Capitolo 1

Programmazione Non Lineare

1.1 Introduzione

Un problema di ottimizzazione viene definito come la minimizzazione o la massimizzazione di una funzione a valori reali su un insieme specificato. Tale problema viene rappresentato nella forma:

$$\begin{array}{c} \min \ f(x) \\ x \in \mathcal{F}, \end{array} \tag{1.1}$$

dove

- la funzione $f : \mathcal{F} \to R$ è detta *funzione obiettivo*;
- l'insieme $\mathcal{F}$ è detto *insieme ammissibile*.

Riportiamo di seguito alcune utili definizioni.

Definizione 1.1.1 *Il Problema (1.1) si dice* inammissibile *se $\mathcal{F} = \emptyset$, cioè se non esistono soluzioni ammissibili.*

Definizione 1.1.2 *Il Problema (1.1) si dice* illimitato (inferiormente) *se comunque scelto un valore $M > 0$ esiste un punto $x_M \in \mathcal{F}$ tale che $f(x_M) < -M$*

Definizione 1.1.3 *Si dice che il Problema (1.1)* ammette soluzione ottima (finita) *se esiste un $x^\star \in \mathcal{F}$ tale che risulti $f(x^\star) \le f(x)$ per ogni $x \in \mathcal{F}$. Il corrispondente valore $f(x^\star)$ di dice* valore ottimo*.*

Si può notare che, se si ha un problema di massimizzazione (cioè se si deve trovare un punto in cui la funzione f assume valore più alto possibile) ci si può sempre ricondurre a un problema di minimo, cambiando di segno la funzione obiettivo. Infatti, un punto di massimo del problema

$$\begin{array}{c} \max \ f(x) \\ x \in \mathcal{F} \end{array}$$

è un punto $x^* \in \mathcal{F}$ che, per definizione, soddisfa la seguente proprietà:

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \text{per ogni} \;\; x \in \mathcal{F},$$

che è equivalente a:

$$-f(x^*) \leq -f(x), \quad \text{per ogni} \;\; x \in \mathcal{F},$$

da cui segue che x^* è anche un punto di minimo del problema

$$\begin{array}{c} \min \;\; -f(x) \\ x \in \mathcal{F} \end{array}$$

e risulta:

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\min_{x \in \mathcal{F}} (-f(x)).$$

Perciò non si ha nessuna perdita di generalità a studiare ed affrontare solamente problemi di minimizzazione o, viceversa, solamente problemi di massimizzazione.

All'interno dei problemi di Ottimizzazione, in base alla *struttura dell'insieme ammissibile* S, si possono distinguere le seguenti importanti classi di problemi:

- *Problemi di Ottimizzazione Continua* in cui le variabili possono assumere tutti i valori reali ($x \in R^n$) e, quindi, si ha che $\mathcal{F} \subseteq R^n$;

- *Problemi di Ottimizzazione Discreta* in cui le variabili sono vincolate ad essere numeri interi ($x \in Z^n$)e, quindi, si ha che $\mathcal{F} \subseteq Z^n$;

- *Problemi misti* in cui alcune variabili possono essere continue altre variabili sono vincolate ad essere intere.

1.1.1 Problemi di Ottimizzazione Continua

Nel seguito per indicare un Problema di Ottimizzazione Continua utilizzeremo la precedente notazione

$$\begin{array}{c} \min \;\; f(x) \\ x \in \mathcal{F}, \end{array} \tag{1.2}$$

in cui supporremo, però, che $x \in R^n$ e che $\mathcal{F} \subseteq R^n$.

Per caratterizzare meglio i possibili punti di soluzione del precedente problema di minimizzazione si possono introdurre le seguenti definizioni.

Definizione 1.1.4 *Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice punto di* minimo globale *di f su $\mathcal{F}$ se*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni} \;\; x \in \mathcal{F}.$$

Definizione 1.1.5 *Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice punto di* minimo globale stretto *di f su $\mathcal{F}$ se*

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni} \;\; x \in \mathcal{F}, \;\; x \neq x^*.$$

Definizione 1.1.6 *Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice punto di* minimo locale *di f su $\mathcal{F}$ se esiste un intorno $B(x^*; \rho)$, con $\rho > 0$ tale che*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F} \cap B(x^*; \rho).$$

Definizione 1.1.7 *Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice punto di* minimo locale stretto *di f su $\mathcal{F}$ se esiste un intorno $B(x^*; \rho)$, con $\rho > 0$ tale che*

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{F} \cap B(x^*; \rho), \quad x \neq x^*.$$

La natura del Problema (1.1) e, quindi, la sua difficoltà di risoluzione dipendono, ovviamente, dalle caratteristiche della funzione obiettivo e dalla struttura dell'insieme ammissibile. Usualmente, un problema di ottimizzazione viene caratterizzato dal fatto che si abbia completa libertà o meno nella scelta del vettore x, infatti:

- è detto *problema di minimizzazione non vincolata* se $\mathcal{F} = R^n$, cioè se l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ coincide con tutto lo spazio R^n, cioè:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x \in R^n. \end{aligned} \tag{1.3}$$

- viene detto, invece, *problema di minimizzazione vincolata* un problema in cui $\mathcal{F} \subset R^n$.

Tuttavia, può essere considerato come un problema di minimizzazione non vincolato anche un qualsiasi problema in cui l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ è un insieme aperto. Infatti, come nel caso in cui $\mathcal{F} = R^n$, i punti di minimo del problema possono essere caratterizzati esclusivamente dall'andamento della funzione obiettivo in un intorno del punto e non dal fatto che ci siano dei vincoli sulle variabili del problema. Perciò, per i problemi in cui l'insieme ammissibile è un insieme aperto, si adattano facilmente tutti i risultati e metodi proposti per il caso in cui $\mathcal{F} = R^n$.

Tra i problemi vincolati in cui $\mathcal{F}$ è un insieme chiuso, la classe più comunemente considerata è quella in cui $\mathcal{F}$ è descritto attraverso un *insieme finito di vincoli di uguaglianza e disuguaglianza*:

$$\mathcal{F} = \{x \in R^n : g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\},$$

in cui $g : R^n \to R^m$ e $h : R^n \to R^p$ sono vettori di funzioni continue assegnate. Il problema di ottimo si può indicare, in tal caso, ponendo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

che equivale a scrivere

$$\begin{array}{c} \min \quad f(x) \\ g_1(x) \leq 0 \\ \cdots \\ g_m(x) \leq 0 \\ \\ h_1(x) = 0 \\ \cdots \\ h_p(x) = 0. \end{array}$$

Nella precedente formulazione nell'insieme $\mathcal{F}$ si sono utilizzati vincoli di disuguaglianza nella forma di minore o uguale a zero, ma è chiaro che questa notazione include il caso in cui i vincoli sono espressi con vincoli di disuguaglianza nella forma di maggiore o uguale a zero; infatti si può sempre trasformare un vincolo di maggiore o uguale del tipo

$$g_i(x) \geq 0$$

in un vincolo di minore o uguale semplicemente riscrivendolo nella forma

$$-g_i(x) \leq 0.$$

Inoltre un vincolo di uguaglianza

$$h_j(x) = 0$$

può essere riscritto nella forma equivalente delle due diseguaglianze

$$\begin{array}{c} h_j(x) \leq 0 \\ -h_j(x) \leq 0. \end{array}$$

Riguardo i vincoli di disuguaglianza di un problema di ottimizzazione è importante introdurre le seguenti definizioni.

Definizione 1.1.8 *Si consideri un vincolo di disuguaglianza del tipo* $g_i(x) \leq 0$*;*

- *si dice* violato *in un punto* $\bar{x}$ *se* $g_i(\bar{x}) > 0$*;*

- *si dice* attivo *in un punto* $\bar{x}$ *se* $g_i(\bar{x}) = 0$.

In un problema di ottimizzazione un vincolo si dice ridondante *se con la sua eliminazione l'insieme ammissibile rimane immutato.*

Nel seguito si considererà una particolare classe di problemi, detti problemi di ottimizzazione *continuamente differenziabili*, che presentano le seguenti caratteristiche:

- la funzione obiettivo f è almeno *continuamente differenziabile*;

- nel caso di problemi vincolati, le funzioni g_i, $i = 1, \dots, m$, e h_j, $j = 1, \dots, p$, che descrivono l'insieme ammissibile, sono almeno *continuamente differenziabili*.

1.2 Condizioni di esistenza

Come detto nella precedente sezione, nell'affrontare il Problema (1.1) la prima difficoltà da affrontare è quella di capire se è ben posto, nel senso che potrebbe non esistere un punto in $\mathcal{F}$ in cui la funzione $f(x)$ assume valore minimo. Infatti, si potrebbe presentare una delle seguenti situazioni:

- l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ potrebbe essere vuoto;
- l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ potrebbe essere non vuoto ma la funzione obiettivo potrebbe essere illimitata inferiormente su $\mathcal{F}$ ossia $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) = -\infty$;
- l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ potrebbe essere non vuoto e la funzione obiettivo potrebbe essere limitata inferiormente su $\mathcal{F}$ ma, anche in questo caso, *potrebbero non esistere punti di minimo globale* di f su $\mathcal{F}$;

Fortunatamente si possono stabilire delle semplici condizioni *sufficienti* (ma non necessarie) per l'esistenza di un punto di minimo globale di un problema di ottimizzazione. L'analisi di queste condizioni si differenzia a seconda del tipo di problema considerato.

1.2.1 Condizioni di esistenza per Problemi di Ottimizzazione Continua

Un risultato fondamentale riguardo all'esistenza di una soluzione di un problema di Ottimizzazione Continua è quello espresso dalla proposizione seguente, che segue dal ben noto Teorema di Weierstrass.

Proposizione 1.2.1 *Sia $\mathcal{F} \subset R^n$ un insieme non vuoto e compatto. Sia f una funzione continua definita su $\mathcal{F}$. Allora esiste un punto di minimo globale di f in $\mathcal{F}$.*

Esempi. Alcuni esempi di problemi che hanno insiemi ammissibili compatti sono i seguenti:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & l \leq x \leq u, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & \|x\|^2 \leq \eta, \end{array}$$

dove $l, u \in R^n$ e $\eta \in R_+$.

Il risultato stabilito nella precedente proposizione si applica solamente alla classe dei problemi *vincolati* in cui l'insieme ammissibile è compatto. Notiamo che se la funzione g_i è continua, l'insieme dei punti che soddisfano il vincolo $g_i(x) \leq 0$ è chiuso (e quindi, se h_i è continua, l'insieme dei punti che soddisfano il vincolo

$h_i(x) = 0$). Pertanto, nei casi da noi analizzati, la chiusura è sempre assicurata e l'applicazione del teorema precedente si riduce alla verifica che l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ sia limitato. Tale fatto è sicuramente vero nel caso in cui le variabili siano tutte limitate sia inferiormente che superiormente. Nel caso in cui il problema sia non vincolato ($\mathcal{F} = R^n$), oppure nel caso in cui $\mathcal{F}$ sia chiuso ma non limitato, è necessario caratterizzare un qualche sottoinsieme di $\mathcal{F}$ contenente le soluzioni ottime del problema.

A questo fine si introduce la definizione seguente.

Definizione 1.2.2 (Insieme di livello) *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ e sia $f : \mathcal{F} \to R$; si definisce insieme di livello di f su $\mathcal{F}$ ogni insieme non vuoto del tipo:*

$$\mathcal{L}(\alpha) := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\},$$

in cui $\alpha \in R$.

In particolare, se $x_0 \in \mathcal{F}$, indichiamo con $\mathcal{L}_0$ l'insieme di livello $\mathcal{L}(f(x_0))$, ossia:

$$\mathcal{L}_0 := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq f(x_0)\}. \tag{1.5}$$

A questo punto, si può enunciare il risultato seguente che stabilisce una condizione sufficiente per l'esistenza di soluzioni globali di un problema di ottimizzazione facendo riferimento alla struttura degli insiemi di livello della funzione.

Proposizione 1.2.3 *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ e sia f una funzione continua definita su $\mathcal{F}$. Supponiamo che esista un insieme di livello di f su $\mathcal{F}$ che sia non vuoto e compatto. Allora esiste un punto di minimo globale di f in $\mathcal{F}$.*

Prova. Sia $\mathcal{L}(\alpha)$, con $\alpha \in R$, l'insieme di livello non vuoto e compatto. Dalla Proposizione 1.2.1 esiste un punto di minimo globale $x^* \in \mathcal{L}(\alpha)$ di f su $\mathcal{L}(\alpha)$. Questo implica che per ogni $x \in \mathcal{L}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$ si ha

$$\alpha \geq f(x) \geq f(x^*). \tag{1.6}$$

Dalla definizione di $\mathcal{L}(\alpha)$ segue che per ogni $x \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{L}(\alpha)$ si ha

$$f(x) > \alpha \geq f(x^*). \tag{1.7}$$

Quindi la (1.6) e la (1.7) dimostrano che $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale di f sul tutto l'insieme $\mathcal{F}$. $\square$

Nel caso generale, stabilire l'esistenza di un insieme di livello compatto può essere difficile. Tuttavia, in molti casi, si possono ottenere delle semplici condizioni per assicurare che *tutti* gli insiemi di livello siano compatti. In particolare la proposizione successiva fornisce una condizione necessaria e sufficiente (nota come condizione di *coercività*) perchè gli insiemi di livello di f su $\mathcal{F}$ siano compatti.

Proposizione 1.2.4 . *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ e sia f una funzione continua definita su $\mathcal{F}$. Allora tutti gli insiemi di livello $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$ di f su $\mathcal{F}$ sono compatti se e solo se la seguente condizione è soddisfatta :*

- *se $\{x_k\}$ è una sequenza di punti $x_k \in \mathcal{F}$ tale che $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$ allora segue che*
$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty.$$

Combinando le proposizioni 1.2.3 and 1.2.4 possiamo ottenere delle condizioni sufficienti per l'esistenza delle soluzioni di un problema di minimizzazione in cui l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ è un insieme chiuso.

Proposizione 1.2.5 *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ un insieme chiuso e sia f una funzione continua su $\mathcal{F}$ e si assuma che f sia* coerciva *su $\mathcal{F}$, ossia che*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty,$$

per ogni successione $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathcal{F}$, tale che $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$. Allora esiste un minimo globale di f su $\mathcal{F}$.

La seguente proposizione indentifica un classe importante di funzioni coercive.

Proposizione 1.2.6 *Sia*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + d$$

con $Q \in R^{n\times n}$, $c \in R^n$ e $d \in R$.
Se la matrice Q è definita positiva, la funzione $f(x)$ è coerciva su R^n.

Prova. Esercizio. □

1.3 Problemi di programmazione convessa

Una classe importante dal punto di vista applicativo è quella dei problemi di progammazione convessa. Prima di descrivere questa particolare classe di problemi di minimizzazione, è necessario richiamare le seguenti defizioni.

Definizione 1.3.1 *Dato un insieme $C \subseteq R^n$, si dice che C è* un insieme convesso *se comunque scelti due punti $x, y \in C$ e comunque scelto un scalare $\alpha \in [0, 1]$ si ha che*
$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

Definizione 1.3.2 *Sia $C \subseteq R^n$ un insieme convesso e sia $f : C \to R$. Si dice che f è* convessa *su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$ e comunque scelto un scalare $\alpha \in [0, 1]$ si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y);$$

si dice che f è stettamente convessa *su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$, con $x \neq y$, e comunque scelto un scalare $\alpha \in (0, 1)$ si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Definizione 1.3.3 *Sia $C \subseteq R^n$ un insieme convesso e sia $f : C \to R$. Si dice che f è* concava *su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$ e comunque scelto un scalare $\alpha \in [0, 1]$ si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y);$$

si dice che f è stettamente concava *su C se comunque scelti due punti $x, y \in C$, con $x \neq y$, e comunque scelto un scalare $\alpha \in (0, 1)$ si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

La seguente proposizione richiama alcune delle proprietà delle funzioni convesse.

Proposizione 1.3.4 *Sia $C \subseteq R^n$ un insieme convesso aperto. Se f è continuamente differenziabile su C allora:*

(i) f è convessa su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$ si ha:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x);$$

(ii) f è strettamente convessa su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$, con $x \neq y$, si ha:

$$f(y) - f(x) > \nabla f(x)^T (y - x).$$

Se f è due volte continuamente differenziabile su C allora:

(iii) f è convessa su C se e solamente se per ogni $x \in C$ si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad d \in R^n;$$

(iv) f è strettamente convessa su C se per ogni $x \in C$ si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d > 0 \quad \textit{per ogni} \quad d \in R^n, d \neq 0.$$

Le Proprietà (i) e (ii) sono particolarmente significative, come si vedrà in seguito, per lo studio dei punti di minimo di questa classe particolare di funzioni. Le Proprietà (iii) e (iv) sono delle utili condizioni per identificare la convessità di una funzione.

Analogamente al caso di funzioni convesse si può stabilire la seguente proposizione che fornisce un aiuto a riconoscere le funzioni concave.

Proposizione 1.3.5 *Sia $C \subseteq R^n$ un insieme convesso aperto. Se f continuamente differenziabile su C allora:*

(i) f è concava su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$ si ha:

$$f(y) - f(x) \leq \nabla f(x)^T (y - x);$$

(ii) f è strettamente concava su C se e solamente se per ogni $x, y \in C$, con $x \neq y$, si ha:

$$f(y) - f(x) < \nabla f(x)^T (y - x).$$

Se f è due volte continuamente differenziabile su C allora:

(iii) f è concava su C se e solamente se per ogni $x \in C$ si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d \leq 0 \quad \textit{per ogni} \quad d \in R^n;$$

(iv) f è strettamente concava su C se per ogni $x \in C$ si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d < 0 \quad \textit{per ogni} \quad d \in R^n, d \neq 0.$$

A questo punto si può introdurre la classe dei problema di programmazione convessa.

Definizione 1.3.6 *Si definisce* problema di programmazione convessa *un problema* di minimizzazione *del tipo:*

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x \in \mathcal{F} \end{array}$$

in cui $\mathcal{F}$ è un insieme convesso *e f è una* funzione convessa *su $\mathcal{F}$ o, equivalentemente, un problema di* massimizzazione *del tipo:*

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & x \in \mathcal{F} \end{array}$$

in cui $\mathcal{F}$ è un insieme convesso *e f è una* funzione concava *su $\mathcal{F}$.*

I problemi di programmazione convessa godono di importanti proprietà, descritte nei teoremi seguenti.

Proposizione 1.3.7 (Coincidenza tra minimi locali e minimi globali) *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ un insieme convesso e f una funzione convessa (strettamente convessa) su $\mathcal{F}$. Allora ogni punto (un punto) di minimo locale di f su $\mathcal{F}$ è anche (l'unico) punto di minimo globale.*

Prova. Sia x^* un punto di minimo locale di f su $\mathcal{F}$. Dalla definizione (Definizione 1.1.6) di minimo locale deve esistere una sfera aperta $B(x^*;\rho)$ con $\rho > 0$ tale che

$$f(x^*) \leq f(y), \quad \text{per ogni} \quad y \in B(x^*;\rho) \cap \mathcal{F}. \tag{1.8}$$

Sia x un qualsiasi altro punto di $\mathcal{F}$. Dalla convessità di $\mathcal{F}$ si ha che

$$z(\alpha) = (1-\alpha)x^* + \alpha x \in \mathcal{F}, \qquad \text{per ogni} \qquad \alpha \in [0,1].$$

Poichè per $\alpha = 0$ si ha $z(0) = x^*$, è possibile trovare un valore $\bar{\alpha} \in (0,1]$ tale che

$$z(\bar{\alpha}) = (1-\bar{\alpha})x^* + \bar{\alpha}x \in B(x^*;\rho) \cap \mathcal{F}.$$

Da cui, sfrutttando la relazione (1.8), si ottiene:

$$f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})).$$

Utilizzando la convessità della funzione obiettivo si ha:

$$f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})) = f((1-\bar{\alpha})x^* + \bar{\alpha}x) \leq (1-\bar{\alpha})f(x^*) + \bar{\alpha}f(x),$$

che, ricordando che $\bar{\alpha} > 0$, implica:

$$f(x^*) \leq f(x). \tag{1.9}$$

Poichè il punto x è stato scelto arbitrariamente in $\mathcal{F}$, la relazione (1.9) dimostra che il punto x^* è un minimo globale.
Se la funzione è strettamente convessa si ha, invece:

$$f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})) = f((1-\bar{\alpha})x^* + \bar{\alpha}x) < (1-\bar{\alpha})f(x^*) + \bar{\alpha}f(x),$$

da cui:

$$f(x^*) < f(x),$$

edx^* è l'unico minimo globale. □

1.4 Problemi di programmazione concava

Un'altra classe di problemi di minimizzazione particolarmente importante è quella dei problemi di programmazione concava. Infatti, questi particolari problemi di ottimizzazione sono in grado di modellare numerosi problemi che nascono nel campo dell'economia. Inoltre è possibile dimostrare che, sotto opportune ipotesi, molti problemi di ottimizzazione combinatoria possono essere trasformati in problemi (continui) di programmazione concava.

Si definisce *problema di programmazione concava* un problema *di minimizzazione* del tipo:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x \in \mathcal{F} \end{array}$$

in cui $\mathcal{F}$ è un *insieme convesso* e f è una *funzione concava* su $\mathcal{F}$ o, equivalentemente, un problema di *massimizzazione* del tipo:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & x \in \mathcal{F} \end{array}$$

in cui $\mathcal{F}$ è un *insieme convesso* e f è una *funzione convessa* su $\mathcal{F}$.

I problemi di programmazione concava sono molto più "difficili" di quelli convessi. La difficoltà principale risiede nel fatto che i problemi concavi presentano normalmente molti punti di minimo locale che non sono punti di minimo globale.

Tuttavia, la particolare struttura della funzione obiettivo di questi problemi fornisce comunque informazioni importanti circa i suoi punti di minimo globale. La seguente proposizione dimostra che le soluzioni ottime dei problemi di programmazione concava, ove esistano, appartengono alla frontiera dell'insieme ammissibile.

Teorema 1.4.1 (Assenza di soluzioni ottime interne) *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ un insieme convesso e chiuso, e sia f una funzione concava e non costante su $\mathcal{F}$. Allora, se esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$, questo appartiene alla frontiera di $\mathcal{F}$.*

Prova. Supponiamo che il problema ammetta soluzione e che x^* sia una soluzione ottima. Poichè, per ipotesi, f non è costante su $\mathcal{F}$ deve esistere un punto $\hat{x} \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(\hat{x}) > f(x^*).$$

Supponiamo ora che $x \in \mathcal{F}$ sia un punto interno all'insieme ammissibile. Deve allora esistere una sfera aperta $B(x;\rho)$ con centro in x e raggio $\rho > 0$ tutta contenuta in $\mathcal{F}$. Sulla retta congiungente $\hat{x}$ con x possiamo allora determinare un $y \in B(x;\rho) \subset \mathcal{F}$ tale che x appartenga al segmento $[\hat{x}, y]$ e risulti $y \neq x$, ossia possiamo trovare un α con $0 \leq \alpha < 1$ tale che

$$x = (1-\alpha)\hat{x} + \alpha y.$$

Per la concavità di f e l'ipotesi che sia $f(\hat{x}) > f(x^*)$, tenendo conto del fatto che $f(y) \geq f(x^*)$ e che $1 - \alpha > 0$ (perchè $y \neq x$), si ottiene:

$$f(x) \geq (1-\alpha)f(\hat{x}) + \alpha f(y) > (1-\alpha)f(x^*) + \alpha f(x^*) = f(x^*).$$

Ciò dimostra che $f(x) > f(x^*)$ e quindi che non può esistere una soluzione ottima in un punto interno. □

Nel caso di minimizzazione di funzioni concave con vincoli lineari, vale un risultato simile al Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare. Infatti ripetendo argomenti simili a quelli utilizzati nel Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare si ha il seguente teorema.

Teorema 1.4.2 (Soluzione ottima su un vertice) *Sia $\mathcal{F} \subseteq R^n$ un poliedro che ha almeno un vertice e sia f una funzione concava su $\mathcal{F}$ che ammetta minimi globali su $\mathcal{F}$. Allora, esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$ che coincide con un vertice del poliedro $\mathcal{F}$.*

Questo risultato mostra che la ricerca di un minimo globale di una funzione concava su un simplesso si può ridurre al problema di minimizzare la funzione sull'insieme dei vertici del poliedro $\mathcal{F}$.