dire se $(u_n)_n$ converge q.o., calcolarne il limite in caso affermativo.
ii) Dire se $(u_n)_n$ converge in $L^1(\mathbb{R})$, calcolarne il limite in caso affermativo.
iii) Dire se $(u_n)_n$ converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, calcolarne il limite in caso affermativo.

Dalla definizione risulta subito che ha *sempre* luogo, per le distribuzioni, il passaggio al limite sotto il segno di derivata. Cioè:

Proposizione 4.14. *Se $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a T in $\mathcal{D}'$, allora $(T'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a T' in $\mathcal{D}'$.*

Dimostrazione. Infatti si ha $\langle T'_k, \varphi\rangle = \langle T_k, -\varphi'\rangle$, e per definizione di convergenza della successione $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si ha $\lim_{k\to\infty}\langle T_k, -\varphi'\rangle = \langle T, -\varphi'\rangle = \langle T', \varphi\rangle$. □

ESEMPIO 4.18. La distribuzione $\varphi \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$, derivata della funzione parte intera, può essere indicata come somma della serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(n)}$, dove ogni $\delta_{(n)}$ è una delta concentrata nell'intero n; la funzione parte frazionaria, che per definizione è $\mathrm{frac}(t) = t - [t]$ ha quindi per derivata la distribuzione $1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(n)}$.

ESEMPIO 4.19. Il lemma di Riemann–Lebesgue implica subito che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è periodica limitata localmente sommabile, la successione $f_n(t) = f(nt)$ converge nel senso delle distribuzioni alla costante $\mu = \int_0^\tau f(t)\, dt/\tau$, media di f su un periodo. In particolare le successioni di funzioni $e^{int}, \cos(nt), \sin(nt)$ convergono tutte a 0 nel senso delle distribuzioni, pur non convergendo né puntualmente né in alcun altro senso (fra quelli a noi sinora noti).

Si può dimostrare che

Proposizione 4.15. *Se $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di distribuzioni di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, e per ogni $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ il limite $\lim_{k\to\infty} T_k(u)$ esiste finito, allora la formula*

$$T(u) = \lim_{k\to\infty} T_k(u) \qquad u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

definisce una distribuzione su $\mathbb{R}$.

In altre parole, il funzionale limite T è automaticamente continuo su ogni $\mathcal{D}_K$; la dimostrazione, qui omessa, usa un teorema di Analisi funzionale noto come "teorema della limitatezza uniforme".

Esempio 4.20. Sia c_k una successione di numeri complessi. Allora $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\delta_k$ converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Infatti se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\operatorname{Supp}\varphi \subseteq [-M, M]$, $M \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\delta_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{M} c_k\varphi(k);$$

la proposizione precedente permette di concludere.

Esercizio 4.6. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{per} \quad 1/n \le |x| \le n \\ 0 & \text{per} \quad \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Si calcoli il limite puntuale f di f_n e si dica se la convergenze è uniforme in $\mathbb{R}$;

(ii) si dica se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in L^2(\mathbb{R})$;

(iii) si dica se f_n converge a f in $L^1(\mathbb{R})$, in $L^2(\mathbb{R})$, in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Esempio 4.21. Come ulteriore importante esempio non banale di successione di funzioni che converge nel senso delle distribuzioni, ma non in senso funzionale, consideriamo la successione dei nuclei di Dirichlet $D_m(\omega t) = \sum_{k=-m}^{m} e^{ik\omega t}$, dove $\omega = 2\pi/\tau$, con $\tau > 0$ fissato. Come successione di funzioni non si ha convergenza puntuale in alcun $t \in \mathbb{R}$, ed anzi $D_m(n\omega\tau) = 2m + 1 \to +\infty$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Ebbene

. Nel senso delle distribuzioni, la successione dei nuclei di Dirichlet in periodo τ converge alla distribuzione $\tau\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{(k\tau)}$.

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{D}$ e sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $\operatorname{Supp}(\varphi) \subseteq [-\tau/2 - N\tau, N\tau + \tau/2]$; si ha allora, per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} D_m(\omega t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\tau/2-N\tau}^{N\tau+\tau/2} D_m(\omega t)\varphi(t)\,dt = \sum_{k=-N}^{N} \int_{k\tau-\tau/2}^{k\tau+\tau/2} D_m(\omega t)\varphi(t)\,dt;$$

dimostriamo che per ogni k tra $-N$ ed N si ha

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{k\tau-\tau/2}^{k\tau+\tau/2} D_m(\omega t)\varphi(t)\,dt = \tau\varphi(k\tau)$$

il che conclude la dimostrazione. Traslando, basta provare la cosa per $k = 0$. Si ha ora

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} D_m(\omega t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sum_{k=-m}^{m} e^{ik\omega t}\varphi(t)\,dt =$$
$$\sum_{k=-m}^{m} \tau \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{ik\omega t}\varphi(t)\,\frac{dt}{\tau} = \tau \sum_{k=-m}^{m} c_{-k}(\varphi_0)$$

dove φ_0 è la funzione ottenuta prolungando in periodicità τ la funzione uguale a φ su $[-\tau/2, \tau/2[$, e $c_{-k}(\varphi_0)$ ne è il coefficiente di Fourier di ordine $-k$. Tale funzione è di classe C^1 a tratti, e nei punti di continuità la sua serie di Fourier converge alla funzione stessa, in particolare ciò accade per $t = 0$. La dimostrazione è conclusa. □

4.11 Primitive

Una primitiva di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è una distribuzione $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tale che sia $S' = T$. Si può dimostrare:

Proposizione 4.16. *Ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ammette primitive; e due primitive differiscono per una costante.*

Accettiamo questo teorema la cui dimostrazione è svolta sotto.

Una funzione $\varphi \in \mathcal{D}$ ha una primitiva in $\mathcal{D}$ se e solo se $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 0$; in tal caso ne ha solo una, che è data da $\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\theta)\,d\theta$. Ciò è immediato; si ricordi infatti che tutte le primitive di φ si ottengono in questo modo: $\psi(t) = k + \int_c^t \varphi(\theta)\,d\theta$; con $c \in \mathbb{R}$ fissato ad arbitrio, al variare di k nell'insieme delle funzioni costanti. Sia al solito $[a, b]$ un intervallo compatto che contiene il supporto di φ; posto $\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\theta)\,d\theta = \int_a^t \varphi(\theta)\,d\theta$, ψ è l'unica primitiva di φ che sia nulla su $]-\infty, a[$ ed è quindi l'unica eventuale primitiva a supporto compatto; d'altra parte si ha $\psi(t) = \psi(b) = \int_a^b \varphi(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbb{R}} \varphi$ per ogni $t \geq b$; ne segue che ψ è a supporto compatto se e solo se $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 0$, come asserito. In generale, se φ_0 è una funzione di $\mathcal{D}$ fissata una volta per tutte, con $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0 = 1$, ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si scrive

$$\varphi = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \varphi_0 + u_\varphi \quad \text{con } u_\varphi \in \mathcal{D} \text{ che ha primitiva appartenente ad } \mathcal{D}:$$

ciò è ovvio perché definendo $u_\varphi := \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \varphi_0$ la funzione u_φ sta in $\mathcal{D}$ ed ha integrale nullo. Si noti che inoltre la funzione $\varphi \mapsto u_\varphi$ è lineare e continua di $\mathcal{D}$ in se stesso.

Dimostrazione. (della proposizione sulle primitive) Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$; S è una primitiva di T se e solo se

$$\langle S', \varphi \rangle := \langle S, -\varphi' \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$. Scritto φ come sopra, posto $v_\varphi(t) = \int_{-\infty}^t u_\varphi(\theta)\, d\theta$, e fissato $k \in \mathbb{C}$, si definisce

$$\langle S, \varphi \rangle = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) k + \langle T, -v_\varphi \rangle.$$

È immediato vedere che $S' = T$; la conclusione è lasciata al lettore. □

4.12 Convoluzione di distribuzioni

La convoluzione di distribuzioni non sempre è possibile, come non sempre lo era quella tra funzioni. Al solito ci ispiriamo alle funzioni; la convoluzione tra funzioni (ad esempio in $L^1(\mathbb{R})$) è $f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\theta) g(\theta)\, d\theta$; essa opera su $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ come segue:

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-\theta) g(\theta)\, d\theta \right) \varphi(t)\, dt =$$

usando il teorema di Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-\theta) \varphi(t)\, dt \right) g(\theta)\, d\theta = \\
&\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) \varphi(\theta + u)\, du \right) g(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbb{R}} \langle T_f, \tau_{-\theta}\varphi \rangle g(\theta)\, d\theta = \langle T_{g,\theta}, \langle T_f, \tau_{-\theta}\varphi \rangle \rangle,
\end{aligned}$$

dove $T_{g,\theta}$ indica che la distribuzione T_g opera sulla funzione $\theta \mapsto \langle T_f, \tau_{-\theta}\varphi \rangle$, che è l'azione di f sulla traslata di φ mediante $-\theta$. Possiamo quindi definirla nel modo seguente, quando esiste:

$$S * T(\varphi) = \langle S_\theta, \langle T, \tau_{-\theta}\varphi \rangle, \rangle;$$

naturalmente $\tau_{-\theta}\varphi$ è la funzione di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ così definita: $t \mapsto \varphi(\theta + t)$.

Nel caso in cui T o S sono funzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ la convoluzione $T * S$ è particolarmente semplice; la seguente proprietà può essere assunta come definizione di convoluzione in questo caso particolare.

Definizione. Siano $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $S \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. La convoluzione di T con S è la *funzione* definita da

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (T * S)(x) = \int T(y) S(x-y)\, dy$$

Si osservi, nella definizione precedente, che $y \to S(x-y)$ è un elemento di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; la formula precedente è quindi ben posta.

Ci limitiamo a menzionare alcuni fatti sul prodotto di convoluzione tra distribuzioni, senza dimostrazione:

- La convoluzione tra due funzioni localmente sommabili coincide con l'usuale convoluzione data con l'integrale, quando questa è definita.

- Se $S * T$ è definita, allora è definita anche $T * S$, e si ha $S * T = T * S$.

- Se $S * T$ è definita, allora anche $S' * T$ ed $S * T'$ sono definite, e si ha

$$(S * T)' = S' * T = S * T'.$$

- Se una delle due distribuzioni è a supporto compatto, la convoluzione tra esse è definita. In particolare, per ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si ha

$$\delta * T = T * \delta = T; \quad \delta' * T = T'; \quad \dots; \quad \delta^{(k)} * T = T^{(k)}; \quad \dots$$

  cioè, la δ di Dirac è elemento neutro per la convoluzione (questa è una delle sue origini!); e la convoluzione di T con le derivate della δ equivale a fare la derivata della distribuzione T. Si ha anche $\delta_{(a)} * T = \tau_a T (= T(t-a))$ (la convoluzione con la traslata di δ equivale a traslare T), e $\delta_{(a)}^{(k)} * T = \tau_a T^{(k)}$.

  Tutte queste affermazioni si verificano facilmente con la definizione sopra data.

Verifichiamo ad esempio che si ha $\delta * T = T$. Presa $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha

$$\delta * T(\varphi) = \langle \delta_\theta, \langle T, \tau_{-\theta}\varphi \rangle, \rangle = \langle T, \tau_0 \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

per cui $\delta * T = T$; controlliamo che è $T * \delta = T$:

$$T * \delta(\varphi) = \langle T_\theta, \langle \delta, \tau_{-\theta}\varphi \rangle \rangle = \langle T_\theta, \varphi(0+\theta) \rangle = T(\varphi).$$

4.13 Funzioni a decrescenza rapida: lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Occorre considerare, fra le distribuzioni, quelle che "all'infinito non crescono troppo in fretta": esse sono le uniche a cui è possibile applicare la trasformazione di Fourier, e servono per definire le trasformate di Fourier e di Laplace delle distribuzioni stesse. Le distribuzioni temperate sono il duale di uno spazio più grande di $\mathcal{D}$, con una topologia meno forte di quella di $\mathcal{D}$, e di conseguenza sono meno di tutte le possibili distribuzioni su $\mathbb{R}$.

4.13.1 Funzioni a decrescenza rapida

Lo spazio funzionale di cui parliamo è lo spazio di Schwartz $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle *funzioni a decrescenza rapida*: chiamiamo così quelle funzioni $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ che tendono a zero all'infinito, assieme alle loro derivate, più rapidamente di qualsiasi polinomio, tali cioè che sia

$$\lim_{t\to\pm\infty} t^k u^{(l)}(t) = 0 \qquad \text{per ogni } k, l \in \mathbb{N}.$$

Osservazione 19. Essendo, per $u \in \mathcal{S}$, $\lim_{t\to\pm\infty}(1+t^2)u(t) = 0$, la funzione $(1+t^2)|u(t)|$ ha un massimo assoluto $M(u)$; si ha quindi

$$|u(t)| \le \frac{M(u)}{1+t^2} \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R};$$

da ciò segue che $u \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni p, $1 \le p \le +\infty$; inoltre, se $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di reali che diverge abbastanza in fretta (ad esempio se $|t_k| \ge k$ per k abbastanza grande), allora la serie $\sum_{k=0}^\infty u(t_k)$ è assolutamente convergente. Ciò è utile poi.

Non è difficile riconoscere che per una funzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ supporre che le derivate siano tutte "o piccolo" di qualsiasi funzione razionale all'infinito è equivalente a supporre che sia

$$\|u\|_{\nu,m} = \max\{\|(1+t^2)^{\nu/2} u^{(k)}(t)\|_\infty : k = 0, \dots, m\} < +\infty \qquad \text{per ogni } \nu, m \in \mathbb{N};$$

questa è una famiglia di norme che determina la topologia di $\mathcal{S}$. Ma abbandoniamo questi tecnicismi. Basta ricordare che in $\mathcal{S}$ una successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $u \in \mathcal{S}$ se per ogni $k, l \in \mathbb{N}$ la successione $t^k u_n^{(l)}$ converge a $t^k u^{(l)}$, *uniformemente su tutto* $\mathbb{R}$. Le funzioni di $\mathcal{D}$ sono chiaramente anche funzioni di $\mathcal{S}$; altre funzioni di $\mathcal{S}$ a supporto non compatto sono ad esempio le gaussiane $t \mapsto e^{-at^2}$ $(a > 0)$, la funzione $t \mapsto e^{-a\sqrt{1+t^2}}$, le funzioni $\sin t e^{-t^2}$, la secante iperbolica $t \mapsto 1/\cosh t$, ecc. ecc. Si può dimostrare che $\mathcal{D}$ è *denso* in $\mathcal{S}$; e ci si convince facilmente del fatto che la topologia di $\mathcal{D}$ è di fatto strettamente più fine di quella indotta su $\mathcal{D}$ da $\mathcal{S}$: se i supporti delle funzioni restano in un fissato compatto K le norme $\|\#\|_{\nu,m}$ sono topologicamente equivalenti alle norme $\|\#\|_{(m)}$, pertanto su ogni $\mathcal{D}_K$ la topologia indotta da $\mathcal{S}$ è proprio la topologia di $\mathcal{D}_K$; e di fatto la convergenza di una successione in $\mathcal{D}$ richiede che i supporti siano contenuti tutti in uno stesso compatto K di $\mathbb{R}$, cosa che invece la convergenza in $\mathcal{S}$ non esige.

Se ad esempio $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ non è identicamente nulla, la successione $u_n(t) = u(t/n)/2^n$ non tende a 0 in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$): infatti, se $[-a, a]$ è il minimo intervallo compatto che contiene il supporto di u, il minimo intervallo compatto che contiene il supporto di u_n è $[-na, na]$, e quindi i supporti di u_n non sono tutti contenuti in uno stesso compatto. Ma si ha $u_n^{(l)}(t) = u^{(l)}(t/n)/(n^l 2^n)$; per ogni $k, l \in \mathbb{N}$ si ha quindi:

$$\|t^k u_n^{(l)}\|_\infty \le \frac{(na)^k}{2^n n^l}\|u^{(l)}\|_\infty$$

(basta prendere $|t| \le na$ nella stima della sup–norma, dato che se $|t| > na$ si ha $u^{(l)}(t) = 0$) quantità che chiaramente è infinitesima per $n \to +\infty$; quindi u_n tende a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Sono utili alcune osservazioni: se u_n è una successione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ che tende a 0, così fa anche la successione $p(t)u_n$, qualunque sia il polinomio $p(t)$: ciò è immediato per la definizione precedente; ed altrettanto immediato è il fatto che anche la successione u'_n delle derivate è infinitesima in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; inoltre, u_n tende a 0 anche in $L^p(\mathbb{R})$, per ogni p con $1 \le p \le \infty$: infatti $(1 + t^2)u_n$ tende uniformemente a 0, e se $\mu_n = \|(1 + t^2)u_n\|_\infty$ si ha, come osservato all'inizio:

$$|u_n(t)| \le \frac{\mu_n}{1+t^2} \quad \text{da cui} \quad \|u_n\|_p \le \mu_n \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^p}\right)^{1/p},$$

che prova quanto voluto, dato che $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$.

È chiaro che Schwartz è stato indotto a definire lo spazio che porta il suo nome dalle formule per la derivata della trasformata e della trasformata della derivata, viste nell'ambito della trasformazione di Fourier: se $t \mapsto t^m f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, allora $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (e $\lim_{t\to\infty}(\mathcal{F}f)^{(m)}(\xi) = 0$, per ogni $m \in \mathbb{N}$); se invece $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, ed ogni $f^{(m)}$ sta in $L^1(\mathbb{R})$ (e questo certamente accade se $t \mapsto (1 + t^2)f^{(m)}(t)$ è infinitesima all'infinito), allora $\mathcal{F}(f^{(m)})(\xi) = (2\pi i\xi)^m \mathcal{F}f(\xi)$; inoltre si ha, per $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\xi^k(\mathcal{F}f)^{(l)}(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^k}\mathcal{F}\left(\partial^k\left((-2\pi it)^l f\right)\right)(\xi) \qquad \text{per ogni} \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Proposizione 4.17. *La trasformazione di Fourier induce un isomorfismo, che topologicamente è un omeomorfismo, di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in se stesso, con l'antitrasformazione $\mathcal{F}^{-1}$ come inversa.*

Dimostrazione. È contenuta in quanto sopra detto. Sia infatti u_n successione infinitesima in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si ricordi che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $\|\mathcal{F}f\|_\infty \le \|f\|_1$; ne segue

$$\|\xi^k(\mathcal{F}u_n)^{(l)}(\xi)\|_\infty \le \frac{1}{(2\pi)^{k-l}}\|\partial^k\left(t^l u_n\right)\|_1;$$

Come sopra osservato, se u_n tende a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ così fanno anche $t^l u_n$ e $\partial^k(t^l u_n)$, successione che quindi tende a 0 anche in $L^1(\mathbb{R})$, sempre per quanto sopra osservato; ne segue che la trasformata di Fourier di quest'ultima successione, trasformata che è $\xi^k(\mathcal{F}u_n)^{(l)}(\xi)$, converge uniformemente a 0. Essendo ciò vero per ogni $k, l \in \mathbb{N}$, si ha che che $\mathcal{F}u_n$ tende a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ciò prova che $\mathcal{F}$ è continua; le stesse cose si possono dire per l'antitrasformata, quindi $\mathcal{F}$ è omeomorfismo di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in se stesso. □

4.14 Distribuzioni temperate

Definizione. Si chiama *distribuzione temperata* su $\mathbb{R}$ ogni forma lineare continua $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. Lo spazio delle distribuzioni temperate, duale topologico di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, si indica con $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Esempio 4.22. Non ogni $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ è temperata, ad esempio $t \mapsto e^t$ non è temperata: infatti $\int_{\mathbb{R}} e^t e^{-\sqrt{1+t^2}}\,dt$ non esiste finito, dato che la funzione tende ad 1 per $t \to +\infty$; occorre qualche limitazione sulla crescita della funzione a $\pm\infty$.

Esempio 4.23. Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ tale che $|f| \le h$ con h temperata (cioè T_h temperata). Allora f è temperata.

Si vede subito che se T, S sono temperate anche $T+S$, T', le traslate di T sono temperate.

Tutte le funzioni f a crescita non più che polinomiale (per cui cioè esiste un polinomio $p(t)$ tale che sia $|f(t)| \leq |p(t)|$, almeno per $|t|$ abbastanza grande) definiscono distribuzioni temperate. Più precisamente si ha:

Proposizione 4.18. *Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ tale che*

$$|f(t)| \leq |p(t)| g(t)$$

dove p è un polinomio e $g \in L^1(\mathbb{R})$, $g \geq 0$. Allora f è una distribuzione temperata. In particolare una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ è una distribuzione temperata.

Dimostrazione. Infatti, per quanto visto sopra è sufficiente provare che $|t|^k g(t)$ è temperata. Ora, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la funzione $|t|^k \varphi(t)$ è limitata (è continua e tende a 0 all'infinito), pertanto $|t^k| g(t)\varphi(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre, se φ_n tende a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$\left| \int |t^k| g(t) \varphi_n(t)\, dt \right| \leq \|t^k \varphi_n(t)\|_\infty \int g(t)\, dt \to 0$$

per $n \to +\infty$. □

Esempio 4.24. I polinomi e le funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ sono distribuzioni temperate. Infatti, se p è un polinomio si ha

$$p(t) = (p(t)(t^2+1)) \frac{1}{t^2+1} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{t^2+1} \in L^1(\mathbb{R}),$$

e se $f \in L^2(\mathbb{R})$ si ha

$$f(t) = (t^2+1) \left(f(t) \frac{1}{t^2+1} \right)$$

ed è $f(t)\dfrac{1}{t^2+1} \in L^1(\mathbb{R})$; in tutti i casi si conclude grazie all'esempio precedente.

Esempio 4.25. Provare che $f(t) \log|t| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (sugg.: usare il criterio precedente per vedere che $f(t)\chi_{[-1,1]}$ e $f(t)\chi_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}$ sono temperate...)

Esempio 4.26. Si può dimostrare anche che *ogni distribuzione a supporto compatto è temperata* (nel senso che la distribuzione, definita su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, si estende a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

La derivata di una distribuzione temperata è una distribuzione temperata, come si vede subito (la derivazione è continua come funzione di $\mathcal{S}$ in se stesso).

Esempio 4.27. La funzione $H \log : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $H\log(t) = 0$ se $t \leq 0$, $H\log(t) = \log t$ se $t > 0$ è una distribuzione temperata. La sua derivata cos'è? È la distribuzione che si chiama "parte finita di $H(t)/t$":

$$\int_{\mathbb{R}} (H \log t)' u(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \log t(-u'(t))\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left([-\log t u(t)]_\varepsilon^{+\infty} + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{u(t)}{t}\, dt \right) =$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(u(\varepsilon) \log \varepsilon + \int_\varepsilon^1 \frac{u(t)}{t}\, dt \right) + \int_1^{+\infty} \frac{u(t)}{t}\, dt.$$

Scrivendo ora

$$\int_\varepsilon^1 \frac{u(t)}{t}\, dt = \int_\varepsilon^1 \frac{u(t)-u(0)}{t}\, dt + \int_\varepsilon^1 \frac{u(0)}{t}\, dt = \int_\varepsilon^1 \frac{u(t)-u(0)}{t}\, dt - u(0) \log \varepsilon,$$

ed osservando che si ha $\lim_{\varepsilon \to 0^+} (u(\varepsilon) - u(0)) \log \varepsilon = 0$, e che $(u(t) - u(0))/t$ si prolunga per continuità in $t = 0$, si ha alfine

$$\int_{\mathbb{R}} (H \log t)' u(t)\, dt = \int_0^1 \frac{u(t)-u(0)}{t}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{u(t)}{t}\, dt,$$

Indicando con $H(t)/t$ questa distribuzione, si dimostri (esercizio) che si ha $\mathrm{v.\,p.}(1/t) = H(t)/t - \widetilde{H(t)/t}$.

La funzione $\log|t|$ è temperata, e la sua derivata $\mathrm{v.\,p.}(1/t)$ è pure temperata.

4.14.1 Moltiplicazione per funzioni C^∞

È chiaro che non è in generale possibile moltiplicare una distribuzione temperata per una funzione C^∞: la costante 1 è temperata, ma $e^t = e^t \cdot 1$ non è distribuzione temperata. Si può tuttavia moltiplicare una distribuzione temperata per una funzione polinomiale o per una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ con tutte le derivate limitate (come $t \mapsto e^{iat}$).

4.14.2 Convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Definizione. Una successione di distribuzioni $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad una distribuzione $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha
$$\lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$
Analogamente, si dice che una serie di distribuzioni $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} T_n$ converge a S se la successione delle ridotte $S_n = T_0 + ... + T_n$ converge a S.

Osservazione 20. Si faccia attenzione al fatto che mentre una successione che converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ converge alla stessa distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il viceversa è falso in generale. Ad esempio, la successione di distribuzioni temperate $2^k\delta_k$ converge a 0 in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ma non converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Anche qui si può dimostrare che vale la seguente proposizione.

Proposizione 4.19. *Se $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di distribuzioni di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, e per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ il limite $\lim_{k\to\infty} T_k(\varphi)$ esiste finito, allora la formula*
$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$
definisce una distribuzione temperata su $\mathbb{R}$.

Esempio 4.28. Sia c_k una successione di numeri complessi tale che $|c_k| = O(k^m)$ per $k \to +\infty$, per qualche $m \in \mathbb{N}$. Allora $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\delta_k$ converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Infatti se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\delta_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi(k)$$
che converge essendo ad esempio
$$\lim_{k\to+\infty} |k^2(c_k\varphi(k))| = 0.$$
La proposizione precedente permette allora di concludere.

Esercizio 4.7. Sia u_n la successione
$$u_n(x) = n\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]}$$
i) Dire se u_n converge puntualmente e/o uniformemente; a quale funzione?

ii) Si supponga che u_n converga in $L^1(\mathbb{R})$; a quale funzione converge? (motivare la risposta); dire poi se u_n converge effettivamente in $L^1(\mathbb{R})$.

iii) Definire la convergenza di una successione di distribuzioni T_n in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

iv) La successione data u_n converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$? in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

4.15 Trasformazione di Fourier delle distribuzioni temperate

È spontaneo ormai definire la trasformazione di Fourier per le distribuzioni temperate. Si ricordi la formula di dualità: se $f, g \in L^1$, allora $\int_{\mathbb{R}} f(t)\widehat{g}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi$; se f è una funzione di $L^1(\mathbb{R})$, sia f che $\widehat{f}$ definiscono distribuzioni temperate per cui si ha $\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi}\rangle$. Si pone pertanto la

Definizione. Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ è una distribuzione temperata, la sua trasformata di Fourier $\widehat{T}$ è la forma lineare $\mathcal{F}T = \widehat{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ così definita
$$\langle \widehat{T}, \varphi\rangle := \langle T, \widehat{\varphi}\rangle.$$

Poiché $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ è un automorfismo di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, che è anche omeomorfismo, è evidente che anche $\widehat{T}$ è distribuzione temperata. L'osservazione che precede la definizione mostra che se $f \in L^1$ allora la trasformata di Fourier di f in senso classico e nel senso dato qui coincidono. La stessa cosa vale per funzioni di L^2 e per la trasformata di Fourier–Plancherel.

Esempio 4.29. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Allora la trasformata distribuzionale di f (cioè come distribuzione temperata) coincide con quella di Fourier–Plancherel. Per dimostrarlo useremo più volte il fatto che se una successione v_k converge a v in $L^2(\mathbb{R})$ allora, per ogni $\psi \in L^2(R)$ si ha che $\lim_k \int v_k\psi = \int v\psi$ (verificarlo!). Sia ora u_k una successione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergente ad f in norma L^2. Allora per definizione si ha che $\widehat{u_k}$ converge alla trasformata $\widehat{f}$ di Fourier–Plancherel di f. Si ha allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int \widehat{f}(x)\varphi(x)\,dx = \lim_k \int \widehat{u_k}(x)\varphi(x)\,dx;$$

Per il lemma di dualità si ha poi

$$\int \widehat{u_k}(x)\varphi(x)\,dx = \int \widehat{\varphi}(x)u_k(x)\,dx$$

ed è

$$\lim_k \int \widehat{\varphi}(x)u_k(x)\,dx = \int f(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx$$

da cui l'uguaglianza

$$\widehat{T_f}(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \int f(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx = \int \widehat{f}(x)\varphi(x)\,dx = T_{\widehat{f}}(\varphi)$$

ovvero $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

Valgono per la trasformazione di Fourier delle distribuzioni temperate le stesse formule che valgono per la trasformata di Fourier delle funzioni, con il vantaggio che ora non ci si deve più preoccupare dell'appartenenza o meno ad $L^1(\mathbb{R})$ di derivate, di $tf(t)$, eccetera. Più precisamente si ha:

Proposizione 4.20. *Sia T una distribuzione temperata. Allora*

1. $\widehat{T'} = i\xi\widehat{T}$;
2. $(\widehat{T})' = -\widehat{(itT)}$;
3. *Se $a \in \mathbb{R}$ allora* $\widehat{e^{iat}T} = \tau_a\widehat{T}$;
4. *Se $a \in \mathbb{R}$ allora* $\widehat{\tau_a T} = e^{-iat}\widehat{T}$.

Dimostrazione. Dimostriamo la formula $\widehat{(T')} = (i\#)\widehat{T}$:

$$\langle\widehat{(T')}, \varphi\rangle := \langle T', \widehat{\varphi}\,\rangle = \langle T, -(\widehat{\varphi})'\rangle = \langle T, -\mathcal{F}\left((-i\#)\varphi\right)\rangle = \langle\widehat{T}, (i\#)\varphi\rangle = \langle(i\#)\widehat{T}, \varphi\rangle,$$

come si voleva. Le altre seguono allo stesso modo. □

Definizione. Ogni distribuzione temperata T ha un originale di Fourier, che è $\mathcal{F}^{-1}T$, definita da

$$\langle\mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle := \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle.$$

Vale la formula di antitrasformazione, di immediata dimostrazione usando il fatto che la formula vale per le funzioni a decrescenza rapida.

Proposizione 4.21. *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = T$.*

Esempio 4.30. Calcoliamo subito $\widehat{\delta}$:

$$\langle\widehat{\delta},\varphi\rangle = \langle\delta,\widehat{\varphi}\rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-i0t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt = \langle 1,\varphi\rangle.$$

La trasformata di Fourier della δ di Dirac è la costante 1. Inversamente la costante 1 si trasforma in $2\pi\delta$:

$$\langle\widehat{1},\varphi\rangle = \langle 1,\widehat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} 1\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)e^{i\xi 0}\,d\xi = 2\pi\varphi(0),$$

per la formula di inversione. Si ha anche

$$\langle\widehat{\delta_{(a)}},\varphi\rangle = \langle\delta_{(a)},\widehat{\varphi}\rangle = \widehat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-iat}\,dt = \langle e^{-ia\#},\varphi\rangle,$$

che dice $\widehat{\delta_{(a)}} = e^{-ia\#}$: le delta si trasformano in caratteri, inversamente i caratteri si trasformano in delta e si ha $\widehat{e^{ia\#}} = 2\pi\delta_{(a)}$.

Esercizio 4.8. i) Si calcoli, usando le definizioni, la trasformata di Fourier e la derivata della distribuzione $\delta(x-2)$.
ii) Si provi che $T(x) = (x^2+1)\delta(x-2)$ è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata (sugg: cos' è $(x^2+1)\delta(x-2)$)?.
iii) Si calcoli la trasformata di Fourier di T.

Si ha $\mathrm{rect}' = -\delta_{(1/2)} + \delta_{(-1/2)}$, quindi la trasformata di Fourier di rect' è $-e^{-i\xi/2} + e^{i\xi/2} = 2i\sin(\xi/2)$, che è infatti $(i\xi/2)\,\mathrm{sinc}(\xi/(2\pi))$.

Esempio 4.31. Calcoliamo la trasformata di Fourier dello scalino di Heaviside H: esso ha δ come derivata distribuzionale; ne segue che si ha (si ricordi che se $\xi S = 1$ allora S è della forma $k\delta + \mathrm{v.\,p.}(1/\xi)$):

$$1 = i\xi\widehat{H} \iff \xi i\widehat{H} = 1 \quad \text{da cui} \quad i\widehat{H} = k\delta + \mathrm{v.\,p.}(1/\#) \iff \widehat{H} = c\delta + \frac{1}{i}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\#).$$

Per trovare la costante c si osservi che $\tilde{H} + H = 1$, dove $\tilde{H}$ è la simmetrizzata di H, e quindi che $\widehat{\tilde{H}} + \widehat{H} = 2\pi\delta$; inoltre $\widehat{\tilde{H}} = \widetilde{\widehat{H}} = c\delta - \frac{1}{i}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\#)$, essendo $\mathrm{v.\,p.}(1/\#)$ dispari; si ha quindi $2c\delta = 2\pi\delta$, e cioè $c = \pi$. Si ha insomma

$$\widehat{H} = \pi\delta + \frac{1}{i}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\#).$$

Alternativamente si poteva osservare che da $\widehat{H} = c\delta + \frac{1}{i}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\#)$ si ricava che per ogni funzione test φ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} H\widehat{\varphi}\,dx = c\varphi(0) + \frac{1}{i}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\#)(\varphi)$$

in particolare, per ogni φ pari si ha

$$\int_{\mathbb{R}} H\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = c\varphi(0)$$

Utilizzando la formula di inversione si ha poi

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi)e^{i0\xi}\,d\xi = 2\pi\varphi(0)$$

e pertanto $\pi\varphi(0) = c\varphi(0)$ per ogni funzione test φ pari, da cui $c = \pi$.

Esempio 4.32. Imitando quanto fatto sopra per H, mostrare che $\widehat{\mathrm{sgn}}(\xi) = (2/i)\,\mathrm{v.\,p.}(1/\xi)$.

Esempio 4.33. Determinare la trasformata di Fourier di $\mathrm{v.\,p.}(1/t)$ in due modi diversi: i) utilizzando la formula per la trasformata di $\mathrm{sgn}\,t$, ii) utilizzando l'equazione $t\,\mathrm{v.\,p.}(1/t) = 1$.

È spesso utile sapere a priori se la trasformata di una distribuzione è una funzione; ciò accade ad esempio quando la distribuzione di partenza è una funzione sommabile o a quadrato sommabile: vediamolo con degli esercizi.

ESERCIZIO 4.9. Sia $u(x) = \arctan(1/x)$, $x \neq 0$.

i) È vero che $u \in L^1(\mathbb{R})$? che $u \in L^2(\mathbb{R})$? Cos'è per definizione la trasformata di Fourier $\hat{u}$ di u?

ii) Determinare la derivata u' di u nel senso delle distribuzioni, determinare poi la trasformata di Fourier di u';

iii) Dedurre da ii) il valore di $\nu\hat{u}(\nu)$;

iv) Dedurre il valore di $\hat{u}(\nu)$ (ricordare che se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è $\nu T = 0$ se e solo se $T = c\delta$ per qualche c e che $u \in$ ... quindi $\hat{u} \in$ ......)

ESERCIZIO 4.10. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{per} \quad -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{per} \quad |x| > \pi, \end{cases}$$

(i) si calcolino la derivata prima f' e la derivata seconda f'' di f nel senso delle distribuzioni;

(ii) esprimere f'' in termini di f

(iii) mostrare che f è una funzione trasformabile alla Fourier; mediante ii) si calcoli la trasformata di Fourier di f'' (esprimendola in funzione di $\hat{f}$) e se ne deduca il valore della *funzione* $\hat{f}$;

(iv) si provi che $\hat{f}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;

(v) si deduca da $\hat{f}$ il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \cos(\xi\pi)}{1 - \xi^2} \cos(\xi/2)\, d\xi;$$

(vi) (facoltativo) si risponda alla domanda (i) relativamente alla funzione $g(x) = |\sin x|$.

ESERCIZIO 4.11. Sia $u(t) = \sin|t| = (\sin t)(\operatorname{sgn} t)$.

(i) Mostrare che $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; determinarne la trasformata di Fourier $\widehat{u}$. [Sugg. $\widehat{\operatorname{sgn}} = \frac{2}{i}\,\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{\xi}$]

(ii) Provare che u soddisfa ad una equazione lineare del secondo ordine in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; dedurre il valore di $(1 - \xi^2)\widehat{u}$

(iii) Verificare che effettivamente la trasformata di u trovata in (i) soddisfa alla relazione trovata in (ii).

La trasformata di Fourier si comporta bene con i limiti: è immediata la dimostrazione del risultato che segue.

Proposizione 4.22. *Sia $(T_n)_n$ una successione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ convergente a $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Allora $(\widehat{T}_n)_n$ converge a $\widehat{T}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

4.15.1 Trasformata di Fourier di distribuzioni periodiche

Ad esempio, si potrebbe dimostrare che per $d > 0$ fissato, la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{(nd)},$$

che rappresenta una distribuzione temperata non appena c_n sia $O_{\pm\infty}(n^p)$ per qualche reale p, ha per trasformata di Fourier la distribuzione periodica di periodo $1/d$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-ind\#} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{ind\#},$$

che ha la successione c_{-n} come successione dei suoi coefficienti di Fourier in periodo $2\pi/d$ (prendendo l'antitrasformata si troverebbe una distribuzione che ha i c_n come coefficienti di Fourier). Ed inversamente, una funzione periodica f localmente sommabile, di periodo τ si può scrivere (uguaglianza q.o.) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_{-n\tau} g$, dove $g(t) = f(t)\operatorname{rect}(t/\tau)$, e pertanto si ha

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(-n\tau)\xi}\widehat{g}(\xi) = \widehat{g}(\xi)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n\tau)\xi}\right);$$

Si ponga $d = 2\pi/\tau$; si è dimostrato che (in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; ma la stessa dimostrazione, con lievi modifiche, va bene in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$) si ha $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n/d)\xi} = d\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{(nd)}(\xi)$; inoltre si ha $\widehat{g} \in C^\infty(\mathbb{R})$ (g è a supporto compatto), e $\widehat{g}$ è infinitesima all'infinito; ha senso quindi fare il prodotto di $\widehat{g}$ con una distribuzione temperata; si ottiene

$$\widehat{f}(\xi) = d\widehat{g}(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{(nd)}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d\widehat{g}(nd)\delta_{(nd)}(\xi),$$

infine si osserva che si ha $(1/\tau)\widehat{g}(nd) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)e^{-in(2\pi/\tau)t}\,dt/\tau = c_n(f)$. Si è trovato:

. *Se $f \in L^1_\tau$, la sua trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni temperate è la distribuzione a supporto discreto*

$$\widehat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\delta_{n(2\pi/\tau)},$$

formata da masse concentrate nei punti $n2\pi/\tau$, di valore pari ai coefficienti di Fourier di f.

Antitrasformando si trova, nel senso delle distribuzioni:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{2\pi i(n/\tau)t};$$

cioè, ogni funzione di L^1_τ è somma della sua serie di Fourier, *nel senso delle distribuzioni.*

Esempio 4.34. Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ periodica di periodo $a > 0$, cioè tale che $\tau_{-a}T = T$. Trasformando alla Fourier ambo i termini dell'uguaglianza si ha

$$e^{ia\xi}\widehat{T} = \widehat{T}$$

ovvero

$$(1 - e^{ia\xi})\widehat{T} = 0.$$

Gli zeri di $1 - e^{ia\xi}$ sono $\xi = k\dfrac{2\pi}{a}$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$ e pertanto, in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, si ha

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\delta_{k\omega} \qquad \omega = \frac{2\pi}{a}$$

per qualche $(c_k)_k$ in $\mathbb{C}$. Si può dimostrare che la serie precedente converge anche in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Ricordando che $\mathcal{F}(e^{ik\omega t}) = 2\pi\delta_{k\omega}$ si ha allora

$$T = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_k}{2\pi}e^{ik\omega t}$$

ritrovando così parte di quanto è stato detto sopra.

4.16 Trasformata di Laplace nelle distribuzioni

Se per una distribuzione temperata T si ha $\mathrm{Supp}(T) \subseteq [0, +\infty[$ ($T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$), allora per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\, s > 0$ è univocamente definito $T(e^{-st}) = \int_0^\infty T(t)e^{-st}\,dt$. Infatti, la funzione $t \mapsto e^{-st}$ certamente non è a decrescenza rapida, neanche se $\mathrm{Re}\, s > 0$, dato che per $t \to -\infty$ non è infinitesima. Tuttavia, sul supporto $\mathbb{R}_+$ di T essa è a decrescenza rapida e possiamo moltiplicarla per una funzione v che sia C^∞, che sia identicamente 1 su un intorno di $[0, +\infty[$, e che tenda a zero a $-\infty$ in modo da rendere il prodotto a decrescenza rapida; ad esempio, si può prendere una funzione C^∞ che sia identicamente 1 su $[-\varepsilon, +\infty[$, e che sia nulla su $]-\infty, -2\varepsilon]$. Il valore $T(ve^{-st})$ non dipende da v; se w è un'altra funzione C^∞ che è identicamente 1 su un intorno di $[0, +\infty[$ e tale che $w(t)e^{-st}$ sia a decrescenza rapida, si ha $T(we^{-st}) = T(ve^{-st})$ dato che $(w - v)e^{-st}$ è nullo su un aperto contenente $[0, +\infty[$, e quindi $T((w - v)e^{-st}) = 0$. Si può poi verificare che la funzione

$$\Lambda T(s) = T(v(t)e^{-st}) \qquad \text{è olomorfa in } \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, s > 0\}.$$

Definizione. Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ si dice trasformabile secondo Laplace se esiste $s_0 \in \mathbb{C}$ tale che $e^{-s_0 t}T$ sia temperata. Lo spazio delle distribuzioni trasformabili secondo Laplace è indicato con $\mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$.

Per quanto prima visto è immediato che se $e^{-s_0 t}T$ è temperata, resta definita una funzione olomorfa per $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ dalla formula:

$$\Lambda T(s) = e^{-s_0 t}T(v(t)e^{-(s-s_0)t});$$

dove v è una funzione C^∞ che vale identicamente 1 su $[-\varepsilon, +\infty[$, ed è nulla su $]-\infty, -2\varepsilon]$. Inoltre il valore del secondo membro dell'uguaglianza precedente non dipende dalla scelta di s_0 e di v con quelle proprietà. L'estremo inferiore degli $a \in \mathbb{R}$ tali che $e^{-at}T$ sia temperata è l'*ascissa di convergenza* $\rho(T)$ della trasformata di Laplace della distribuzione T.

Esempio 4.35. Se al solito $\delta(t)$ indica la delta di Dirac concentrata in $t = 0$, la distribuzione $e^{-st}\delta(t)$ è temperata per ogni s; si ha chiaramente (con v come sopra) $\Lambda\delta(s) = \delta(v(t)e^{-st}) = (v(t)e^{-st})_{t=0} = 1$. Similmente, $e^{-st}\delta^{(k)}(t)$ è temperata per ogni $s \in \mathbb{C}$ e si ha

$$\Lambda\delta^{(k)}(s) = \delta^{(k)}(v(t)e^{-st}) = \delta((-1)^k D_t^k(v(t)e^{-st})) = ((-1)^k(-s)^k v(t)e^{-st})_{t=0} = s^k.$$

In generale:

Proposizione 4.23. *Se la distribuzione T è $L-$trasformabile, anche la sua derivata lo è, e si ha, se* $\operatorname{Re} s > \rho(T)$

$$\Lambda T'(s) = s\Lambda T(s).$$

Dimostrazione. Si ha, dalle definizioni di $\Lambda T'$ e di T', per $\operatorname{Re} s > \rho(T)$:

$$\Lambda T'(s) = T'(v(t)e^{-st}) = T(-D_t v(t)e^{-st})) = T(v(t)se^{-st}) - T(v'(t)e^{-st}) = s\Lambda T(s)$$

dato che $v' = 0$ su un intorno di $[0, +\infty[$. □

Osservazione 21. Si ricorderà che in generale una funzione può essere assolutamente $L-$trasformabile e di classe C^1, o addirittura C^∞, senza che la sua derivata sia assolutamente $L-$trasformabile, come ad esempio $f(t) = H(t)\sin\left(e^{t^2-1/t^2}\right)$, che ha ascissa di convergenza assoluta nulla, e la cui derivata non è assolutamente $L-$trasformabile. La trasformata della derivata è comunque esistente nel senso delle distribuzioni, e coincide (in questo caso) con la trasformata classica, a condizione di accontentarsi (in questo caso) di convergenze semplici, non assolute; si ha in particolare $\Lambda f'(s) = s\Lambda f(s)$; la cosa si riconosce subito integrando per parti. In generale comunque si ha $\rho(T_f) \le \rho(f)$, se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ è assolutamente $L-$trasformabile.

Osservazione 22. Nel caso di una funzione f a supporto in $[0, +\infty[$, continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti su $[0, +\infty[$ con derivata trasformabile alla Laplace, si è visto che la derivata distribuzionale di T_f è $T'_f = T_{f'} + f(0^+)\delta$; applicando il risultato precedente si ottiene

$$s\Lambda T_f(s) = \Lambda T'_f(s) = \Lambda(T_{f'}) + f(0^+) = \Lambda(f') + f(0^+),$$

in accordo con quanto trovato precedentemente nel caso di funzioni Laplace trasformabili.

Esercizio 4.12. Sia

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 1 \text{ se } t \in [0, 2] \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

i) Determinare le derivate prime, seconde e terze di f nel senso delle distribuzioni (semplificare le espressioni osservando che $t\delta_c(t) = ...$);

ii) Determinare la trasformata di Laplace della distribuzione f''';

iii) Calcolare, usando ii), la trasformata $\mathcal{L}(f)$ di Laplace di f; dire se si tratta di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ e se tale risultato si poteva prevedere senza fare calcoli.

4.16.1 Immagini di Laplace

Per quanto appena visto, ogni funzione polinomiale ha un originale di Laplace che è una distribuzione:

$$\Lambda\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\delta^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k s^k;$$

Si può dimostrare che vale il seguente

Teorema 4.24. *Sia $F:\Omega\to\mathbb{C}$ olomorfa in un aperto Ω di $\mathbb{C}$ contenente un semipiano destro $\{s\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}s>c\}$, per qualche $c\in\mathbb{R}$; F è immagine di Laplace di una distribuzione $T\in\mathcal{D}'_L$ se e solo se esistono $m\in\mathbb{N}$, $A>0$, $b>c$ tali che sia*

$$|F(s)|\le A|s|^m \quad \textit{per} \quad \operatorname{Re}s\ge b.$$

Dimostrazione. La omettiamo: in ogni caso la sufficienza sarebbe facile (se m è come nell'enunciato il teorema di inversione mostra che $F(s)/s^{m+2}$ è trasformata di Laplace di una funzione continua f col supporto contenuto in $[0,+\infty[$, e quindi F è la trasformata di Laplace della derivata distribuzionale di ordine $m+2$ di tale f). La necessità è un poco più ardua. □

4.16.2 Traslazione

Vale ancora il teorema sulla trasformata della traslata in avanti: se $T\in\mathcal{D}'_L$, ed $a\ge 0$, si ha, per $\operatorname{Re}s>\rho(T)$

$$\Lambda\tau_a T(s) = e^{-as}\Lambda T(s),$$

come è facile vedere (per definizione di traslata, $\tau_a T$ opera su e^{-st} come T opera su $\tau_{-a}(v(t)e^{-st}) = v(t+a)e^{-s(t+a)} = e^{-sa}v(t)e^{-st}$, e $T(e^{-sa}v(t)e^{-st}) = e^{-sa}T(v(t)e^{-st}) = e^{-sa}\Lambda T(s)$. Si osservi che si ha

$$\Lambda\delta_{(a)} = e^{-as}; \qquad \Lambda\delta_{(a)}^{(k)} = s^k e^{-as}.$$

4.16.3 Convoluzione in $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$

Dedichiamo un rapido cenno, senza nessuna dimostrazione, alla convoluzione tra distribuzioni col supporto in $[0,+\infty[$ il cui spazio è indicato con $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

- Tra distribuzioni di $\mathcal{D}'_+$ la convoluzione è sempre definita, è associativa e commutativa. Inoltre, se $T,S\in\mathcal{D}'_+$ sono entrambe non nulle, allora $S*T$ appartiene a $\mathcal{D}'_+$ e non è nulla.
- Se $S,T\in\mathcal{D}'_+$ sono entrambe $L-$trasformabili, si ha $\Lambda(T*S)(s) = \Lambda T(s)\Lambda S(s)$ per $\operatorname{Re}s>\max\{\rho(T),\rho(S)\}$; infatti

$$(T*S)_t(e^{-st}) = T_\theta(S_t(e^{-s(\theta+t)})) = T_\theta(e^{-s\theta}S_t(e^{-st})) = T_\theta(e^{-s\theta}\Lambda S(s)) = \Lambda T(s)\Lambda S(s).$$

- Si può provare che se S è una funzione a supporto in $[0,+\infty[$ allora $T*S$ è la funzione definita $T*S(x) = \int T(y)S(x-y)\,dy$.

Si noti come l'algebra di convoluzione $\mathcal{D}'_+$ abbia elemento neutro, δ. Se un $T\in\mathcal{D}'_+$ ha un'inversa di convoluzione in $\mathcal{D}'_+$, una $S\in\mathcal{D}'_+$ tale che $T*S=\delta$, allora tale inversa è unica: se infatti è $T*S = T*S_1 = \delta$, convolvendo a sinistra con S si ha $S*(T*S) = S*(T*S_1) = S*\delta = S$; per associatività si ha $(S*T)*S = (S*T)*S_1$; ma $S*T = T*S = \delta$, e quindi $\delta*S = \delta*S_1$, che significa $S=S_1$ (si può anche usare l'assenza di zero–divisori per concludere che $T*S = T*S_1 \iff T*(S-S_1)=0 \iff S-S_1=0$). Cercare l'inversa di convoluzione di $\delta^{(m)} + a_{m-1}\delta^{(m-1)} + \cdots + a_1\delta' + a_0\delta$ equivale a cercare la risolvente dell'equazione differenziale $y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \ldots a_1 y' + a_0 y = \delta$.

Esempio 4.36. Cerchiamo l'inversa in $\mathcal{D}'_+$ di $\delta''+\delta$; cerchiamo quindi $E\in\mathcal{D}'_+$ tale che sia $(\delta''+\delta)*E=\delta$, equivalentemente $E''+E=\delta$. Ammettiamo di poter trasformare alla Laplace; si ottiene $(s^2+1)\Lambda E(s) = 1$, da cui $\Lambda E(s) = 1/(1+s^2)$, vera se e solo se $E(t) = \sin t H(t)$.

4.17 Equazioni lineari in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Definizione. Siano $a_0, \dots, a_{n-1}$ numeri complessi. Sia $b \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Una soluzione di

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b(t)$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è una distribuzione u che soddisfa l'equazione precedente.

Esempio 4.37. Sia $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ continua a tratti, $u : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ la soluzione dell'equazione lineare a coefficienti costanti

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b(t)$$

con condizioni iniziali $u(0^+) = \alpha_0, u'(0^+) = \alpha_1, \dots, u^{(n-1)}(0^+) = \alpha_{n-1}$. Allora l'estensione triviale $w = \tilde{u}$ di u a $\mathbb{R}$ ($w = u$ su $[0, +\infty[$ e $w = 0$ su $]-\infty, 0[$) è una soluzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a supporto in $[0, +\infty[$ dell'equazione

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{j-1}\delta^{(k-j)} \right).$$

In generale una equazione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ non ha una soluzione unica. Ad esempio l'equazione $u' = \delta$ ha come soluzioni le funzioni $H + c$ con c costante complessa. Vale però un risultato di unicità nell'ambito delle distribuzioni L-trasformabili.

Teorema 4.25. *Data una distribuzione L-trasformabile b esiste una unica distribuzione L-trasformabile che soddisfa*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t).$$

Si tratta dell'unica distribuzione L-trasformabile u tale che

$$\Lambda u(s) = \frac{\Lambda b(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}.$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che una tale distribuzione esiste per il Teorema 3.16 dato che, essendo $|\Lambda b(s)| \le A|s^m|$ per $\operatorname{Re} s \ge \lambda$, si ha $|\dfrac{\Lambda b(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}| \le (A+1)|s^{m-n}|$ per $\operatorname{Re} s$ sufficientemente grande. □

È utile sapere che

Proposizione 4.26. *Le soluzioni distribuzionali (in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) dell'equazione a coefficienti costanti*

$$y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

coincidono (anche localmente), con le soluzioni classiche.

Omettiamo la dimostrazione, osservando solo che essa si può ottenere abbastanza facilmente per induzione su m.

Per $m = 1$: se $a, b \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, e $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è tale che sia $T' + aT = b$, si moltiplicano ambo i membri per $e^{A(t)}$, dove A è una primitiva di a, $A'(t) = a(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; il primo membro è allora la derivata di $e^{A(t)}T$, e quindi $e^{A(t)}T(t) = B(t)$, dove B è una primitiva di $b(t)e^{A(t)}$; ne segue $T(t) = e^{-A(t)}B(t)$. Quindi la cosa è vera per $m = 1$ (anche se i coefficienti sono funzioni C^∞ non necessariamente costanti). L'induzione si fa fattorizzando l'operatore differenziale $D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \cdots + a_1 D + a_0$.

4.17.1 Condizioni iniziali e funzioni impulsive

Facciamo un esempio di un sistema meccanico per capire la problematica in questione. Si ha un punto materiale di massa m libero di muoversi su una guida orizzontale liscia (l'ascissa si chiama y), con una forza elastica di richiamo verso l'origine. La legge del moto insomma è

$$m\ddot{y} = -ky + F(t),$$

dove $F(t)$ è la componente lungo l'asse della forza attiva agente sul punto (sollecitazione esterna). Supponiamo ora di voler comprendere come sia la risposta del sistema ad una martellata data nella direzione dell'asse all'istante 0. Come simuliamo una martellata, che fornisca un impulso assegnato di intensità $\Delta P_0 = F_0 \Delta t_0$? Un'idea può essere quella di studiare la risposta del sistema ad una sollecitazione che vale costantemente $(\Delta P_0)/\varepsilon$ per un tempo ε, e poi cessa, e far tendere ε a 0^+. L'equazione differenziale è quindi (supponiamo $y(0) = 0$, ma $\dot{y}(0) = v_0$ non necessariamente nullo):

$$m\ddot{y} + ky = \frac{\Delta P_0}{\varepsilon}\,\chi_{[0,\varepsilon]}(t) \qquad y(0) = 0,\, \dot{y}(0) = v_0 \qquad t > 0.$$

Dividendo per m si ricava

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{v}{\varepsilon}\,\chi_{[0,\varepsilon]} \quad \text{con condizioni iniziali} \qquad y(0) = 0,\, \dot{y}(0) = v_0. \tag{$*$}$$

avendo posto $\omega = \sqrt{k/m}$ e $v = \Delta P_0/m$; si noti che ω ha le dimensioni di un reciproco di un tempo, v di una velocità; ε è un tempo. Risolviamo $(*)$ trasformando alla Laplace; si ottiene

$$s^2\Lambda y(s) - v_0 + \omega^2\Lambda y(s) = \frac{v}{\varepsilon}\frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{s} \iff \Lambda y(s) = \frac{v}{\varepsilon}\frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{s(s^2+\omega^2)} + \frac{v_0}{s^2+\omega^2}.$$

Per antitrasformare scriviamo

$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\omega^2+s^2-s^2}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right),$$

di modo che si ha (chiamiamo y_ε la soluzione, visto che dipende da ε):

$$y_\varepsilon(t) = \frac{v}{\omega^2\varepsilon}\left((1-\cos(\omega t))H(t) - (1-\cos(\omega(t-\varepsilon))H(t-\varepsilon)\right) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)H(t).$$

Questa è la risposta ad una forza costante di intensità $\Delta P_0/\varepsilon = F_0(\Delta t_0/\varepsilon)$, applicata per un tempo ε a partire dall'istante 0. La funzione limite di tale funzione per $\varepsilon \to 0^+$ dovrebbe essere la risposta del sistema ad una martellata che fornisce istantaneamente l'impulso ΔP_0 al sistema.

Cerchiamo il limite; il termine $(v_0/\omega)\sin(\omega t)H(t)$ non dipende da ε: si ha per gli altri termini, diciamoli $u_\varepsilon(t)$: $u_\varepsilon(t) = 0$ per $t < 0$, mentre è

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t) &= \dfrac{v}{\omega}\dfrac{1-\cos(\omega t)}{\omega\varepsilon} \quad \text{per } 0 \le t \le \varepsilon \\ \\ u_\varepsilon(t) &= \dfrac{v}{\omega}\dfrac{\cos(\omega(t-\varepsilon)) - \cos(\omega t)}{\omega\varepsilon} \quad \text{per } t > \varepsilon. \end{cases}$$

Se ε è tale che $\omega\varepsilon < \pi/2$ si ha

$$0 \le 1 - \cos(\omega t) < 1 - \cos(\omega\varepsilon) < (\omega\varepsilon)^2/2 \quad \text{per } 0 \le t \le \varepsilon,$$

per cui si ha

$$y_\varepsilon(t) = |y_\varepsilon(t)| \le (v/\omega)(\omega\varepsilon)/2 \qquad 0 \le t \le \varepsilon,$$

ed il primo pezzo di funzione tende uniformemente a 0 per $\varepsilon \to 0^+$. Per il secondo si ha

$$\begin{aligned} &\frac{\cos(\omega(t-\varepsilon)) - \cos(\omega t)}{\omega\varepsilon} = \frac{\cos(\omega t)\cos(\omega\varepsilon) + \sin(\omega t)\sin(\omega\varepsilon) - \cos(\omega t)}{\omega\varepsilon} = \\ &\frac{-\cos(\omega t)(1-\cos(\omega\varepsilon)) + \sin(\omega t)\sin(\omega\varepsilon)}{\omega\varepsilon} = \\ &-\cos(\omega t)\frac{1-\cos(\omega\varepsilon)}{\omega\varepsilon} + \sin(\omega t)\left(\frac{\sin(\omega\varepsilon)}{\omega\varepsilon} - 1\right) + \sin(\omega t), \end{aligned}$$

di modo che si ha, per $t > \varepsilon$:

$$\begin{aligned} &\left|u_\varepsilon(t) - \frac{v}{\omega}\sin(\omega t)\right| \le \frac{v}{\omega}\left(|-\cos(\omega t)|\frac{1-\cos(\omega\varepsilon)}{\omega\varepsilon} + |\sin(\omega t)|\left|\frac{\sin(\omega\varepsilon)}{\omega\varepsilon} - 1\right|\right) \le \\ &\frac{v}{\omega}\left(\frac{\omega\varepsilon}{2} + \frac{(\omega\varepsilon)^2}{6}\right). \end{aligned}$$

Da quanto sopra fatto risulta che la funzione y_ε converge, per $\varepsilon \to 0^+$, uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ alla funzione:

$$y(t) = \frac{v + v_0}{\omega} \sin(\omega t) H(t).$$

Tale funzione è continua anche in $t = 0$, ma la sua derivata, che è nulla per $t < 0$, e pari a $(v+v_0)\cos(\omega t)$ per $t > 0$, tende a $v + v_0$ per $t \to 0^+$, ed ha quindi un salto pari a $v + v_0$ in $t = 0$, e differisce di v dalla velocità che il punto materiale aveva in $t = 0$ immediatamente prima della martellata. Si noti che per $t > 0$ la funzione trovata è soluzione dell'omogenea associata $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$, esattamente quella soluzione dell'omogenea associata corrispondente alle condizioni iniziali $y(0^+) = 0$, $y'(0^+) = v_0 + v$. L'effetto della martellata è quindi equivalente al supporre che il sistema, pur restando nella posizione $y(0) = 0$, abbia acquisito una quantità di moto extra $mv = \Delta P_0$ pari all'impulso fornito dalla martellata , ovvero una velocità iniziale (in aggiunta a quella v_0 già esistente) $v = \Delta P_0/m$ pari a tale impulso, diviso per la massa del punto materiale.

Ci piacerebbe poter attribuire tale comportamente ad un termine forzante esterno, poter cioè scrivere $\ddot{y} + \omega^2 y = f(t)$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a supporto in $[0, +\infty[$, tale che con condizioni iniziali nulle la soluzione sia $(v/\omega)\sin(\omega t)$ per $t > 0$. Trasformando alla Laplace si ha come al solito

$$\Lambda y(s) = \frac{\Lambda f(s)}{s^2 + \omega^2},$$

e la funzione a secondo membro si antitrasforma in $(v/\omega)\sin(\omega t)H(t)$ se e solo se $\Lambda f(s) = v$. Ma nessuna funzione ha come trasformata di Laplace una costante non nulla: le trasformate delle funzioni tendono a 0 per $\operatorname{Re} s \to +\infty$. Un'altra considerazione da fare è che la soluzione trovata è nulla per $t < 0$, e per $t > 0$ è soluzione dell'omogenea associata $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$; il termine forzante ipotizzato può quindi essere non nullo solo per $t = 0$!

Si osservi invece che la convergenza uniforme di y_ε a y implica la convergenza di y_ε a y in L^1_{loc} e quindi in distribuzione a y. Ora, in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si ha

$$T'_{y_\varepsilon} = y'_\varepsilon \qquad T''_{y_\varepsilon} = y''_\varepsilon + v_0\delta$$

da cui

$$y''_\varepsilon + \omega^2 y_\varepsilon = v_0\delta + \frac{v}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ora, per $\varepsilon \to 0$ si ha

$$y_\varepsilon \to y, \quad y''_\varepsilon \to y'' \quad \varepsilon\chi_{[0,\varepsilon]} \to \delta$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; di conseguenza y è soluzione di

$$y'' + \omega^2 y = (v_0 + v)\delta$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Chiaramente è oneroso ripetere il procedimento precedente per ogni singola equazione differenziale: come calcolare ad esempio la risposta ad una martellata per il sistema precedente con aggiunta una resistenza di tipo viscoso, $m\ddot{y} = -ky - \rho\dot{y} + F(t)$? occorre rifare tutto il procedimento di limite fatto? È senz'altro meglio sviluppare una teoria che consenta di trattare tutti questi problemi in modo ragionevolmente unitario. Questa è una delle principali ragioni che hanno condotto ad allargare l'insieme degli oggetti matematici usati dalle funzioni alle *funzioni generalizzate*, o distribuzioni.

4.17.2 Equazioni in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con "dati iniziali"

Nella pratica si utilizzano spesso equazioni distribuzionali con dati iniziali. Esse fungono Fisica e Ingegneria da modello per la descrizione dell'evoluzione di sistemi a seguito di fenomeni impulsivi.

Definizione (Equazione differenziale in $\mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$ con condizioni iniziali)**.** Se è assegnata un'equazione lineare

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b,$$

dove il termine noto b è una *distribuzione* di $\mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$, la sua soluzione in $\mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$ con "condizioni iniziali"

$$y(0) = \alpha_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1},$$

è la distribuzione $u \in \mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$ definita da $u = S + \varphi H$ dove $S \in \mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$ è l'unica distribuzione L-trasformabile soluzione di

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t),$$

e φ è la soluzione dell'omogenea associata

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0,$$

soddisfacente a

$$\varphi(0) = \alpha_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}.$$

È immediato dimostrare che il problema precedente ha esistenza e unicità nell'ambito delle distribuzioni L-trasformabili.

Osservazione 23. Applicando la trasformata di Laplace (in $\mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$) , da

$$S^{(n)} + a_{n-1}S^{(n-1)} + \cdots + a_0 S = b(t)$$

si deduce

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)\Lambda(S)(s) = \Lambda(b)(s)$$

mentre, usando la trasformata classica, si trova al solito

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j s^j\right)\Lambda\varphi(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{j-1}s^{k-j}\right) \qquad (a_n = 1).$$

Pertanto la soluzione $y = S + \varphi H$ del problema soddisfa a

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j s^j\right)\Lambda y(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{j-1}s^{k-j}\right) + \Lambda b(s) :$$

si tratta, formalmente, della stessa equazione trovata nella sezione (3.15) per trovare le soluzioni dell'equazione differenziale nel caso in cui b è una *funzione* continua a tratti a supporto in $[0, +\infty[$.

Osservazione 24. La definizione precedente è doverosa: non ha nessun senso infatti calcolare il valore di una distribuzione in un punto! Si osservi peraltro che la soluzione di un'equazione del tipo illustrato sopra è in generale una distribuzione che *non* soddisfa l'equazione $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b$; se poi anche la soluzione è una funzione, essa in generale *non* soddisfa i dati iniziali. Ad esempio la soluzione in $\mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$ di $y' + y = \delta$ con "dato iniziale" $y(0) = 1$ è, come si vede subito usando la trasformata di Laplace, la funzione $2e^{-t}H(t)$ che in 0 vale 2 e che soddisfa, come distribuzione su $\mathbb{R}$, all'equazione $y' + y = 2\delta$.

Si dimostra che una soluzione siffatta esiste sempre, e che essa è unica.

Teorema 4.27. *Data una distribuzione L-trasformabile b esiste una unica distribuzione L-trasformabile u che soddisfa*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b,$$

con "condizioni iniziali"

$$y(0) = \alpha_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1},$$

Per determinare la distribuzione u di cui alla precedente definizione usando le trasformate di Laplace si segue quindi la procedura seguente: si trasforma la funzione incognita y come se fosse una funzione di classe C^n su $[0, +\infty[$ soddisfacente alle condizioni iniziali date, si scrive cioè ($a_n = 1$)

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j s^j\right)\Lambda y(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{j-1}s^{k-j}\right) + \Lambda b(s);$$

si ottiene poi come soluzione una distribuzione $u(t) \in \mathcal{D}'_L$, *che anche quando è una funzione di classe* $C^n([0, +\infty[)$ *in generale* **non** *soddisfa alle condizioni iniziali assegnate*; si ha cioè in generale, anche quando la cosa ha senso, $\lim_{t\to 0^+} u^{(j)}(t) \neq \alpha_j$; anzi questo quasi certamente accade quando la distribuzione $b(t)$ ha fra i suoi termini qualche distribuzione con supporto $\{0\}$, in special modo δ e/o le sue derivate; le funzioni impulsive possono introdurre discontinuità nelle derivate della soluzione e nella soluzione stessa.

Si è visto questo fatto nel sistema meccanico prima descritto; l'effetto di una martellata equivale ad un salto della velocità iniziale. Come prima osservato, risolvere questo problema equivale a cercare le distribuzioni $u \in \mathcal{D}'_L$ tali che sia

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u = b(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{j-1}\delta^{(k-j)}(t) \right),$$

infatti $u = S + \varphi H$, dove $S \in \mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$ è soluzione di $u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u = b(t)$, e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, soluzione dell'equazione omogenea associata con condizioni iniziali $y^{(j)}(0) = \alpha_j$, $j = 0, \ldots, n-1$, è quindi tale che φH è la soluzione di

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{j-1}\delta^{(k-j)}(t) \right).$$

Quando si risolve un problema con la trasformazione di Laplace si suppone che tutte le funzioni siano nulle per $t < 0$, la storia passata del sistema viene azzerata; ma le condizioni iniziali non possono essere ignorate; se ne può tener conto con la δ e le sue derivate. Il loro significato non è però più a rigore quello di condizioni iniziali, ma di condizioni subito prima dell'intervento delle funzioni impulsive.

Esempio 4.38. Riprendiamo il circuito RC considerato nell'esempio 11 del fascicolo (Laplace). Supponendo $u(0) = 0$, vediamo la risposta del circuito ad un impulso ideale unitario all'istante $t = a \geq 0$: in altre parole cerchiamo per $t > 0$ la soluzione nulla in $t = 0$ dell'equazione

$$Tu'(t) + u(t) = \delta(t - a).$$

Trasformando alla Laplace si ha

$$Ts\Lambda u(s) + \Lambda u(s) = e^{-as} \quad \text{da cui} \quad \Lambda u(s) = \frac{e^{-as}}{1 + Ts} = \frac{1}{T}\frac{e^{-as}}{1/T + s},$$

di antitrasformata immediata

$$u(s) = \frac{1}{T}\tau_a(e^{-t/T}H(t)) = \frac{e^{-(t-a)/T}}{T}H(t - a).$$

Quindi: il condensatore si carica all'istante $t = a$, e poi si scarica con andamento esponenziale. Nell'esempio 11 si è visto che la risposta a $\delta(t)$, impulso all'istante $t = 0$, è il limite delle risposte di impulsi rettangolari di durata a (tra 0 ed a) ed intensità $1/a$, al tendere di a a 0^+. Qual'è la risposta ad un treno di impulsi agli istanti $0, a, 2a, 3a, \ldots$? dobbiamo risolvere l'equazione

$$Tu'(t) + u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - na) \qquad t > 0;\ u(0^+) = 0.$$

Trasformando si ha

$$Ts\Lambda u(s) + \Lambda u(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nas} = \frac{1}{1 - e^{-as}} \quad \text{da cui} \quad \Lambda u(s) = \frac{1/T}{(1/T + s)(1 - e^{-as})}.$$

La funzione Λu ha un polo del primo ordine in $s = -1/T$; si ha, per la parte singolare in tale polo

$$\frac{\operatorname{Res}(\Lambda u, -1/T)}{s + 1/T} = \frac{1/(T(1 - e^{a/T}))}{s + 1/T} \quad \text{da cui}$$

$$\Lambda u(s) - \frac{1/(T(1 - e^{a/T})}{s + 1/T} = \frac{1}{T(1 - e^{a/T})}\frac{1 - e^{a/T} - 1 + e^{-as}}{(s + 1/T)(1 - e^{-as})}, \qquad \text{che porge}$$

$$\Lambda u(s) = \frac{1}{T(1 - e^{a/T})}\left(\frac{1}{s + 1/T} + \frac{(e^{-as} - e^{-a(-1/T)})/(s - (-1/T))}{1 - e^{-as}} \right)$$

Ricordando ora la formula per la trasformata di una funzione periodica, cerchiamo l'antitrasformata di $(e^{-as} - e^{-a(-1/T)})/(s-(-1/T))$, ottenendo

$$\Lambda^{-1}\left(\frac{e^{-as} - e^{-a(-1/T)}}{s-(-1/T)}\right) = \tau_a\left(e^{-t/T}H(t)\right) - e^{a/T}e^{-t/T}H(t) =$$
$$e^{-(t-a)/T}(H(t-a)-H(t)) = -e^{-(t-a)/T}\chi_{[0,a[}.$$

Questa è una funzione con il supporto $[0,a]$; ne segue che $\Lambda u(s)$ è trasformata della funzione

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(t-na)/T}}{T(e^{a/T}-1)}\chi_{[na,(n+1)a[}(t) - \frac{e^{-t/T}}{T(e^{a/T}-1)}H(t).$$

La prima funzione è periodica di periodo a.

Esempio 4.39. (a) Determinare le funzioni f e g tali che $\Lambda f(s) = \dfrac{1}{(s-3)^2+4}, \Lambda g(s) = \dfrac{1}{(s+3)^2+4}$. Dire poi quali sono le ascisse di convergenza di f e di g.

(b) Determinare la soluzione $\mathcal{L}$-trasformabile dell'equazione $y'' - 6y' + 13y = \delta$

(c) Usando (a) trovare l'originale di Fourier di $\dfrac{1}{(i\xi+3)^2+4}$, $(\xi \in \mathbb{R})$ *e poi* quello di

$$\frac{1}{(i\xi-3)^2+4} = \frac{1}{(i\xi)^2 - 6i\xi + 13}, \qquad (\xi\in\mathbb{R})$$

(Sugg: attenzione alle ascisse di convergenza di f e di g; confrontare con il risultato ottenuto nell'Esercizio 1, per chi lo ha fatto!)

(d) Dedurre poi qual è la soluzione temperata di $y'' - 6y' + 13y = \delta$, $y \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Risoluzione. (a) Essendo

$$\frac{1}{(s-3)^2+4} = \tau_3\frac{1}{s^2+4} = \tau_3\Lambda\big(\frac{1}{2}\sin 2tH(t)\big)$$

si ha

$$f(t) = \Lambda^{-1}\frac{1}{(s-3)^2+4} = \frac{1}{2}e^{3t}\sin 2tH(t)$$

con ascissa di convergenza 3; analogamente

$$g(t) = \Lambda^{-1}\frac{1}{(s+3)^2+4} = \frac{1}{2}e^{-3t}\sin 2tH(t)$$

con ascissa di convergenza -3. Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i termini dell'equazione differenziale si trova

$$(s^2-6s+13)\Lambda y(s) = 1$$

ed essendo $s^2-6s+13 = (s-3)^2+4$ si ha $y(t) = f(t) = \frac{1}{2}e^{3t}\sin 2tH(t)$.

(c) Dato che $\operatorname{Re} i\xi = 0 > -3$ si ha

$$\widehat{g}(\xi) = \Lambda g(i\xi) = \frac{1}{(i\xi+3)^2+4}$$

Non si può invece scrivere che $\widehat{f}(\xi) = \Lambda f(i\xi)$ dato che $i\xi$ non appartiene al dominio di convergenza assoluta di f; si osservi tuttavia che dalla formula per la trasformata di g si ricava che

$$\widehat{g}(-\xi) = \frac{1}{(i\xi-3)^2+4}$$

ed essendo $\widehat{g}(-\xi) = \widehat{\widetilde{g}}(\xi)$ $(\widetilde{g}(t) \doteq g(-t)$ si ricava che $\widetilde{g}(t) = \frac{1}{2}e^{3t}\sin -2tH(-t) = -\frac{1}{2}e^{3t}\sin 2tH(-t)$ è l'originale di Fourier di $\dfrac{1}{(i\xi-3)^2+4}$, in accordo con quanto trovato nell'Esercizio 1. Ragionando come sopra, applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri dell'equazione differenziale proposta in (d), si trova che questa è l'unica soluzione temperata dell'equazione data. □

4.18 Esercizi ricapitolativi

ESERCIZIO 4.13. Sia $b(t) = 0$ per $t < 0$, $b(t) = t$ per $t \in [0, T]$, $b(t) = T$ per $t > T$; T è una costante, $T > 0$.

(i) Trovare la trasformata di Laplace di b, precisandone l'ascissa di convergenza assoluta.

(ii) Descrivere le derivate distribuzionali prime e seconde di b, e trovarne le trasformate di Laplace.

(iii) Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + \omega^2 y = b(t) - TH(t - T)$$

che siano distribuzioni di $\mathcal{D}'_+$.

Risoluzione. (i) Se $\operatorname{Re} s > 0$ l'integrale di Laplace converge:

$$\int_0^{+\infty} b(t)e^{-st}\,dt = \int_0^T te^{-st}\,dt + \int_T^\infty Te^{-st}\,dt =$$
$$\left[t\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{s}\int_0^T e^{-st}\,dt + T\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=T}^{t=+\infty}$$
$$-T\frac{e^{-sT}}{s} + \frac{1-e^{-sT}}{s^2} + T\frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s^2}$$

Se $\operatorname{Re} s \le 0$ l'integrale non converge perché l'integrando si mantiene lontano da zero in un intorno di infinito. Si ha insomma

$$\Lambda b(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s^2} \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$

OSSERVAZIONE 25. Volendo evitare le integrazioni si può procedere nel modo seguente: si scrive $b(t) = t\chi_{[0,T]}(t) + T\tau_T H(t)$; si ricorda facilmente che è $\Lambda\chi_{[0,T]}(s) = \Lambda(H - \tau_T H)(s) = 1/s - e^{-sT}/s$, da cui

$$\Lambda(t\chi_{[0,T]})(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right) = \frac{-sTe^{-sT} + (1-e^{-sT})}{s^2};$$
$$\Lambda b(s) = \frac{-sTe^{-sT} + (1-e^{-sT})}{s^2} + \frac{Te^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s^2};$$

l'ascissa di convergenza assoluta è poi chiaramente nulla.

(ii) La funzione b è continua e C^1 a tratti; la sua derivata distribuzionale coincide con la ordinaria ed è pertanto

$$b'(t) = 0 \quad \text{per} \quad t < 0, \quad t > T; \quad b'(t) = 1 \quad \text{per} \quad 0 < t < T.$$

Insomma b' è la funzione caratteristica di $]0, T[$ ed ha quindi trasformata di Laplace

$$\Lambda b'(s) = \int_0^T e^{-sT}\,dt = \frac{1-e^{sT}}{s} \qquad s \in \mathbb{C};$$

si noti che per $\operatorname{Re} s > 0$ si ha $\Lambda b'(s) = s\Lambda b(s)$. La derivata seconda distribuzionale di b, essendo b' funzione C^1 a tratti, è $b'' = \delta - \delta_{(T)}$. La trasformata di Laplace di b'' è $\Lambda b''(s) = 1 - e^{-sT}$.

(iii) Si ha, trasformando alla Laplace ambo i membri (al solito si ammette che ciò sia possibile)

$$s^2\Lambda y(s) + \omega^2\Lambda y(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s^2} - T\frac{e^{-sT}}{s} \quad \text{da cui} \quad \Lambda y(s) = \frac{1-e^{-sT} - sTe^{-sT}}{s^2(s^2+\omega^2)}.$$

Decomponiamo in frazioni semplici (forma reale)

$$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\omega^2+s^2-s^2}{s^2(s^2+\omega^2)} = \frac{1/\omega^2}{s^2} - \frac{1/\omega^2}{s^2+\omega^2}; \quad \frac{s}{s^2(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\omega^2+s^2-s^2}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{1/\omega^2}{s} - \frac{s/\omega^2}{s^2+\omega^2}.$$

Ne segue

$$\frac{1-e^{-sT} - sTe^{-sT}}{s^2(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)} - e^{-sT}\left(\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)} + \frac{sT}{s^2(s^2+\omega^2)}\right) =$$

$$\frac{1/\omega^2}{s^2} - \frac{1/\omega^2}{s^2+\omega^2} - e^{-sT}\left(\frac{1/\omega^2}{s^2} - \frac{1/\omega^2}{s^2+\omega^2} + \frac{T/\omega^2}{s} - \frac{s(T/\omega^2)}{s^2+\omega^2}\right)$$

In tale forma l'antitrasformata è facile; si ha

$$y(t) = \left(\frac{t}{\omega^2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega^3}\right)H(t) - \left(\frac{t-T}{\omega^2} - \frac{\sin(\omega(t-T))}{\omega^3} + \frac{T}{\omega^2} - \frac{T}{\omega^2}\cos(\omega(t-T))\right)H(t-T).$$

□

Esercizio 4.14. Trovare in $\mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi),$$

con condizioni iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Risoluzione. Banalmente la soluzione è nulla in $]-\infty, 0]$, dove l'equazione si riduce a $y'' + 2y' + 2y = 0$ (anzi, ciò è vero anche in $]-\infty, \pi[$) e le condizioni iniziali nulle impongono allora che in tale intervallo la soluzione sia nulla. Per $t > 0$, ammesso che si possa trasformare alla Laplace si ottiene

$$s^2\Lambda y(s) + 2s\Lambda y(s) + 2\Lambda y(s) = e^{-\pi s} \quad \text{da cui} \quad \Lambda y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2} = \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1};$$

l'antitrasformata è immediata e porge

$$y(t) = \tau_\pi(e^{-t}\sin t H(t)) = e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)H(t-\pi).$$

□

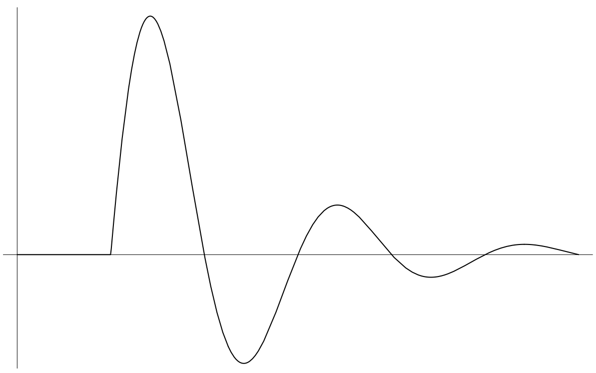

Figura 4.3: La funzione $y(t) = e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)H(t-\pi)$.

Tale è ad esempio la risposta di un circuito LCR, con convenienti L, C, R che all'istante π ha ricevuto un impulso unitario. Il grafico è come in figura (in realtá si è preso $e^{-(t-\pi)/4}$ anziché $e^{-(t-\pi)}$, per mostrare piú oscillazioni).

Esercizio 4.15. Trovare, nella semiretta $[0, +\infty[$, le soluzioni delle equazioni indicate

$$\begin{array}{ll}
y'' + 4y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi); & y(0) = 0;\ y'(0) = 0 \\
y'' + 2y' + y = \delta(t) + H(t-2\pi); & y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \\
y'' - y = 2\delta(t-1); & y(0) = 1;\ y'(0) = 0 \\
y'' + 2y' + 3y = \sin t + \delta(t-\pi); & y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \\
y'' + \omega^2 y = \delta(t-\pi/\omega); & y(0) = 1;\ y'(0) = 0 \\
y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t; & y(0) = 0;\ y'(0) = 1.
\end{array}$$

Esercizio 4.16. (i) Scrivere l'originale di $1/(\sqrt{s}(s-1))$ (non è esprimibile con funzioni elementari, ma come funzione integrale di funzioni elementari).

(ii) Dedurne l'originale di Laplace di

$$\frac{1}{s-\sqrt{s}}; \qquad \frac{1}{s+\sqrt{s}}.$$

(iii) Risolvere l'equazione di convoluzione

$$u' * u' = (u * u)' \qquad u(0^+) = 1 \quad (t > 0).$$

(R: (i) $H(t)e^t \int_0^t \frac{e^{-\theta}}{\sqrt{\pi\theta}}\,d\theta$; (ii) $H(t)e^t \left(1 \mp \int_0^t \frac{e^{-\theta}}{\sqrt{\pi\theta}}\,d\theta\right)$; (iii) come (ii).

ESERCIZIO 4.17. Ricordando che è, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{izt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

calcolare, in termini di J_0, la trasformata di Fourier della funzione $f(t) = \arcsin t$ per $|t| \le 1$, $f(t) = 0$ per $|t| > 1$. Sapreste dire se J_0 appartiene o meno ad $L^2(\mathbb{R})$? e ad $L^1(\mathbb{R})$?

Risoluzione. La derivata distribuzionale di f è

$$f'(t) = -\frac{\pi}{2}\delta_{(1)} + \frac{\chi_{]-1,1[}(t)}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\pi}{2}\delta_{(-1)},$$

trasformando alla Fourier si ha allora

$$\mathcal{F}f'(\xi) = -\pi\frac{e^{i\xi}}{2} + \pi J_0(\xi) - \pi\frac{e^{-i\xi}}{2} = -\pi\cos(\xi) + \pi J_0(\xi),$$

e da $\mathcal{F}f'(\xi) = (i\xi)\mathcal{F}f(\xi)$ si ottiene

$$\mathcal{F}f(\xi) = \pi\frac{J_0(\xi) - \cos(\xi)}{2i\xi}$$

(si noti che $\xi = 0$ è una singolarità eliminabile: sia cos che J_0 valgono 1 in 0; la funzione trovata è olomorfa intera, come deve essere dato che l'originale è a supporto compatto). □

ESERCIZIO 4.18. Cercare l'originale di Fourier f di $F(\xi) = \cos(\xi)e^{-\xi^2/2}$ Pensando che esso è una convoluzione di ...

Risoluzione. È una convoluzione di $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, originale di Fourier di $e^{-\xi^2/2}$, con l'originale di Fourier di $\cos(\xi) = (e^{i\xi}+e^{-i\xi})/2$, che è $(\delta_{(-1)}+\delta_{(1)})/2$; convolvere con $\delta_{(a)}$ equivale a traslare di a, quindi l'originale è

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-(t+1)^2} + e^{-(t-1)^2}}{2}.$$

□

ESERCIZIO 4.19. Si calcoli la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\theta}{1+\theta^2},$$

precisando in che senso vada intesa (sugg.: interpretare f come convoluzione).

Risoluzione. La funzione è la convoluzione dello scalino di Heaviside con la lorentziana $g(t) = 1/(1+t^2)$:

$$H * g(t) = \int_{\mathbb{R}} H(t-\theta)g(\theta)\,d\theta = \int_{-\infty}^{t} g(\theta)\,d\theta;$$

ne segue che è

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{H}(\xi)\pi e^{-|\xi|} = \pi\left(\pi\delta + \frac{1}{i}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\xi)\right)e^{-|\xi|} = \pi^2\delta + \pi\frac{e^{-|\xi|}}{i}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\xi).$$

La trasformata non può che essere intesa nel senso delle distribuzioni temperate: la funzione f non sta né in $L^1(\mathbb{R})$, né in $L^2(\mathbb{R})$. Si può anche procedere come segue (è sostanzialmente la stessa cosa): si ha $f(t) = \int_{-\infty}^0 dt/(1+t^2) + \int_0^t dt/(1+t^2) = \pi/2 + \arctan t$; la derivata di arctan è $1/(1+t^2)$ che si trasforma in $\pi\, e^{-|\xi|}$; ne segue

$$\pi e^{-|\xi|} = i\xi\widehat{\arctan}(\xi) \quad \text{da cui} \quad \widehat{\arctan}(\xi) = k\delta + \frac{\pi}{i}e^{-|\xi|}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\xi),$$

con k costante conveniente; per disparità di arctan si ha $k = 0$; si riottiene quindi

$$\widehat{f}(\xi) = \pi^2\delta + \widehat{\arctan}(\xi) = \pi^2\delta + e^{-|\xi|}\frac{\pi}{i}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\xi)$$

□

Esercizio 4.20. Trovare l'originale di Laplace di $\tanh s$, osservando anzitutto che esso non è una funzione di $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$; si suggerisce di sviluppare $\tanh s$ in serie di esponenziali.

Risoluzione. Essendo $\lim\limits_{s\to+\infty, s\in\mathbb{R}} \tanh s = 1$, l'originale non è una funzione. Si scrive poi, per $\operatorname{Re} s > 0$

$$\tanh s = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = \frac{1-e^{-2s}}{1+e^{-2s}} = (1-e^{-2s})\sum_{n=0}^{\infty}(-e^{-2s})^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(e^{-2ns} - e^{-2(n+1)s}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2ns} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-2(n+1)s} =$$

(posto nella seconda somma $n+1 = k$, si ha)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2ns} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-2ks} = 1 + 2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l e^{-2ls}.$$

L'originale di Laplace è quindi

$$\Lambda^{-1}\tanh(t) = \delta(t) + \sum_{l=1} 2(-1)^l\delta(t-2l).$$

□

Esercizio 4.21. Servendosi della trasformazione di Fourier, trovare quelle soluzioni dell'equazione (in tutto $\mathbb{R}$)

$$y'' - y = \delta,$$

che sono distribuzioni temperate; trovare poi tutte le soluzioni dell'equazione stessa (si ricorda che le soluzioni distribuzionali di $y'' - y = 0$ sono quelle classiche). Esistono soluzioni in $\mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$?

Risoluzione. Si ha $(i\xi)^2\widehat{y}(\xi) - \widehat{y}(\xi) = 1$, da cui

$$\widehat{y}(\xi) = \frac{-1}{1+\xi^2} \quad \text{e dalle tavole} \quad y(t) = -\frac{e^{-|t|}}{2}.$$

Questa è quindi l'unica soluzione temperata dell'equazione data; l'omogenea associata ha per integrale generale $a\cosh t + b\sinh t$, e quindi tutte le soluzioni sono date dalla formula

$$y(t) = -\frac{e^{-|t|}}{2} + a\cosh t + b\sinh t \qquad (a, b \in \mathbb{C}).$$

Imponendo ad una soluzione di essere nulla per $t < 0$ si trova

$$-\frac{e^t}{2} + \frac{a+b}{2}e^t + \frac{a-b}{2}e^{-t} = 0 \quad \text{per } t < 0 \iff a-b = 0,\ a+b-1 = 0,$$

da cui $a = b = 1/2$; c'è un'unica soluzione col supporto in $\mathbb{R}_+$ che è

$$y(t) = \frac{e^t - e^{-|t|}}{2} = \sinh t H(t).$$

Naturalmente questa soluzione si trova subito anche con la trasformata di Laplace. □

Esercizio 4.22. Trovare le inverse, in $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, delle distribuzioni $H + \delta''$ e $e^t H(t) + \delta'$.

Risoluzione. Sono quelle distribuzioni T tali che sia

$$(H + \delta'') * T = \delta; \qquad (e^t H(t) + \delta') * T = \delta;$$

vediamo la prima; trasformando alla Laplace si ha

$$\left(\frac{1}{s} + s^2\right) \Lambda T(s) = 1 \iff \Lambda T(s) = \frac{s}{1 + s^3}.$$

Per antitrasformare $s/(1 + s^3)$ usiamo la formula di Hermite:

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}\left(\frac{s}{1+s^3}\right) = &\left(\frac{e^{i\pi/3}}{3e^{2i\pi/3}} e^{(1+i\sqrt{3})t/2} + \frac{-1}{3(-1)^2} e^{-t} + \frac{e^{-i\pi/3}}{3e^{-2i\pi/3}} e^{(1-i\sqrt{3})t/2}\right) H(t) = \\ &\frac{1}{3}\left(-e^{-t} + e^{-i\pi/3} e^{t/2} e^{it\sqrt{3}/2} + e^{+i\pi/3} e^{t/2} e^{-it\sqrt{3}/2}\right) H(t) = \\ &\left(-e^{-t} + 2e^{t/2}\cos(t\sqrt{3}/2 - \pi/3)\right) \frac{H(t)}{3} = \\ &\left(-e^{-t} + e^{t/2}\left(\cos(t\sqrt{3}/2) + \sqrt{3}\sin(t\sqrt{3}/2)\right)\right) \frac{H(t)}{3}.\end{aligned}$$

Questa è la richiesta distribuzione T. Per la seconda: la trasformata è

$$\left(\frac{1}{s-1} + s\right) \Lambda T(s) = 1 \iff \Lambda T(s) = \frac{s-1}{1 - s + s^2};$$

e si ha

$$\frac{s-1}{1-s+s^2} = \frac{s-1}{(s-1/2)^2 + 3/4} = \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} - \frac{1/2}{(s-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

che si antitrasforma subito in

$$e^{t/2}\left(\cos(t\sqrt{3}/2) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(t\sqrt{3}/2)\right) H(t),$$

che è la richiesta inversa. □

Esercizio 4.23. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = 4t + 12e^{-t} \qquad y(0) = 6;\ y'(0) = -1.$$

Posto $g(t) = f(t)H(t)$, scrivere un'equazione differenziale del secondo ordine a cui g soddisfa nel senso delle distribuzioni; trovare poi g, ed f.

Risoluzione. Si ha $g'_{\mathrm{d}}(t) = f'(t)H(t) + 6\delta(t)$ e $g''_{\mathrm{d}}(t) = f''(t)H(t) + 6\delta'(t) - \delta(t)$; si ha (omettendo l'indice d dalla derivata distribuzionale):

$$\begin{aligned}&g''(t) - 3g'(t) + 2g(t) = (f''(t)H(t) + 6\delta'(t) - \delta(t) - 3f'(t)H(t) - 18\delta(t) + 2f(t)H(t) = \\ &(f''(t) - 3f'(t) + 2f(t))H(t) + 6\delta'(t) - 19\delta(t),\end{aligned}$$

ma dato che f è soluzione dell'equazione data si ha $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 4t + 12e^{-t}$ per ogni $t > 0$, quindi

$$g''(t) - 3g'(t) + 2g(t) = (4t + 12e^{-t})H(t) + 6\delta'(t) - 19\delta(t)$$

è l'equazione a cui g soddisfa nel senso delle distribuzioni. Per trovare g usiamo le trasformate di Laplace, ottenenendo ($U(s) = \Lambda g(s)$):

$$\begin{aligned}&s^2 U(s) - 3sU(s) + 2U(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1} + 6s - 19 \iff \\ &U(s) = \frac{4(s+1) + 12s^2 + (6s-19)s^2(s+1)}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)} =\end{aligned}$$

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s-1} + \frac{d}{s+1} + \frac{h}{s-2}.$$

Si ha:

$$c = \operatorname{Res}(U,1) = \frac{-6}{-2} = 3; \quad d = \operatorname{Res}(U,-1) = \frac{12}{6} = 2; \quad h = \operatorname{Res}(U,2) = \frac{-24}{12} = -2$$

Inoltre $b = \lim_{s\to 0} s^2U(s) = 4/2 = 2$; e per il teorema del valore iniziale si ha $6 = f(0) = \lim_{s\to\infty} sU(s) = a + c + d + h = a + 3 + 2 - 2$, da cui $a = 3$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s-2} \\ g(t) &= (3 + 2t + 3e^t + 2e^{-t} - 2e^{2t})H(t) \quad \text{quindi} \quad f(t) = 9 + 2t + 3e^t - 4e^{-t} - 2e^{2t}. \end{aligned}$$

□

Esercizio 4.24. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2e^t \qquad y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = -2.$$

Posto $g(t) = f(t)H(t)$, scrivere un'equazione differenziale del terzo ordine a cui g soddisfa nel senso delle distribuzioni; trovare poi g, ed f.

Risoluzione. Si ha

$$g'_{\mathrm{d}}(t) = f'(t)H(t) + \delta(t); \quad g''_{\mathrm{d}}(t) = f''(t)H(t) + \delta'(t) + 0\delta(t); \quad g'''_{\mathrm{d}}(t) = f'''(t)H(t) + \delta''(t) - 2\delta(t)$$

da cui, omettendo d'ora in poi l'indice d:

$$\begin{aligned} &g'''(t) - 3g''(t) + 3g'(t) - g(t) = \\ &f'''(t)H(t) + \delta''(t) - 2\delta(t) - 3f''(t)H(t) - 3\delta'(t) + 3f'(t)H(t) + 3\delta(t) - f(t)H(t) = \\ &(f'''(t) - 3f''(t) + 3f'(t) - f(t))H(t) + \delta''(t) - 3\delta'(t) + \delta(t) = t^2e^tH(t) + \delta''(t) - 3\delta'(t) + \delta(t). \end{aligned}$$

La richiesta equazione è

$$g'''(t) - 3g''(t) + 3g'(t) - g(t) = t^2e^tH(t) + \delta''(t) - 3\delta'(t) + \delta(t).$$

Posto $U(s) = \Lambda g(s)$ si ha

$$s^3U(s) - 3s^2U(s) + 3sU(s) - U(s) = \frac{2}{(s-1)^3} + s^2 - 3s + 1 \iff U(s) = \frac{2}{(s-1)^6} + \frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^3};$$

Scrivendo $(s^2 - 3s + 1)/(s-1)^3 = (s^2 - 2s + 1 - s)/(s-1)^3 = 1/(s-1) - s/(s-1)^3$ si antitrasforma subito:

$$g(t) = \frac{2}{5!}t^5e^tH(t) + e^tH(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t^2e^tH(t)) = \frac{t^5e^t}{60}H(t) + e^tH(t) - \frac{(2t + t^2)e^t}{2}H(t).$$

□

Esercizio 4.25. Siano $a, b > 0$ reali.

(i) Servirsi dell'originale di Laplace di $1/((s+a)^2 + b^2)$ per calcolare l'originale di Fourier di $F(\xi) = 1/(i\xi + a)^2 + b^2)$; trovare poi l'originale di Fourier di $G(\xi) = 1/(i\xi - a)^2 + b^2)$.

(ii) Usare la trasformazione di Fourier per trovare le eventuali soluzioni dell'equazione

$$y'' - 2y' + 2y = \delta$$

che siano distribuzioni temperate. Trovare poi tutte le soluzioni dell'equazione data, in particolare quelle in $\mathcal{D}'_L$.

Risoluzione. (i) L'originale è $e^{-at}\sin(bt)H(t)/b$; poiché tale funzione sta in $L^1(\mathbb{R})$, il valore della sua trasformata di Laplace in $i\xi$ è la sua trasformata di Fourier; essa è pertanto l'originale di Fourier voluto. Questo metodo non si applica a G, perché $e^{at}\sin(bt)H(t)/b$ non sta in L^1; ma basta vedere che si ha

$$G(-\xi) = \frac{1}{(i(-\xi)-a)^2+b^2} = \frac{1}{(i\xi+a)^2+b^2} = F(\xi),$$

per avere $-e^{at}\sin(bt)H(-t)/b$ come originale di Fourier di G.

(ii) Sia T soluzione temperata; trasformando alla Fourier ambo i membri si ha, posto $U(\xi) = \mathcal{F}T(\xi)$:

$$\big((i\xi)^2 - 2i\xi + 2\big)\,U(\xi) = 1 \iff U(\xi) = \frac{1}{(i\xi)^2 - 2i\xi + 2} = \frac{1}{(i\xi-1)^2+1}.$$

La soluzione temperata è quindi $-e^t\sin t\tilde{H}(t)$. le soluzioni sono date da questa, piú le soluzioni dell'omogenea associata:

$$y(t) = e^t(c_1\cos t + c_2\sin t) - e^t\sin t\tilde{H}(t).$$

Prendendo $c_2 = 1,\ c_1 = 0$ tale soluzione è nulla per $t<0$, e sta quindi in $\mathcal{D}'_L$; essa è quindi $e^t\sin tH(t)$. □

Esercizio 4.26. Si consideri l'equazione

$$y'' - 4y' + 8y = c_0\delta(t) + c_1\delta'(t) + b(t) \quad b \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+).$$

Determinare c_0, c_1 in modo tale che la soluzione in $\mathcal{D}'_L(\mathbb{R})$ di tale equazione sia (in $]0,+\infty[$) una funzione $f(t)$ tale che $\lim_{t\to 0^+} f(t) = y_0$, $\lim_{t\to 0^+} f'(t) = y_1$; risolvere poi l'equazione nel caso $b(t) = \chi_{[0,\tau]}$, $\tau > 0$ fissato, e $c_0 = c_1 = 0$.

Risoluzione. Togliamo a secondo membro il termine distribuzionale. Usando y_0, y_1 come condizioni iniziali, e servendosi delle trasformate di Laplace si trova ($u(s) = \Lambda y(s)$):

$$(s^2-4s+8)u(s) - y_0 s - y_1 + 4y_0 = \Lambda b(s) \iff (s^2-4s+8)u(s) = y_0 s + (y_1 - 4y_0) + \Lambda b(s);$$

trasformando l'equazione originaria (con y distribuzione) si trovava

$$(s^2-4s+8)u(s) = c_0 + c_1 s + \Lambda b(s).$$

Tale equazione coincide con la precedente se e solo se si ha $c_0 = y_1 - 4y_0$ e $c_1 = y_0$. Se $b(t) = \chi_{[0,\tau]}$ si ha $\Lambda b(s) = (1-e^{-\tau s})/s$, da cui

$$u(s) = \frac{1-e^{-\tau s}}{s((s-2)^2+4)};$$

Decomponiamo in frazioni semplici:

$$\frac{1}{s((s-2)^2+4)} = \frac{as+b}{(s-2)^2+4} + \frac{1/8}{s} = \frac{(as+b)s + ((s-2)^2+4)/8}{s((s-2)^2+4)}.$$

Uguagliando i numeratori, e posto $s = 2+2i$ si ottiene

$$1 = 2(1+i)(2a(1+i)+b) = 4a2i + 2b + 2bi = 2b + 2(b+4a)i \iff b = 1/2,\ \text{e}\ a = -1/8.$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{s((s-2)^2+4)} = \frac{1/8}{s} - \frac{1}{8}\frac{(s-2)-2}{(s-2)^2+4} = \frac{1/8}{s} - \frac{1}{8}\frac{s-2}{(s-2)^2+4} + \frac{1}{8}\frac{2}{(s-2)^2+4};$$

Quindi

$$u(s) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{s} - \frac{s-2}{(s-2)^2+4} + \frac{2}{(s-2)^2+4}\right)(1-e^{-\tau s}),$$

che si antitrasforma in

$$y(t) = \frac{1}{8}\big(1 - e^{2t}(\cos(2t) - \sin(2t)\big)\,H(t) - \frac{1}{8}\Big(1 - e^{-2(t-\tau)}(\cos(2(t-\tau)) - \sin(2(t-\tau))\Big)\,H(t-\tau).$$

□

Esercizio 4.27. i) Determinare la distribuzione $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ tale che

$$T'' - 3T' + 2T = \delta - \delta'.$$

Mostrare che esiste una funzione u a supporto in $[0, +\infty[$ tale che $T_u = T$ e determinarla;
ii) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ affinché u (del punto precedente) sia la soluzione distribuzionale di

$$y'' - 3y' + 2y = \delta, \quad y(0) = a, y'(0) = b.$$

Esercizio 4.28. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ se } |x| \le 1 \\ 0 \text{ se } |x| \ge 1. \end{cases}$$

i) Determinare la derivata prima e la derivata seconda di f nel senso delle distribuzioni;
ii) Determinare la trasformata di Fourier della distribuzione f'';
iii) Calcolare, usando ii), la trasformata $\hat{f}$ di Fourier di f;
iv) Dire se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e se vale la formula di inversione per f;
v) Usando i punti precedenti determinare il valore dell'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u \cos u - \sin u}{u^3} \cos \frac{u}{2}\, du.$$

Esercizio 4.29. Determinare le soluzioni L–trasformabili di

$$y'' + 2y' + y = \delta.$$

Determinare poi tutte le soluzioni dell'equazione precedente.

Esercizio 4.30. i) Determinare, usando il fatto che $\mathcal{L}(costH(t))(s) = \frac{s}{s^2+1}$ e che $\mathcal{L}(sintH(t))(s) = \frac{1}{s^2+1}$, l'antitrasformata di Laplace di $\frac{s}{(s+2)^2+1}$; determinarne l'ascisse di convergenza assoluta.
ii) Dedurre da i) l'antitrasformata di Fourier u di $f(\xi) = \frac{i\xi}{(i\xi+2)^2+1}$.
iii) Sia $g(\xi) = \frac{i\xi}{(i\xi-2)^2+1} (= -f(-\xi))$. Dedurre da ii) l'antitrasformata di Fourier di g. $(\mathcal{F}(u(-t)) = ...)$.
iv) Usando la trasformata di Fourier, determinare la distribuzione temperata y tale che

$$y'' - 4y' + 5y = \delta'.$$

Determinare poi tutte le soluzioni in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dell'equazione precedente.

Esercizio 4.31. Sia $F(s) = \frac{1}{s^2-4s+4}$.
i) Mostrare che F è la trasformata di Laplace di una funzione u da determinare;
ii) Determinare u', u'' nel senso delle distribuzioni;
iii) Provare che u soddisfa ad una equazione differenziale lineare di ordine 2 in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 4.32. i) Servendosi della trasformata di Fourier, determinare la distribuzione temperata che soddisfa

$$y'' + 6iy' - 13y = \delta \qquad (*)$$

ii) Determinare tutte le soluzioni in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ di $(*)$;
iii) Determinare le soluzioni di $(*)$ con supporto in $[0, +\infty[$;
iv) ritrovare il risultato di iii) utilizzando la trasformata di Laplace.

Esercizio 4.33. Determinare le soluzioni $\mathcal{L}$–trasformabili di

$$y'' + 2y' + y = \delta.$$

Determinare poi tutte le soluzioni dell'equazione precedente nello spazio delle distribuzioni.

Tabella delle trasformate di Fourier

Funzione $f(t)$	$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t}\,dt$	$\Phi f(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt$
$\mathrm{rect}(t) := \chi_{]-1/2,1/2[}$	$\mathrm{sinc}(\xi/2) = \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}$	$\mathrm{sinc}(\nu\pi) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$
$(1-\lvert t\rvert)\vee 0$	$\mathrm{sinc}^2(\frac{\xi}{2}) = \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}$	$\mathrm{sinc}^2(\nu\pi)$
$(a>0)$ e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\xi^2/(4a)}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\nu^2/a}$
$(a>0)$ $\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert\xi\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi\nu)^2}$
$(a>0)$ $e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+(\xi)^2}$	$\frac{2a/h}{a^2+(p\nu)^2}$
Traslazioni diventano moltiplicazioni per caratteri:		
$\tau_a f(t) = f(t-a)$	$e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi)$	$e^{-2\pi i a\nu}$
Moltiplicazioni per caratteri diventano traslazioni:		
$(a\in\mathbb{R})$ $e^{iat}f(t)$	$\tau_a\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}f(\xi-a)$	$\tau_{a/(2\pi)}\Phi f(\nu) = \Phi f(\nu - a/(2\pi))$
Derivata della trasformata (ovvero trasformata della moltiplicazione per t):		
$tf(t)$	$i\partial_\xi\mathcal{F}f(\xi)$	$\frac{1}{-2\pi i}\partial_\nu\Phi f(\nu)$
Trasformata della derivata		
$\partial_t f(t) = f'(t)$	$(i\xi)\mathcal{F}f(\xi)$	$(2\pi i\nu)\Phi f(\nu)$
Distribuzione		
δ	1	1
1	$2\pi\delta$	δ
$\delta_{(a)}$	$e^{-ia\#}$	$e^{-2\pi i a\#}$
$(a\in\mathbb{R})$ e^{iat}	$2\pi\delta_a$	$\delta_{(a/2\pi)}$
H	$\frac{1}{i}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\xi)+\pi\delta$	$\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}(1/\nu)+\frac{\delta}{2}$
sgn	$\frac{2}{i}\,\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{\xi}$	$\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{\nu}$

FORMULA DI PLANCHEREL

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \qquad \|\Phi f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

ANTITRASFORMATA

Funzione $f(t)$	$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\xi t}\,dt$	$\Phi^{-1}f(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{2\pi i\nu t}\,dt$

Formule per le trasformate di Laplace

Con $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ si indica il sottospazio lineare di $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ consistente delle (classi di) funzioni q.o. uguali a funzioni identicamente nulle sulla semiretta $\{t \in \mathbb{R} : t < 0\}$; per ogni $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $\rho(f)$, *ascissa di convergenza assoluta* di f, coincide con $\rho(f) = \inf\{p \in \mathbb{R} : t \mapsto e^{-pt} f(t) \in L^1(\mathbb{R})\}$.

Trasformata

$$\Lambda f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \left(= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right) \qquad \operatorname{Re} s > \rho(f)$$

Antitrasformata

$$\Lambda^{-1}\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} \phi(\zeta) e^{\zeta t}\, d\zeta$$

Convoluzione

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau \qquad f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$$

Derivata $n-$esima della trasformata

$$D^n \Lambda f(s) = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n f(t)\, dt \, (= \Lambda((-\#)^n f(\#))(s)\,) \qquad \operatorname{Re} s > \rho(f)$$

Trasformata della derivata m-esima

$$\Lambda\left(f^{(m)}\right)(s) = s^m \Lambda f(s) - \sum_{j=1}^{m} s^{m-j} f^{(j-1)}(0^+) \qquad \operatorname{Re} s > \max\{\rho(f^{(m)}), 0\}$$

Traslata della trasformata

$$\Lambda(e^{\lambda \#} f)(s) = \Lambda f(s - \lambda); \qquad \rho(e^{\lambda \#} f) = \rho(f) + \operatorname{Re} \lambda$$

Trasformata della traslata in avanti, $(\tau_a f(t) = f(t-a))$, $a \geq 0$

$$\Lambda(\tau_a f)(s) = e^{-as} \Lambda f(s) \qquad a \geq 0;\ \operatorname{Re} s > \rho(f)$$

Cambio scala

$$\Lambda f(\lambda \#)(s) = \frac{\Lambda(s/\lambda)}{\lambda} \qquad \lambda > 0;\ \rho(f(\lambda \#)) = \lambda \rho(f)$$

Convoluzione (la trasformata è il prodotto delle trasformate)

$$\Lambda(f * g)(s) = \Lambda f(s) \Lambda g(s) \qquad \operatorname{Re} s > \max\{\rho(f), \rho(g)\}$$

$$\Lambda^{-1}(e^{-as} h(s))(t) = \tau_a \Lambda^{-1} h(t) = \Lambda^{-1} h(t-a) \qquad a \geq 0;$$

$$\Lambda^{-1}(\tau_\lambda h)(t) = e^{\lambda t} \Lambda^{-1} h(t) \qquad \lambda \in \mathbb{C};$$

Valore finale: se $\lim_{t \to +\infty} f(t) = a \in \mathbb{C}$, e $0 \leq \alpha < \pi/2$, allora

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ \left|\frac{\operatorname{Im} s}{\operatorname{Re} s}\right| \leq \tan\alpha}} s \Lambda f(s) = a \qquad \text{(in particolare, } \lim_{\substack{p \to 0 \\ p \in \mathbb{R}^+}} p \Lambda f(p) = a\text{)}$$

Valore Iniziale: se $\lim_{t \to 0^+} f(t) = a \in \mathbb{C}$, e $0 \leq \alpha < \pi/2$, allora

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ \left|\frac{\operatorname{Im} s}{\operatorname{Re} s}\right| \leq \tan\alpha}} s \Lambda f(s) = a \qquad \text{(in particolare, } \lim_{\substack{p \to +\infty \\ p \in \mathbb{R}^+}} p \Lambda f(p) = a\text{)}$$

Equazione lineare di ordine n

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = \sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)} = b(t),$$

Condizioni iniziali $u(0^+) = \alpha_0, u'(0^+) = \alpha_1, \ldots, u^{(n-1)}(0^+) = \alpha_{n-1}$; $\chi(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$, *polinomio caratteristico*;

$$\Lambda u(s) = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} s^{k-j}\alpha_{j-1}\right)}{\chi(s)} + \frac{\Lambda b(s)}{\chi(s)}.$$

Posto $\varphi_\alpha(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} s^{k-j}\alpha_{j-1}\right)/\chi(s)$ si ha, per $t \geq 0$:

$$u(t) = \Lambda^{-1}\varphi_\alpha(t) + \eta * b(t),$$

dove $\eta(t)$, *risolvente* dell'equazione data, è la preimmagine di Laplace di $1/\chi(s)$.

Tabella di trasformate di Laplace

Funzione	Trasformata	Ascissa di conv. ass.
$H(\#)$	$\frac{1}{s}$	0
$H(\#)e^{\omega\#}$	$\frac{1}{s-\omega}$	$\operatorname{Re}\omega$
$H(\#)\cos(\omega\#)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
$H(\#)\sin(\omega\#)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$
$H(\#)\cosh(\omega\#)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\lvert\operatorname{Re}\omega\rvert$
$H(\#)\sinh(\omega\#)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\lvert\operatorname{Re}\omega\rvert$
$H(\#)(\#)^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$\frac{H(\#)}{\sqrt{\#}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	0

ed in generale, se $\operatorname{Re}\alpha > -1$

$H(\#)(\#)^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	0
δ	1	$-\infty$
δ'	s	$-\infty$
$\delta^{(m)}$	s^m	$-\infty$

Funzione di Bessel J_0

$H(\#)J_0(\#)$	$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$	0

Funzione periodica f di periodo τ

$H(\#)f(\#)$	$\frac{\int_0^\tau e^{-s\theta} f(\theta)\,d\theta}{1-e^{-s\tau}}$	0

(ricordiamo che è $J_0(t) = (1/\pi)\int_{-1}^{1}\left(e^{i\theta t}/\sqrt{1-\theta^2}\right)\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}/(2^{2n}(n!)^2)$)