



## Capitolo 3

# Ottimizzazione Vincolata

In questo capitolo ci concentreremo sui problemi di programmazione vincolata. Nella prima parte introdurremo delle condizioni che ci permettono di caratterizzare le soluzioni di un problema. Nella seconda parte descriveremo le classi più note di problemi reali di programmazione vincolata. Infine, nella terza parte, definiremo gli algoritmi esistenti per la risoluzione di tali problemi.

### 3.1 Teoremi dell'alternativa

Di seguito vengono riportati alcuni teoremi che descrivono delle proprietà riguardanti i sistemi di disequazioni lineari e che svolgono un ruolo fondamentale nella caratterizzazione i minimi locali di un problemi di programmazione matematica.

Tali risultati sono alcuni esempi di quelli che vengono detti *Teoremi dell'alternativa* in quanto evidenziano delle alternative che si incontrano nel considerare sistemi lineari.

Il primo risultato riportato è sicuramente uno dei più importanti e noti teoremi dell'alternativa (noto in letteratura come il *Teorema di Farkas*).

**Teorema 3.1.1** *Comunque scelta una matrice  $A \in R^{m \times n}$  ed un vettore  $b \in R^n$ , esattamente una delle seguenti affermazioni è vera:*

*i) esiste un vettore  $x \in R^n$  che è soluzione del seguente sistema:*

$$Ax \leq 0, \quad b^T x > 0; \quad (3.1)$$

*ii) esiste un vettore  $y \in R^m$  che è soluzione del seguente sistema:*

$$A^T y = b, \quad \text{con} \quad y \geq 0. \quad (3.2)$$

Un immediato corollario del precedente Teorema di Farkas è dato dal seguente risultato.

**Corollario 3.1.2** *Dati  $m+1$  vettori  $x_1, \dots, x_m, x_{m+1} \in R^n$ . Se per ogni vettore  $z \in R^n$  che soddisfa il seguente sistema di disequazioni*

$$x_i^T z \geq 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

*si ha che*

$$x_{m+1}^T z \geq 0,$$

*allora esistono  $m$  scalari  $\alpha_i \in R_+$ , con  $i = 1, \dots, m$ , tali che*

$$x_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i.$$

Un secondo teorema dell'alternativa è il seguente *Teorema di Gordan*.

**Teorema 3.1.3** *Comunque scelta una matrice  $A \in R^{m \times n}$ , esattamente una delle seguenti affermazioni è vera:*

*i) esiste un vettore  $x \in R^n$  che è soluzione del seguente sistema:*

$$Ax < 0; \tag{3.3}$$

*ii) esiste un vettore nonnullo  $y \in R^m$  che è soluzione del seguente sistema:*

$$A^T y = 0, \quad \text{con } y \geq 0. \tag{3.4}$$

Come ultimo teorema dell'alternativa riportiamo quello che viene denominato *Teorema di Motzkin*.

**Teorema 3.1.4** *Comunque scelte due matrici  $A \in R^{m \times n}$  e  $B \in R^{p \times n}$ , esattamente una delle seguenti affermazioni è vera:*

*i) esiste un vettore  $x \in R^n$  che è soluzione del seguente sistema:*

$$\begin{aligned} Ax &< 0 \\ Bx &= 0; \end{aligned} \tag{3.5}$$

*ii) esistono due vettori  $y \in R^m$  e  $z \in R^p$ , con  $y \neq 0$ , che sono soluzioni del seguente sistema:*

$$A^T y + B^T z = 0, \quad \text{con } y \geq 0. \tag{3.6}$$

□

## 3.2 Condizioni di Ottimalità

Nel seguito riportiamo alcuni risultati che caratterizzano i punti di minimo di un problema di minimizzazione vincolata, cioè di un problema del tipo:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathcal{F}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

dove  $f : R^n \rightarrow R$  è una funzione continua e  $\mathcal{F} \subseteq R^n$ .

### 3.2.1 Problemi di ottimizzazione vincolata generali

Per iniziare viene considerato un problema vincolato in forma generale (3.7). Una caratterizzazione generale dei minimi locali del Problema ?? può essere data utilizzando l'insieme delle direzioni di discesa della funzione obiettivo  $f$ , descritto dalla Definizione ??, ed il seguente insieme delle direzioni ammissibili.

**Definizione 3.2.1** Sia  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme non vuoto. Si definisce insieme delle direzioni ammissibili di  $\mathcal{F}$  nel punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  il seguente insieme  $F(\bar{x})$ :

$$F(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0 : \exists \delta > 0 \text{ per cui } \bar{x} + \alpha d \in \mathcal{F}, \forall \alpha \in (0, \delta)\}.$$

Utilizzando gli insiemi  $D(x)$  e  $F(x)$  è possibile dare una caratterizzazione dei punti di minimo locale di un problema di minimizzazione vincolata.

**Teorema 3.2.2** Sia  $f \in C(\mathbb{R}^n)$ . Se il punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è un punto di minimo locale (globale) del Problema (3.7) allora

$$D(x^*) \cap F(x^*) = \emptyset \quad (3.8)$$

**Prova.** Si supponga, per assurdo, che non valga la (3.8). Allora esisterebbe un vettore  $\bar{d} \in D(x^*) \cap F(x^*)$ . Per cui, ricordando la Definizione ?? e la Definizione 3.2.1, esisterebbero due costanti positive  $\delta_1$  e  $\delta_2$  tali che:

$$f(x^* + \alpha \bar{d}) < f(x^*) \quad \text{per ogni } \alpha \in (0, \delta_1) \quad (3.9)$$

$$x^* + \alpha \bar{d} \in \mathcal{F} \quad \text{per ogni } \alpha \in (0, \delta_2). \quad (3.10)$$

Quindi scegliendo lo scalare  $\alpha \in (0, \min\{\delta_1, \delta_2\})$  si avrebbe che il punto  $x^*$  non sarebbe un minimo locale della funzione  $f$  su  $\mathcal{F}$ .  $\square$

### 3.2.2 Problemi di ottimizzazione vincolata con vincoli di disuguaglianza.

In questa sezione si considera il caso particolare in cui l'insieme ammissibile è descritto da  $m$  disequazioni, cioè

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$$

dove  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Inoltre si assume che tutte le funzioni che descrivono il problema sono continuamente differenziabili.

Di conseguenza il problema di ottimizzazione che affrontiamo è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

con  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1 \dots m$ .

Poichè la funzione  $f$  è continuamente differenziabile si può definire il seguente insieme di direzioni  $D_s(\bar{x})$  nel punto  $\bar{x}$

$$D_s(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\bar{x})^T d < 0\} \quad (3.12)$$

Per quanto riguarda la relazione tra gli insiemi  $D(\bar{x})$  e  $D_s(\bar{x})$ , si ha il seguente risultato:

**Teorema 3.2.3** Sia  $f \in C^1(R^n)$ . Allora per ogni  $\bar{x} \in R^n$  si ha:

$$D_s(\bar{x}) \subseteq D(\bar{x})$$

**Prova.** Dalla continuità del gradiente si ha:

$$f(\bar{x} + \alpha d) = f(\bar{x}) + \alpha \left( \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} \right) \quad (3.13)$$

in cui

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} = 0$$

Ora se  $d \in D_s(\bar{x})$ , per valori di  $\alpha$  sufficientemente piccoli, il termine tra parentesi in (3.13) diventa negativo. Perciò, la (3.13) implica che, per valori di  $\alpha$  sufficientemente piccoli, si ha

$$f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x})$$

da cui otteniamo che  $d \in D(\bar{x})$  □

Quindi l'insieme  $D_s$  permette di caratterizzare un particolare sottoinsieme di direzioni di discesa della funzione  $f$  nel punto  $x \in R^n$ .

Sfruttando il fatto che anche tutte le funzioni  $g_i$ ,  $i = 1 \dots m$ , sono continuamente differenziabili, è possibile caratterizzare un sottoinsieme di direzioni ammissibili in un punto  $x \in \mathcal{F}$ . Infatti dato un punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  si può definire l'insieme degli indici dei vincoli attivi  $I(\bar{x})$ :

$$I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : g_i(\bar{x}) = 0\}, \quad (3.14)$$

e si può introdurre il seguente insieme di direzioni:

$$F_s(\bar{x}) = \{d \in R^n : \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0 \text{ per ogni } i \in I(\bar{x}).\} \quad (3.15)$$

Per il precedente insieme di direzioni si può stabilire il seguente risultato.

**Teorema 3.2.4** Siano  $g_i \in C^1(R^n)$ , per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Allora, per ogni  $\bar{x} \in \mathcal{F}$ , si ha:

$$F_s(\bar{x}) \subseteq F(\bar{x}).$$

**Prova.** La continuità del gradiente implica che, per ogni  $i = 1, \dots, m$ , si ha:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) = g_i(\bar{x}) + \alpha \left( \nabla g_i(\bar{x})^T d + \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} \right) \quad (3.16)$$

in cui

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} = 0. \quad (3.17)$$

Per tutti gli indici  $i \in I(\bar{x})$  la (3.16) diventa:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) = \alpha \left( \nabla g_i(\bar{x})^T d + \frac{r_1(\bar{x}, \alpha d)}{\alpha} \right) \quad (3.18)$$

Se  $d \in F_s(\bar{x})$  segue che  $\nabla g_i(x)^T d < 0$ . Da questa ultima relazione si ha che, per valori di  $\alpha$  sufficientemente piccoli, il termine tra parentesi della (3.18) assume valori strettamente negativi. Quindi, per valori di  $\alpha$  sufficientemente piccoli, la (3.18) implica che, per ogni  $i \in I(\bar{x})$  si ha:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) < 0 \quad \text{per ogni } i \in I(\bar{x}). \quad (3.19)$$

Per tutti gli indici  $i \notin I(\bar{x})$  si ha che  $g_i(\bar{x}) < 0$ . Perciò, per valori di  $\alpha$  sufficientemente piccoli, il termine a destra della (3.16) assume valori negativi. Da questo segue che, per valori di  $\alpha$  sufficientemente piccoli, si ha:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) < 0 \quad \text{per ogni } i \notin I(\bar{x}). \quad (3.20)$$

Dalla (3.19) e dalla (3.20) segue che  $d \in F(\bar{x})$ .

□

Utilizzando gli insiemi  $D_s(x)$  e  $F_s(x)$  è possibile dare una nuova caratterizzazione di un minimo locale di un problema di ottimizzazione vincolato.

**Teorema 3.2.5** *Siano  $f \in C^1(R^n)$  e  $g_i \in C^1(R^n)$ , per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Se  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  è un minimo locale di  $f$  in  $\mathcal{F}$  allora*

$$D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}) = \emptyset.$$

**Prova.** I teoremi 3.2.3 e 3.2.4 implicano che

$$D(\bar{x}) \cap F(\bar{x}) \supseteq D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}).$$

Quindi la prova del teorema segue dal Teorema 3.2.2, il quale afferma che se  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  è un minimo locale allora

$$\emptyset = D(\bar{x}) \cap F(\bar{x}) \supseteq D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}).$$

□

Il precedente teorema permette di stabilire il seguente risultato noto come *Teorema di Fritz-John*.

**Teorema 3.2.6** *Siano  $f \in C^1(R^n)$  e  $g_i \in C^1(R^n)$ , per  $i = 1, \dots, m$ . Se  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  è un minimo locale di  $f$  in  $\mathcal{F}$  allora esistono degli scalari  $\lambda_0, \lambda_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ , non tutti nulli e tali che:*

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) &= 0, \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

**Prova.** Se  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  è un minimo locale di  $f$  in  $\mathcal{F}$  allora il Teorema 3.2.5 implica che non esiste nessun vettore tale che:

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{x})^T d &< 0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d &< 0 \quad i \in I(\bar{x}).\end{aligned}$$

Applicando il Teorema di Gordan 3.1.3 segue che esistono degli scalari non tutti nulli  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $\lambda_i \geq 0$ , con  $i \in I(\bar{x})$  tali che

$$\lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

La tesi del teorema segue ponendo  $\lambda_i = 0$  per  $i \notin I(\bar{x})$  □

Se si introduce la funzione Lagrangiana  $\tilde{L} : R^n + R^{m+1} \rightarrow R$

$$\tilde{L}(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + g(x)^T \lambda \quad (3.21)$$

le condizioni del Teorema 3.2.6 si possono scrivere:

$$\begin{aligned}\nabla_x \tilde{L}(\bar{x}, \lambda_0, \lambda) &= \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x}) \lambda = 0 \\ \lambda^T g(\bar{x}) &= 0 \\ g(\bar{x}) &\leq 0 \\ \lambda_0 \geq 0, \lambda &\geq 0, \quad (\lambda_0, \lambda) \neq 0\end{aligned} \quad (3.22)$$

Attraverso le precedenti relazioni viene introdotta la seguente definizione.

**Definizione 3.2.7** *Un punto  $x^* \in R^n$  è detto punto di Fritz-John del Problema (3.11) se esistono degli scalari  $\lambda_0, \lambda_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ , (chiamati moltiplicatori di Fritz-John) tali che le condizioni (3.22) sono verificate.*

Il Teorema 3.2.2 (oppure il Teorema 3.2.5) ed il Teorema 3.2.6 descrivono due condizioni necessarie di ottimo per il Problema 3.11 di natura diversa. La condizione descritta dal Teorema 3.2.2 (oppure il Teorema 3.2.5) è molto intuitiva ma difficilmente applicabile in pratica, mentre quella introdotta dal Teorema 3.2.6 può essere difficile da interpretare dal punto di vista intuitivo ma è sicuramente più facile da utilizzare in pratica.

I punti di Fritz-John che presentano  $\lambda_0 = 0$  sono caratterizzati da relazioni in cui la funzione obiettivo non compare. Perciò difficilmente questi particolari punti di Fritz-John possono caratterizzare dei minimi locali, piuttosto sono rappresentativi di punti in cui si ha un comportamento particolare dei vincoli.

Ogni punto ammissibile in cui è nullo il gradiente di un vincolo attivo, è un punto di Fritz-John (basta assegnare un valore positivo al corrispondente moltiplicatore e porre uguale a zero tutti gli altri). In particolare ogni punto ammissibile  $\tilde{x}$  di un problema vincolato può essere reso un punto di Fritz-John di un problema equivalente a quello dato. Infatti basta aggiungere al problema di partenza in vincolo (sempre soddisfatto)  $\|x - \tilde{x}\|^2 \geq 0$ .

Per caratterizzare i punti di Fritz-John in cui  $\lambda_0 \neq 0$  viene introdotta la seguente definizione.

**Definizione 3.2.8** *Un punto  $x^* \in R^n$  è detto punto di Karush-Kuhn-Tucker (KKT) del Problema (3.11) se esistono degli scalari  $\lambda_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ , (chiamati moltiplicatori di Karush-Kuhn-Tucker) per cui sono verificate le seguenti le condizioni:*

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\lambda &= 0 \\ \lambda^T g(\bar{x}) &= 0 \\ g(\bar{x}) &\leq 0 \\ \lambda &\geq 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

È facile notare che ogni punto di Fritz-John con  $\lambda_0 \neq 0$  è un punto di Karush-Kuhn-Tucker. Infatti se  $\bar{x}$  è un punto di Fritz-John con  $\lambda_0 \neq 0$ , basta dividere la prima, la seconda e la quarta relazione della (3.22) per  $\lambda_0$  per soddisfare tutte relazioni (3.23) (ponendo  $\lambda_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$ , con  $i = 1, \dots, m$ ).

In associazione ai punti di Karush-Kuhn-Tucker si introduce la funzione Lagrangiana  $L : R^n \times R^m \rightarrow R$ :

$$L(x, \lambda) = f(x) + g(x)^T \lambda$$

Utilizzando la precedente funzione Lagrangiana  $L$  la prima delle condizioni (3.23) si può scrivere:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda) = 0.$$

Per poter garantire che le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker sono condizioni necessarie di ottimo locale si deve richiedere che l'insieme ammissibile è sufficientemente regolare. Nel seguente teorema vengono riportate alcune ipotesi di regolarità dei vincoli del problema in grado di garantire che un minimo locale vincolato è un punto di Karush-Kuhn-Tucker. In molti casi, tale ipotesi sono verificabili osservando la struttura dei vincoli del problema.

**Teorema 3.2.9** *Siano  $f \in C^1(R^n)$  e  $g_i \in C^1(R^n)$ , per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Se  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  è un punto minimo locale di  $f$  in  $\mathcal{F}$  allora è necessariamente un punto di Karush-Kuhn-Tucker se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:*

- a) (ipotesi di linearità)  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sono funzioni lineari;
- b) (ipotesi di Mangasarian-Fromowitz) non esistono  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i \in I(\bar{x})$ , non tutti nulli per cui

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \alpha_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0;$$

- c) (ipotesi di indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi) i vettori  $\nabla g_i(\bar{x})$ ,  $i \in I(\bar{x})$  sono linearmente indipendenti, sotto questa ipotesi, il vettore  $\lambda \in R^m$  che, insieme a  $\bar{x}$ , soddisfa le condizioni (3.23) è unico.

**Prova.** Ipotesi a). La dimostrazione inizia facendo vedere che l'insieme

$$F_w(\bar{x}) = \{d \in R^n : \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0 \text{ per ogni } i \in I(\bar{x})\} \quad (3.24)$$

è tale che

$$F_w(\bar{x}) \subseteq F(\bar{x}). \quad (3.25)$$

Se  $g_i(\bar{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sono lineari allora esistono  $a_i \in R^n$  e  $b_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, m$ , tali che:

$$g_i(\bar{x}) = a_i^T x + b_i, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

da cui si può scrivere:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) = a_i^T (\bar{x} + \alpha d) + b_i = g_i(\bar{x}) + \alpha a_i^T d, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m \quad (3.26)$$

Comunque scelto un vettore  $d \in F_w(\bar{x})$  si ha:

- se  $i \in I(\bar{x})$ , allora  $a_i^T d = \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0$  e  $g_i(\bar{x}) = 0$  da cui la (3.26) implica che, per ogni valore positivo dello scalare  $\alpha$ , si ha:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) \leq 0; \quad (3.27)$$

- se  $i \notin I(\bar{x})$ , allora  $g_i(\bar{x}) < 0$  da cui segue che, per valori sufficientemente piccoli di  $\alpha$  il termine di destra della (3.26) diventa non positivo e, quindi, si ha:

$$g_i(\bar{x} + \alpha d) \leq 0. \quad (3.28)$$

Dalla (3.27) e dalla (3.28) si ottiene che  $d \in F(\bar{x})$ , che prova la (3.25).

L'inclusione (3.28), i Teoremi 3.2.2 e 3.2.3 implicano che

$$\emptyset = D(\bar{x}) \cap F(\bar{x}) \supseteq D_s(\bar{x}) \cap F_w(\bar{x}).$$

Da cui si ha che il seguente sistema non ammette soluzioni

$$\begin{aligned} \nabla g_i(\bar{x})^T d &\leq 0 \\ -\nabla f(\bar{x})^T d &> 0 \end{aligned}$$

Utilizzando il Teorema di Farkas (3.1.1) si ottiene che il seguente sistema ammette soluzione:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \lambda_i = -\nabla f(\bar{x}), \quad \lambda_i \geq 0 \quad i \in I(\bar{x}). \quad (3.29)$$

Ponendo  $\lambda_i = 0$ , per  $i \notin I(\bar{x})$  si ottiene un vettore  $\lambda \in R^m$  per cui sono soddisfatte le condizioni (3.23).

Ipotesi b). Dal Teorema 3.2.6 esistono esistono  $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, i = 1 \dots m$ , non tutti nulli tali che

$$\tilde{\lambda}_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \nabla g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i = 0 \quad (3.30)$$

$$\tilde{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad (3.31)$$

$$\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_i \geq 0 \quad (3.32)$$

da cui

$$\tilde{\lambda}_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i = 0$$

Se fosse  $\tilde{\lambda}_0 = 0$  si avrebbe:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \tilde{\lambda}_i = 0,$$

Questa uguaglianza e l'ipotesi b) implicherebbero che  $\tilde{\lambda}_i = 0$  per ogni  $i \in I(\bar{x})$ . Ricordando che, per definizione,  $\tilde{\lambda}_i = 0$  per ogni  $i \notin I(\bar{x})$ , si avrebbe la contraddizione che tutti i moltiplicatori  $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_i, i = 1 \dots m$ , sarebbero nulli.

Perciò si ha che  $\tilde{\lambda}_0 > 0$ . Ponendo

$$\lambda_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_0}, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

dividendo la (3.30) per  $\tilde{\lambda}_0$  ed utilizzando le (3.31) e (3.32) si ottiene che la coppia  $(\bar{x}, \lambda)$  soddisfa il sistema (3.23).

Ipotesi c). Poichè l'ipotesi c) implica l'ipotesi b) segue che il punto di minimo locale  $\bar{x}$  è necessariamente un punto di Karush-Kuhn-Tucker.

Se ci fosse un secondo vettore  $\hat{\lambda} \in R^n, \hat{\lambda} \neq \lambda$  che soddisfacesse il sistema (3.23) si avrebbe che

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \lambda_i = 0$$

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \hat{\lambda}_i = 0$$

da cui si avrebbe:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) (\lambda_i - \hat{\lambda}_i) = 0$$

che contraddirebbe l'ipotesi di indipendenza lineare dei vettori  $\nabla g_i(\bar{x}) \quad i \in I(\bar{x})$ .  $\square$

### 3.2.3 Problemi di ottimizzazione con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza

In questa sezione si considera il caso in cui l'insieme ammissibile è descritto da  $m$  disequazioni e da  $p$  equazioni, cioè

$$\mathcal{F} = \{x \in R^n : h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0\}$$

il corrispondente problema di ottimizzazione diventa:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{3.33}$$

dove  $f : R^n \rightarrow R$ ,  $g : R^n \rightarrow R^m$ ,  $h : R^n \rightarrow R^p$  e  $f \in C^1(R^n)$ ,  $h_j \in C^1(R^n)$ ,  $j = 1 \dots p$ ,  $g_i \in C^1(R^n)$ ,  $i = 1 \dots m$ .

Caratterizzazioni matematiche dei punti di minimo di problemi che presentano sia vincoli di disuguaglianza che di uguaglianza possono essere ottenute seguendo gli stessi ragionamenti fatti nella sezione precedente e che hanno portato alle condizioni di ottimalità per problemi di ottimizzazione con soli vincoli di disuguaglianza. La presenza degli ulteriori vincoli di uguaglianza si riflette nella necessità di effettuare un'analisi un po' più complessa dal punto di vista matematico.

In un punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  si introduce un nuovo insieme di direzioni  $H(\bar{x})$  definito nelle seguenti maniere:

$$H(\bar{x}) = \{d \in R^n : \nabla h_j(\bar{x})^T d = 0, \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, p\}.$$

Utilizzando il precedente insieme di direzioni con gli insiemi  $D_s(\bar{x})$  (definizione (3.12)) e  $F_s(\bar{x})$  (definizione (3.15)) è possibile dare una prima caratterizzazione dei punti di minimo di un problema con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza. La dimostrazione di questo risultato viene omessa in quanto ripete gli stessi ragionamenti del caso di problemi con soli vincoli di disuguaglianza ma richiede un aumento abbastanza significativo del tecnicismo matematico.

**Teorema 3.2.10** *Siano  $f \in C^1(R^n)$ ,  $g_i \in C^1(R^n)$ , per ogni  $i = 1, \dots, m$ , e  $h_j \in C^1(R^n)$ , per ogni  $j = 1, \dots, p$ . Siano i vettori  $\nabla h_j(\bar{x})$ ,  $j = 1, \dots, p$ , linearmente indipendenti. Se  $\bar{x}$  è un minimo locale di  $f$  in  $F$  allora*

$$D_s(\bar{x}) \cap F_s(\bar{x}) \cap H(\bar{x}) = \emptyset$$

Analogamente al caso di problemi con soli vincoli di disuguaglianza, il teorema precedente implica che ogni punto di minimo del problema con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza è un punto di Fritz e John.

**Teorema 3.2.11** *Siano  $f \in C^1(R^n)$ ,  $g_i \in C^1(R^n)$ , per ogni  $i = 1, \dots, m$ ,  $h_j \in C^1(R^n)$ , per ogni  $j = 1, \dots, p$ . Se  $\bar{x}$  è un minimo locale di  $f$  in  $\mathcal{F}$  allora esistono degli scalari  $\lambda_0, \lambda_i, i = 1, \dots, m$  e  $\mu_j, j = 1, \dots, p$  non tutti nulli tali che:*

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \nabla g_i(\bar{x}) \lambda_i + \sum_{j=1}^p \nabla h_j(\bar{x}) \mu_j &= 0 \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

**Prova.** Se  $\nabla h_j(\bar{x}), j = 1, \dots, p$  sono linearmente dipendenti allora esistono degli scalari  $\mu_j, j = 1, \dots, p$  tali che

$$\sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0$$

In questo caso la tesi del teorema segue ponendo  $\lambda_0 = 0, \lambda_j = 0$ , per ogni  $j = 1, \dots, m$ .

Se  $\nabla h_j(\bar{x}), j = 1, \dots, p$  sono linearmente indipendenti, il Teorema 3.2.10 implica che il sistema

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T d &< 0, \\ \nabla g_i(\bar{x})^T d &< 0 \quad i = 1, \dots, m, \\ \nabla h_j(\bar{x})^T d &= 0 \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (3.35)$$

non ammette soluzione.

Dal Teorema di Motzkin 3.1.4 il precedente sistema non ammette soluzione se esistono degli scalari  $\lambda_0, \lambda_i, i \in I(\bar{x}), \mu_j, j = 1, \dots, p$  tali che

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) \lambda_i + \sum_{j=1}^p \nabla h_j(\bar{x}) \mu_j &= 0 \\ \lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i \in I(\bar{x}). \end{aligned}$$

Definendo  $\lambda_i = 0$ , per ogni  $i \notin I(\bar{x})$  segue la tesi del teorema.  $\square$

Analogamente al caso di insiemi ammissibili costituiti da sole disequazioni possiamo derivare le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker dalla condizione di ottimalità di Fritz and John richiedendo delle ipotesi aggiuntive sui vincoli. Ripetendo gli stessi argomenti che hanno permesso di dimostrare il Teorema 3.2.9 è possibile stabilire il seguente risultato.

**Teorema 3.2.12** *Siano  $f \in C^1(R^n)$ ,  $g_i \in C^1(R^n)$ , per ogni  $i = 1, \dots, m$ ,  $h_j \in C^1(R^n)$ , per ogni  $j = 1, \dots, p$ . Se  $\bar{x}$  è un minimo locale di  $f$  in  $\mathcal{F}$  allora esistono due vettori  $\lambda \in R^m, \mu \in R^p$  tali che:*

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x}) \lambda + \nabla h(\bar{x}) \mu &= 0 \\ \lambda^T g(\bar{x}) &= 0 \\ \lambda &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

- a) (ipotesi di linearità)  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  sono funzioni lineari;
- b) (ipotesi di Mangasarian-Fromowitz) i vettori  $\nabla h_j(\bar{x})$ ,  $j = 1, \dots, p$  sono linearmente indipendenti e non esistono  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i \in I(\bar{x})$ , non tutti nulli e  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , per cui:

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \alpha_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0;$$

- c) (ipotesi di indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi) i vettori  $\nabla g_i(\bar{x})$ ,  $i \in I(\bar{x})$ ,  $\nabla h_j(\bar{x})$ ,  $j = 1, \dots, p$  sono linearmente indipendenti, sotto questa ipotesi, i due vettori  $\lambda \in R^m$ ,  $\mu \in R^p$  matrix che, insieme a  $\bar{x}$ , soddisfano le condizioni (3.36) sono unici.

**Proposizione 3.2.13 (Coincidenza tra punti di Karush-Kuhn-Tucker e minimi globali)** Sia dato il seguente problema vincolato

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ a_j^T x - b_j = 0 \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (3.37)$$

e sia  $f$  una funzione (strettamente) convessa e continuamente differenziabile su  $R^n$ , siano  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , delle funzioni convesse e continuamente differenziabili su  $R^n$ . Allora un punto di Kuhn-Tucker del Problema 3.37 è un minimo globale (l'unico minimo globale) del Problema 3.37.

**Prova.** Prima di tutto si può dimostrare che l'insieme ammissibile del Problema 3.37 è un insieme convesso. Infatti comunque presi due punti  $\hat{x}$  e  $\tilde{x}$  tali che:

$$\begin{aligned} g_i(\hat{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_j^T \hat{x} - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q, \\ g_i(\tilde{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_j^T \tilde{x} - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

si ha che il punto  $\bar{x} = \alpha \hat{x} + (1 - \alpha) \tilde{x}$ , per ogni  $\alpha \in [0, 1]$ , soddisfa:

$$\begin{aligned} g_i(\bar{x}) = g_i(\alpha \hat{x} + (1 - \alpha) \tilde{x}) \leq \alpha g_i(\hat{x}) + (1 - \alpha) g_i(\tilde{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ a_j^T \bar{x} - b_j = a_j^T (\alpha \hat{x} + (1 - \alpha) \tilde{x}) - b_j = \alpha b_j + (1 - \alpha) b_j - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Sia, ora,  $x \in R^n$  un qualsiasi punto ammissibile per il Problema (3.37), cioè un punto che soddisfa

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_j^T x - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q. \quad (3.38)$$

Se si indicano con  $\lambda^*$  e  $\mu^*$  i moltiplicatori di Karush-Kuhn-Tucker (Teorema 3.2.12), si ha che  $\lambda^* \geq 0$  ed utilizzando la (3.38) si ha

$$\lambda_i^* g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.39)$$

da cui, utilizzando di nuovo la (3.38), si ha:

$$f(x) \geq f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* (a_j^T x - b_j). \quad (3.40)$$

Dalla convessità di  $f$  e di  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  e dalla linearità dei vincoli di uguaglianza si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*), \\ g_i(x) &\geq g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*), \quad i = 1, \dots, m \\ a_j^T x - b_j &= a_j^T (x - x^*), \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Utilizzando le relazioni (3.41) nella (3.40) si ottiene:

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*)) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* (a_j^T (x - x^*)). \quad (3.42)$$

che può essere riscritta mettendo in evidenza il vettore  $(x - x^*)$ :

$$f(x) \geq f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) + \left( \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* a_j \right)^T (x - x^*). \quad (3.43)$$

da cui, tenendo conto che  $\nabla h_j = a_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , si ottiene:

$$f(x) \geq f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) + \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*)^T (x - x^*). \quad (3.44)$$

Poichè,  $x^*$  è un punto di Kuhn-Tucker si ha che:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0, \quad \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.45)$$

In conclusione la (3.44) e la (3.45) implicano che, comunque scelto un punto ammissibile  $x$  per il Problema 3.37, si ha

$$f(x) \geq f(x^*).$$

Che dimostra che il punto di Kuhn-Tucker  $x^*$  è un minimo globale del Problema 3.37.

Se la funzione  $f$  fosse strettamente convessa allora la prima delle relazioni (3.41) potrebbe essere sostituita da

$$f(x) > f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*)$$

Ripetendo gli stessi passaggi fatti in precedenza, si arriverebbe alla conclusione che, comunque scelto un punto ammissibile  $x$  per il Problema 3.37, si avrebbe

$$f(x) > f(x^*),$$

dimostrando che il punto  $x^*$  è l'unico minimo globale del Problema 3.37.  $\square$

### 3.3 Problemi di ottimizzazione vincolata

In questa sezione, verranno presentate varie classi di problemi di ottimizzazione vincolata.

#### 3.3.1 Problemi di PL con costi randomici

Consideriamo il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & c^T x \\ & Gx \leq h \\ & Ax = b \end{aligned}$$

Supponiamo che il vettore dei costi sia generato in maniera randomica, con valore medio  $\bar{c}$  e covarianza

$$\mathbf{E}[(c - \bar{c})(c - \bar{c})^T] = \Sigma,$$

e assumiamo per semplicità che gli altri parametri del problema siano deterministici. Per un generico vettore  $x \in R^n$ , il costo  $c^T x$  sia una variabile randomica scalare con valor medio

$$\mathbf{E}[c^T x] = \bar{c}^T x$$

e varianza

$$\mathbf{var}(c^T x) = \mathbf{E}[c^T x - \mathbf{E}[c^T x]]^2 = x^T \Sigma x.$$

In generale, si cerca di bilanciare il valore atteso e la varianza del costo. Una possibilità è quella di minimizzare una combinazione lineare dei due termini:

$$\mathbf{E}[c^T x] + \gamma \mathbf{var}(c^T x),$$

con  $\gamma \geq 0$  *parametro di avversione al rischio*. Ricordando che  $\Sigma$  è una matrice semidefinita positiva, otteniamo il seguente problema di programmazione quadratica convessa:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & \bar{c}^T x + \gamma x^T \Sigma x \\ & Gx \leq h \\ & Ax = b. \end{aligned}$$

#### 3.3.2 Problemi di ottimizzazione del portafoglio

Consideriamo un classico problema di gestione del portafoglio in cui  $n$  titoli vengono posseduti per un certo periodo di tempo. Indichiamo con  $x_i$  la quantità di denaro investito nel titolo  $i$ -esimo durante il periodo considerato e con  $p_i$  la quotazione del titolo in quel periodo. Possiamo considerare varie tipologie di vincoli per il problema. Il vincolo più semplice è quello di non negatività delle variabili

$$x_i \geq 0.$$

Esso sta ad indicare che le vendite allo scoperto (vendita di titoli non direttamente posseduti dal venditore) non sono possibili. Un altro vincolo solitamente presente è il vincolo di budget:

$$\sum_{i=1}^n x_i = B,$$

cioè il totale investito deve essere pari a  $B$  (dove  $B$  è solitamente posto uguale a 1).

Consideriamo un modello stocastico per il cambiamento dei prezzi:  $p \in R^n$  est un vettore generato randomicamente con media  $\bar{p}$  e covarianza  $\Sigma$ . Quindi il rendimento totale avrà valore atteso pari a

$$\bar{p}^T x$$

e varianza

$$x^T \Sigma x.$$

La formulazione classica del problema di ottimizzazione del portafoglio, introdotta da Markowitz negli anni Sessanta, è data dal problema di programmazione quadratica:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & x^T \Sigma x \\ & \bar{p}^T x \geq r_m \\ & e^T x = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

L'obiettivo è quello di trovare un portafoglio che minimizzi la varianza del rendimento (il **rischio** del portafoglio) e garantisca un ritorno atteso al di sopra della soglia  $r_m$ , soddisfacendo al contempo il vincolo di budget e i vincoli di non negatività .

### 3.3.3 Problemi di proiezione su insiemi

Consideriamo un insieme chiuso e convesso  $C \subseteq R^n$  e un punto  $x_0 \in R^n$ . Si definisce proiezione di  $x_0$  su  $C$ , indicata con  $P_C(x_0)$ , la soluzione del seguente problema di minimizzazione:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & \|x - x_0\| \\ & x \in C. \end{aligned}$$

In pratica, vogliamo determinare un punto in  $C$  a distanza minima da  $x_0$ . La funzione obiettivo è coerciva su un insieme chiuso e convesso, esistono insiemi di livello non vuoti e compatti e il problema ammette soluzione. Inoltre, essendo la norma euclidea strettamente convessa, la soluzione ottima è unica.

La proiezione di  $x_0$  su un poliedro

$$Ax \leq b$$

può essere ottenuta risolvendo il seguente problema di programmazione quadratica:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \|x - x_0\|^2 \\ & Ax \leq b. \end{aligned}$$

Consideriamo il caso particolare di proiezione di un punto su un iperpiano. Possiamo facilmente vedere che in questo caso

$$P_C(x_0) = x_0 + \frac{b - a^T x_0}{a^T a} a$$

e

$$\|P_C(x_0) - x_0\| = \frac{|b - a^T x_0|}{\|a\|}.$$

### 3.3.4 Support Vector Machine per problemi di classificazione

Le Support Vector Machine (SVM) costituiscono una classe di macchine per l'apprendimento molto importante. L'idea alla base delle SVM, nel caso di problemi di classificazione, è quella di costruire un iperpiano di separazione che massimizzi il margine di separazione degli elementi appartenenti alle 2 classi. Consideriamo quindi due insiemi disgiunti  $A$  e  $B$ , e assumiamo che i due insiemi siano linearmente separabili, ovvero che esista un iperpiano

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : w^T x + \theta = 0\}$$

tale che

$$\begin{cases} w^T x^i + \theta \geq 1 & x^i \in A \\ w^T x^i + \theta \leq -1 & x^i \in B. \end{cases} \quad (3.46)$$

Dato l'iperpiano  $H$ , ovvero una coppia  $(w, \theta)$  che verifica le (3.46), si definisce margine di separazione di  $H$  la minima distanza  $\rho$  tra i punti di  $A \cup B$  e l'iperpiano  $H$ :

$$\rho(w, \theta) = \min_{x^i \in A \cup B} \left\{ \frac{|w^T x^i + \theta|}{\|w\|} \right\}.$$

L'iperpiano ottimo è l'iperpiano di separazione  $H(w^*, \theta^*)$  con margine di separazione massimo. Si può dimostrare l'esistenza e unicità dell'iperpiano ottimo. Determinare l'iperpiano ottimo corrisponde a risolvere il problema seguente:

$$\begin{aligned} \max_{w, \theta} & \rho(w, \theta) \\ & w^T x^i + \theta \geq 1 \quad x^i \in A \\ & w^T x^i + \theta \leq -1 \quad x^i \in B. \end{aligned}$$

Si può dimostrare che il problema appena descritto è equivalente a risolvere il seguente problema di programmazione quadratica convessa:

$$\begin{aligned} \min_{w, \theta} & \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ & y^i (w^T x^i + \theta) - 1 \geq 0 \quad i = 1, \dots, P \end{aligned}$$

con  $y^i = 1$  se  $x^i \in A$ ,  $y^i = -1$  se  $x^i \in B$  e  $P = |A \cup B|$ . Nel caso in cui  $A$  e  $B$  non siano linearmente separabili, il sistema (3.46) non ammette soluzione. Si introducono variabili artificiali  $\xi^i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, P$  e il sistema diventa:

$$\begin{cases} w^T x^i + \theta \geq 1 - \xi^i & x^i \in A \\ w^T x^i + \theta \leq -1 + \xi^i & x^i \in B \\ \xi^i \geq 0, & i = 1, \dots, P. \end{cases} \quad (3.47)$$

Si noti che se un vettore  $x^i$  non è classificato correttamente, la variabile  $\xi^i$  risulta maggiore di 1, quindi il termine

$$\sum_{i=1}^P \xi^i$$

è un upper bound del numero di errori di classificazione dei vettori di training. Il problema da risolvere in questo caso è il seguente:

$$\begin{aligned} \min_{w, \theta, \xi} \quad & \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^P \xi^i \\ & y^i (w^T x^i + \theta) - 1 \geq \xi^i \quad i = 1, \dots, P \\ & \xi^i \geq 0 \quad i = 1, \dots, P. \end{aligned}$$

### 3.3.5 Support Vector Machine per problemi di regressione

Nel caso di problemi di regressione, consideriamo il modello lineare

$$f(x; w, \theta) = w^T x + \theta$$

e un grado di precisione  $\epsilon$  desiderato, con cui si vuole approssimare la funzione ignota. La stima del modello viene considerata corretta se risulta:

$$|y^i - w^T x^i - \theta| \leq \epsilon.$$

Introduciamo la Loss-Function

$$|y - f(x; w, \theta)|_\epsilon = \max\{0, |y - f(x; w, \theta) - \epsilon|\}$$

e definiamo l'errore di training

$$E = \sum_{i=1}^P |y^i - f(x^i; w, \theta)|_\epsilon.$$

L'errore di training è nullo se il seguente sistema risulta soddisfatto:

$$\begin{cases} w^T x^i + \theta - y^i \leq \epsilon & i = 1, \dots, P \\ y^i - w^T x^i - \theta \leq \epsilon & i = 1, \dots, P. \end{cases} \quad (3.48)$$

Anche in questo caso si possono introdurre le variabili artificiali  $\xi^i$  e  $\hat{\xi}^i$  e considerare il problema:

$$\begin{aligned} \min_{w, \theta, \xi, \hat{\xi}} \quad & \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^P (\xi^i + \hat{\xi}^i) \\ & w^T x^i + \theta - y^i \leq \epsilon + \xi^i \quad i = 1, \dots, P \\ & y^i - w^T x^i - \theta \leq \epsilon + \hat{\xi}^i \quad i = 1, \dots, P \\ & \xi^i, \hat{\xi}^i \geq 0 \quad i = 1, \dots, P. \end{aligned}$$

### 3.3.6 Problemi di Localizzazione e Posizionamento

Consideriamo  $N$  punti in  $R^2$  oppure in  $R^3$  e una lista di coppie di punti che devono essere connessi da archi. La posizione di un sottoinsieme di punti è fissato. L'obiettivo è quello di piazzare i rimanenti punti in maniera tale che una qualche misura della lunghezza delle interconnessioni sia minimizzata e i vincoli di posizione siano soddisfatti. Il problema può essere descritto da un grafo non orientato con  $N$  nodi. Ad ogni nodo associamo il vettore  $x_i \in R^k$  con  $k = 2$ , oppure  $k = 3$ , che rappresenta la posizione del punto. La funzione obiettivo del problema considerato è

$$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}(x_i, x_j),$$

dove indichiamo con  $A$  l'insieme degli archi del grafo e  $f_{ij}$  il costo associato all'arco  $(i, j)$ . Vari vincoli possono essere aggiunti al problema:

- Appartenenza ad uno specifico insieme convesso;
- Posizione di un punto vincolata rispetto ad altri punti (e.g. limitare distanza tra coppie di punti);
- Posizione relativa (e.g. un punto a sinistra di un altro);
- Bounding box (più piccolo rettangolo contenente un certo insieme di punti).

Un classico esempio è il problema di *facility location*. In questo caso ad ogni arco associamo un costo che è funzione crescente e non lineare della lunghezza:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} h(\|x_i - x_j\|)$$

con  $h$  funzione crescente su  $R^+$  e  $w_{ij} \geq 0$ . Classico esempio è  $h(z) = z^2$  (problema di posizionamento quadratico).

### 3.3.7 Ricostruzione di Segnali Rumorosi

Dati

- un segnale reale rumoroso  $b \in R^m$ ,
- un dizionario di segnali standard  $A = [a_1 \dots a_n]$ , con  $A \in R^{m \times n}$  e  $m \ll n$ ,

l'obiettivo è quello di approssimare  $b$  con una combinazione lineare del minor numero possibile di elementi del dizionario. Il problema può essere formalmente descritto come segue

$$\min_x \|x\|_1 \\ \|Ax - b\|^2 \leq \delta,$$

con  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  e  $\delta > 0$ . Anche in questo caso, utilizzando una delle trasformazioni viste in precedenza, otteniamo:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} e^T y \\ \|Ax - b\|^2 \leq \delta, \\ -y \leq x \leq y. \end{aligned}$$

Una formulazione alternativa del problema è

$$\min_x \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|_1$$

che si può trasformare in

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \|Ax - b\|^2 + \lambda e^T y \\ -y \leq x \leq y. \end{aligned}$$

### 3.4 Algoritmi per la Programmazione Vincolata

Dal punto di vista dei metodi di soluzione, la situazione è molto diversa a seconda se l'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  sia un insieme chiuso oppure aperto.

Infatti se  $\mathcal{F}$  è un *insieme chiuso* può accadere che la soluzione del problema cada proprio sulla frontiera dell'insieme ammissibile. Normalmente, in questi casi, la presenza di un minimo è dovuto all'azione congiunta della funzione obiettivo e dei vincoli, il che rende assolutamente inadeguati i risultati e le tecniche proposte nel campo dell'ottimizzazione non vincolata.

Diversa è la situazione se  $\mathcal{F}$  è un *insieme aperto*. In questo caso, se esiste una soluzione, questa è localmente un minimo non vincolato della funzione obiettivo e, perciò, continuano ad essere valide tutte le condizioni di ottimalità ottenute nel caso non vincolato oltre al fatto che, in un intorno della soluzione, molti degli algoritmi proposti per risolvere problemi non vincolati possono essere applicati direttamente.

Sempre nel caso in cui  $\mathcal{F}$  è aperto, il problema vincolato si semplifica drasticamente se si conosce un punto  $\tilde{x}$  interno all'insieme ammissibile e se è compatto l'insieme di livello

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\tilde{x}) := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq f(\tilde{x})\}.$$

In questo caso, una soluzione del problema può essere ottenuta, a partire dal punto  $\tilde{x}$ , adattando facilmente uno dei metodi o algoritmi proposti per risolvere problemi di minimizzazione non vincolata. L'unica modifica da effettuare è quella di introdurre (per esempio nelle minimizzazioni unidimensionali) dei controlli sul fatto che i punti prodotti non escano dall'insieme ammissibile.

Quindi, in conclusione si può dire che un problema vincolato *reale* è quello in cui l'insieme ammissibile è un insieme chiuso. Invece, un problema vincolato in cui l'insieme ammissibile è un insieme aperto, in cui si conosce un punto ammissibile ed in cui la curva di livello  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\tilde{x})$  è un insieme compatto, è assolutamente *equivalente* ad un problema di minimizzazione non vincolato.

Nel seguito di questo capitolo verranno brevemente descritte alcune delle classi di metodi proposti in letteratura per risolvere un problema di ottimizzazione

vincolata. Risolvere un problema di ottimizzazione vincolata presenta un ordine di difficoltà maggiore del risolvere un problema di ottimizzazione non vincolata. Infatti, in generale, un problema vincolato può essere visto come la somma di due sottoproblemi alquanto difficili:

- quello di determinare dei punti ammissibili;
- quello di minimizzare la funzione obiettivo.

Perciò un generico algoritmo di ottimizzazione vincolata deve essere in grado di risolvere contemporaneamente i due precedenti sottoproblemi. In pratica, ad ogni iterazione, deve riuscire a bilanciare l'esigenza di far migliorare il valore della funzione obiettivo con quella di controllare la violazione dei vincoli. In particolare, trovare un punto che soddisfa determinati vincoli è equivalente ad un problema di ottimizzazione globale, cioè quello di minimizzare una funzione che pesa la violazione dei vincoli. Anche nei casi fortunati in cui si conoscano dei punti ammissibili od in cui l'insieme ammissibile abbia una struttura particolarmente semplice, la sola presenza di vincoli sulla variabili rende più difficile il problema di minimizzare la funzione obiettivo. Una conferma di questo fatto può aversi, per esempio, osservando le condizioni di ottimalità: quelle per problemi vincolati sono alquanto più complesse ed articolate di quelle per problemi non vincolati.

A causa delle difficoltà descritte, lo studio di metodi per l'ottimizzazione vincolata ha avuto uno sviluppo molto più lento e meno armonioso rispetto a quello per l'ottimizzazione non vincolata.

Se si trascurano tutti quei metodi che sfruttano una qualche particolarità presente nella struttura del problema vincolato (p.e. vincoli lineari, programmazione convessa, programmazione quadratica), si può affermare che, nel proporre degli algoritmi per risolvere problemi vincolati generali, si sono seguiti essenzialmente tre approcci:

- *trasformare* il problema originale vincolato in una *sequenza* di problemi *non vincolati* oppure in un *singolo* problema *non vincolato* (e.g. Metodi di Penalità );
- analizzare indipendentemente funzione obiettivo e vincoli del problema (e.g. metodi tipo Filtro);
- risolvere il problema originale risolvendo una *sequenza* di problemi vincolati *più semplici* (e.g. Metodo di Frank-Wolfe, Gradiente proiettato).

Nel caso in cui i problemi siano di grandi dimensioni (e con una struttura appropriata) è possibile utilizzare metodi di decomposizione.

### 3.4.1 Metodi di Penalità

Un modo per affrontare un problema di ottimizzazione vincolata è quello di cercare di trasformarlo nella *minimizzazione non vincolata* di una particolare funzione detta normalmente *funzione di penalità* o *funzione di merito*. In

generale le funzioni di penalità vengono costruite aggiungendo alla funzione obiettivo un termine che *penalizza* la violazione dei vincoli. In letteratura sono state proposte numerose funzioni di merito che si differenziano tra di loro nel modo di penalizzare la violazione dei vincoli. Tali differenze si riflettono nelle proprietà teoriche che le varie funzioni di penalità presentano.

Riportiamo due esempi di classi di funzioni di penalità proposte in letteratura:

- **funzioni di penalità sequenziali esterne:**

Queste funzioni sono del tipo:

$$P_S(x; \varepsilon) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon} \phi_S(x),$$

dove  $\varepsilon$  è un scalare positivo detto *parametro di penalità* o *coefficiente di penalità* e  $\phi_S$  è la funzione detta *termine di penalità*. Questa funzione  $\phi_S$  serve a misurare la violazione dei vincoli e soddisfa le seguenti proprietà:

- (i)  $\phi_S(x)$  è una funzione *continuamente differenziabile*;
- (ii)  $\phi_S(x) = 0$  se  $x \in \mathcal{F}$ ;
- (iii)  $\phi_S(x) > 0$  se  $x \notin \mathcal{F}$ .

Un esempio di funzione che soddisfa le precedenti proprietà è la seguente:

$$\phi_S(x) = \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}^2 + \sum_{j=1}^q h_j(x)^2.$$

Le funzioni di penalità che appartengono a questa classe hanno il pregio di essere *molto semplici*. Mentre un loro grande difetto è quello di essere *non esatte*, cioè non esiste nessun valore di  $\varepsilon$  per cui è possibile dimostrare che il problema vincolato di partenza è equivalente a minimizzare in maniera non vincolata una di queste funzioni  $P_S(x)$ .

L'unica proprietà che presentano queste funzioni è che, sotto opportune ipotesi, se  $x_\varepsilon$  è il minimo di  $P_S(x; \varepsilon)$  allora per valori di  $\varepsilon$  che tendono a zero si ha che i punti  $x_\varepsilon$  tendono ad una soluzione del problema vincolato.

Una possibile spiegazione intuitiva del comportamento delle funzioni di penalità sequenziali esterne può essere ottenuta osservando che il richiedere alla  $\phi_S(x)$  le proprietà (i)-(iii) equivale ad imporre che, in tutti i punti  $x$  che appartengono all'insieme ammissibile, sia  $\nabla \phi_S(x) = 0$  e, quindi,  $\nabla P_S(x; \varepsilon) = \nabla f(x)$ . Tuttavia, in un punto di minimo  $x^*$  del problema vincolato, si ha generalmente che  $\nabla f(x^*) \neq 0$  da cui segue che  $\nabla P_S(x^*; \varepsilon) \neq 0$ , per qualsiasi valore del parametro di penalità  $\varepsilon$ . Questo fatto implica che, qualunque sia il parametro  $\varepsilon$ , il minimo  $x^*$  del problema vincolato non può essere un minimo non vincolato di  $P_S(x; \varepsilon)$ .

Una ulteriore limitazione di queste funzioni di merito è dovuta al fatto che non si può stabilire nessuna relazione tra i suoi punti stazionari ed il problema vincolato di partenza. Questo fatto costituisce un grosso problema dal punto di vista computazionale in quanto gli algoritmi di minimizzazione non vincolata permettono di determinare solamente dei punti stazionari della funzione di penalità.

• **funzioni di penalità esatte non differenziabili:**

Queste funzioni di merito hanno una struttura del tipo:

$$P_N(x; \varepsilon) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon} \phi_N(x),$$

dove, in questo caso, la funzione  $\phi_N$  ha le seguenti caratteristiche:

- (i)  $\phi_N(x)$  non è una funzione continuamente differenziabile;
- (ii)  $\phi_N(x) = 0$  se  $x \in \mathcal{F}$ ;
- (iii)  $\phi_N(x) > 0$  se  $x \notin \mathcal{F}$ .

In letteratura sono state proposte numerose funzioni  $\phi_N(x)$  che soddisfano i precedenti punti (i)-(iii), una delle più note è la seguente:

$$\phi_N(x) = \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} + \sum_{j=1}^q |h_j(x)|.$$

Il fatto che in questa classe di funzioni di merito si rilassi la richiesta che il termine di penalità  $\phi_N(x)$  sia continuamente differenziabile permette di superare le limitazioni delle funzioni di penalità sequenziali. Infatti le funzioni di penalità non differenziabili sono *esatte*, in quanto, sotto opportune ipotesi, è possibile dimostrare che, per valori sufficientemente piccoli del parametro di penalità  $\varepsilon$ , ogni minimo globale (locale) del problema vincolato è un minimo globale (locale) non vincolato di  $P_N(x; \varepsilon)$  e viceversa. Inoltre, una relazione analoga vale anche tra i punti di Kuhn-Tucker del problema originale ed i punti critici della funzione non differenziabile  $P_N(x; \varepsilon)$ .

Naturalmente la limitazione principale nell'utilizzazione di questa classe di funzioni di penalità risiede nella loro non differenziabilità che le rende alquanto *difficili da minimizzare*.

Altre classi di funzioni di penalità sono: funzioni Lagrangiane aumentate; funzioni di penalità esatte continuamente differenziabili; funzioni Lagrangiane aumentate esatte.

### 3.4.2 Metodi di Tipo Filtro

Tali metodi sono basati su meccanismi provenienti dalla programmazione multi-obiettivo. In questo caso consideriamo una misura della violazione simile a quella vista per il caso penalità esatte:

$$h(x) = \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} + \sum_{j=1}^q |h_j(x)|,$$

e analizziamo due diversi problemi:

$$\min f(x) \quad \text{e} \quad \min h(x).$$

Diamo alcune definizioni che saranno utili nel prosieguo della sezione:

**Definizione 3.4.1** Una coppia  $(f^p, h^p) = (f(x^p), h(x^p))$  domina un'altra coppia  $(f^l, h^l)$  se

$$f^p \leq f^l$$

and

$$h^p \leq h^l.$$

**Definizione 3.4.2** Un filtro è una lista di coppie  $(f^l, h^l)$  non dominate (nessuna coppia domina un'altra contenuta nel filtro).

**Definizione 3.4.3**

Un iterata  $x^k$  è accettabile per il filtro, se  $(f^k, h^k)$  non è dominata da alcuna coppia del filtro.

In pratica, il metodo, ad una generica iterazione  $k$  genera una direzione di ricerca  $d^k$  e un punto di prova  $x^p = x^k + \alpha d^k$  all'interno di una ricerca di linea. Se  $x^p$  è accettabile per il filtro, allora  $x^{k+1} = x^p$ , altrimenti si riduce il passo  $\alpha$ . Nel caso in cui, a seguito della riduzione, il passo fosse minore di una certa soglia  $\bar{\alpha}$ , si tenta di risolvere in maniera approssimata il problema

$$\min h(x),$$

con l'obiettivo di ridurre la violazione dei vincoli ed ottenere, nelle successive ricerche di linea, dei punti compatibili con il filtro.

### 3.4.3 Metodo di Frank-Wolfe

Il risultato riportato di seguito ci permette di caratterizzare le direzioni ammissibili per problemi con insieme ammissibile convesso.

**Proposizione 3.4.4** Sia  $C \subseteq R^n$  convesso e  $\bar{x} \in C$ . Se  $C \neq \{\bar{x}\}$ , per ogni  $x \in C$  con  $x \neq \bar{x}$ , la direzione

$$d = x - \bar{x}$$

è ammissibile per  $C$  in  $\bar{x}$ .

**Prova.** Esercizio. □

A questo punto possiamo definire nella seguente maniera l'insieme di direzioni ammissibili:

$$F(\bar{x}) = \{d \in R^n, d = x - \bar{x}, x \in C, x \neq \bar{x}\}.$$

Possiamo ora enunciare condizione necessarie di minimo locale per il caso di problemi vincolati con insieme ammissibile convesso.

**Proposizione 3.4.5** Sia  $x^* \in C$  punto di minimo locale del problema

$$\min_{x \in C} f(x)$$

con  $C \subseteq R^n$  convesso e  $f \in C^1(R^n)$ . Allora

- $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in C$ ;
- inoltre se  $f \in C^2(R^n)$  deve essere:

$$(x - x^*)^T \nabla^2 f(x^*)(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in C, \text{ s.t. } \nabla f(x^*)^T(x - x^*) = 0.$$

**Prova.** Esercizio. □

Nel caso convesso la (i) diventa condizione necessaria e sufficiente di ottimalità globale.

**Proposizione 3.4.6** *Sia  $C \subseteq R^n$  convesso e  $f \in C^1(R^n)$  funzione convessa. Il punto  $x^* \in C$  è minimo globale del problema*

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in C, \end{aligned}$$

se e solo se

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

A questo punto possiamo descrivere un algoritmo che ad ogni passo calcola una direzione ammissibile di discesa in  $x_k$  risolvendo il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min \nabla f(x_k)^T(x - x_k) \\ x \in C. \end{aligned}$$

Se assumiamo  $C$  compatto, il problema ammette sempre una soluzione  $\hat{x}_k \in C$ .  
Se

$$\nabla f(x_k)^T(\hat{x}_k - x_k) = 0$$

allora abbiamo

$$0 = \nabla f(x_k)^T(\hat{x}_k - x_k) \leq \nabla f(x_k)^T(x - x_k) \quad \forall x \in C$$

e  $x_k$  è un punto critico. Se

$$\nabla f(x_k)^T(\hat{x}_k - x_k) < 0$$

possiamo definire una nuova direzione ammissibile di discesa in  $x_k$ :

$$d_k = \hat{x}_k - x_k$$

e determinare un nuovo punto

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

con  $\alpha_k$  determinato mediante un algoritmo di tipo Armijo. Riportiamo di seguito lo schema dell'algoritmo di Frank-Wolfe:

### Algoritmo di Frank-Wolfe

**Step 1.** Fissa il punto iniziale  $x_0 \in C$ .

Per  $k=0,1,\dots$

**Step 2.** Calcola  $\hat{x}_k \in C$  soluzione di

$$\min_{x \in C} \nabla f(x_k)^T (x - x_k)$$

Se  $\nabla f(x_k)^T (\hat{x}_k - x_k) = 0$  allora STOP.

**Step 3.** Calcola  $\alpha_k > 0$  lungo  $d_k = \hat{x}_k - x_k$  con regola opportuna.

**Step 4.** Poni  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ .

Riportiamo le regole più utilizzate per la scelta del passo  $\alpha_k$ :

- **Metodi di ricerca esatta:**  $\alpha_k$  è il valore ottenuto minimizzando lungo la direzione  $d_k$ ,

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in [0,1]} \phi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k) .$$

In generale non è facile determinare il passo  $\alpha_k$  che minimizza la funzione  $\phi(\alpha)$ , ad eccezione di alcuni casi particolari.

- **Regola di Armijo:** In questo caso, fissati gli scalari  $\delta$  e  $\gamma$ , con  $\delta \in (0,1)$  e  $\gamma \in (0,1/2)$ , e la stima iniziale del passo  $\Delta_k = 1$ , poniamo

$$\alpha_k = \delta^{m_k} \Delta_k,$$

dove  $m_k$  è il primo intero non negativo  $m$  tale che

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + \gamma \alpha \nabla f(x_k)^T d_k . \quad (3.49)$$

In pratica, i passi  $\delta^m \Delta_k$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , sono provati in successione finché la disuguaglianza precedente è soddisfatta per  $m = m_k$ .

Possiamo facilmente verificare che, dal punto di vista geometrico, la condizione (3.49) equivale a richiedere che il valore

$$\phi(\alpha_k) = f(x_k + \alpha_k d_k)$$

sia al di sotto della retta passante per  $(0, \phi(0))$  e avente pendenza  $\gamma \dot{\phi}(0)$ , ovvero:

$$\phi(\alpha_k) \leq y(\alpha_k) = \phi(0) + \gamma \dot{\phi}(0) \alpha_k .$$

La disuguaglianza (3.49) impone quindi una condizione di *sufficiente decremento* della funzione obiettivo (vedi Figura 3.1).

- **Passo Costante:** Un passo costante  $s \in (0, 1]$  viene fissato e

$$\alpha_k = s, \quad k = 0, 1, \dots$$

Questa regola viene solitamente adottata quando la funzione obiettivo ha particolari proprietà .

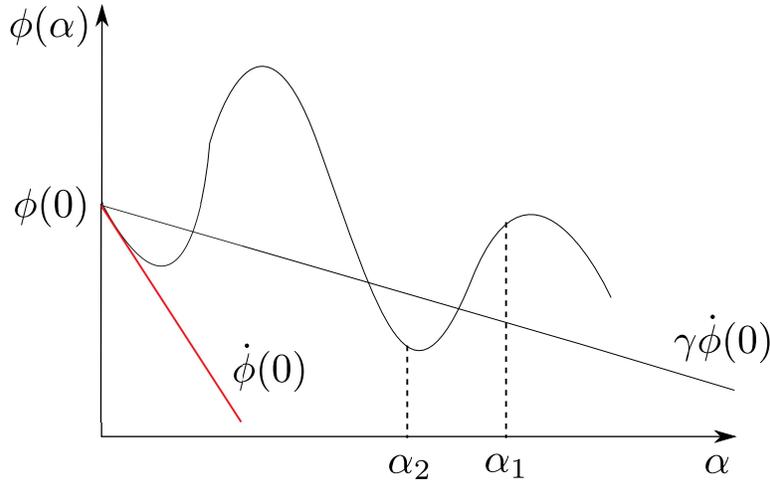


Figura 3.1: Esempio Ricerca di Armijo.

Riportiamo ora il risultato principale relativo alla convergenza del metodo di Frank-Wolfe:

**Proposizione 3.4.7** *Consideriamo il problema*

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in C \end{aligned}$$

con  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  compatto e convesso. Assumiamo che la sequenza  $\{x_k\}$  sia generata dall' algoritmo FW con ricerca unidimensionale che soddisfa le seguenti condizioni:

- c1)  $x_{k+1} \in C$ ;
- c2)  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ ;
- c3)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k)^T d_k = 0$ .

Allora

- o esiste un indice  $T \geq 0$  tale che  $x_T$  è punto critico;
- oppure  $\{x_k\}$  è una sequenza infinita e ogni punto di accumulazione è un punto critico.

**Prova.** Se l'algoritmo genera una successione  $\{x_k\}$  infinita, dalla compattezza di  $C$  esiste un punto di accumulazione  $\bar{x} \in C$ . Dalla (c3) abbiamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k)^T d_k = 0. \quad (3.50)$$

Inoltre,

$$\|d_k\| = \|\hat{x}_k - x_k\| \leq \|\hat{x}_k\| + \|x_k\|$$

dunque  $d_k$  limitata al variare di  $k$ . Possiamo per tal motivo definire sottosuccessioni  $\{x_k\}_K$  e  $\{d_k\}_K$  rispettivamente convergenti a  $\bar{x}$  e  $\bar{d}$ . Abbiamo quindi

$$\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = 0.$$

Dalla definizione di  $d_k$

$$\nabla f(x_k)^T d_k \leq \nabla f(x_k)^T (x - x_k) \quad \forall x \in C.$$

Considerando il limite per  $x \in C$  fissato, possiamo scrivere

$$0 = \nabla f(\bar{x})^T \bar{d} \leq \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x \in C.$$

Da cui  $\bar{x}$  punto critico di  $f$ . □

Possiamo ora analizzare il caso di minimizzazione di funzione concava su insieme  $C$  politopo. L'algoritmo di Frank-Wolfe in questo caso si semplifica in quanto si può utilizzare ad ogni iterazione un passo unitario lungo la direzione di discesa. Di seguito dimostriamo che, nel caso considerato, l'algoritmo di Frank-Wolfe con passo unitario fornisce un punto stazionario in un numero finito di passi.

**Proposizione 3.4.8** *Consideriamo il problema*

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & x \in C \end{aligned}$$

con  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  funzione concava e  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  politopo. L'algoritmo di Frank-Wolfe con passo unitario determina un punto stazionario del problema in un numero finito di passi.

**Prova.** Ad una generica iterazione  $k$  due diversi casi si possono verificare:

1.  $\nabla f(x_k)^T (\hat{x}_k - x_k) = 0$  : in questo caso  $\hat{x}_k \in C$  è un punto stazionario;
2.  $\nabla f(x_k)^T (\hat{x}_k - x_k) < 0$ : in questo caso per la concavità di  $f$  abbiamo:

$$f(\hat{x}_k) \leq f(x_k) + \nabla f(x_k)^T (\hat{x}_k - x_k) < f(x_k). \quad (3.51)$$

Siccome ad ogni iterazione dell'algoritmo viene risolto un problema di PL, il punto  $\hat{x}_k$  è un vertice del poliedro. Inoltre, l'utilizzo del passo unitario  $\alpha_k = 1$ , da cui otteniamo  $x_{k+1} = \hat{x}_k$ , assieme alla (3.51) garantisce che non è possibile visitare due volte lo stesso vertice.

Ricordando che una funzione concava su un politopo  $C$  ammette un minimo

globale su un vertice e che  $C$  ha un numero finito di vertici, si ha che in un numero finito di passi l'algoritmo determina un vertice  $x^*$  t.c.

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

□

Tale algoritmo è efficiente anche per problemi a grandi dimensioni, in quanto permette di determinare un punto stazionario del problema risolvendo un numero finito di problemi di PL.

### 3.4.4 Metodo del Gradiente Proiettato

Introduciamo formalmente il concetto di proiezione su un insieme convesso:

**Definizione 3.4.9** *Consideriamo:*

- $\|\cdot\|$  norma euclidea;
- $C \subset \mathbb{R}^n$  insieme convesso chiuso;
- $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  punto assegnato.

Definiamo proiezione di  $\bar{x}$  su  $C$  la soluzione  $\rho(\bar{x})$  del problema:

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \in C}} \frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|^2$$

Riportiamo ora alcune proprietà della proiezione nel seguente risultato:

**Proposizione 3.4.10** *Consideriamo:*

- $\|\cdot\|$  norma euclidea;
- $C \subset \mathbb{R}^n$  insieme convesso chiuso;
- $x \in \mathbb{R}^n$  punto assegnato.

Allora

- $y^* \in C$  è proiezione di  $x$  su  $C$ , ovvero  $y^* = \rho(x)$ , se e solo se

$$(x - y^*)^T(y - y^*) \leq 0 \quad \forall y \in C;$$

- La proiezione è continua e non espansiva :

$$\|\rho(x) - \rho(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Prova.** Esercizio(Suggerimento: utilizzare le condizioni necessarie per il caso insieme ammissibile convesso). □

Possiamo ora fornire una caratterizzazione dei punti di minimo attraverso l'utilizzo della proiezione:

**Proposizione 3.4.11** Sia  $x^* \in C$  punto di minimo locale del problema

$$\min_{x \in C} f(x)$$

con  $C \subseteq R^n$  convesso e  $f \in C^1(R^n)$ . Allora

$$x^* = p[x^* - s\nabla f(x^*)],$$

con  $s \geq 0$ .

**Prova.** Esercizio (Suggerimento: utilizzare le condizioni necessarie per il caso insieme ammissibile convesso).  $\square$

A questo punto possiamo descrivere un nuovo algoritmo che ad ogni passo calcola una direzione in  $x_k$  utilizzando un punto:

$$\hat{x}_k = \rho(x_k - s_k \nabla f(x_k));$$

possiamo definire una nuova direzione ammissibile in  $x_k$ :

$$d_k = \hat{x}_k - x_k$$

e generare un nuovo punto

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

con  $\alpha_k \in (0, 1]$  ottenuto mediante una ricerca unidimensionale opportuna (e.g. metodo di Armijo) e  $s_k = s > 0$ . Riportiamo di seguito lo schema dell'algoritmo del Gradiente Proiettato:

#### Algoritmo Gradiente Proiettato

**Step 1.** Fissa il punto iniziale  $x_0 \in C$  e lo scalare  $s > 0$ .

Per  $k=0,1,\dots$

**Step 2.** Calcola  $\hat{x}_k = \rho(x_k - s\nabla f(x_k))$

Se  $\hat{x}_k = x_k$  allora STOP.

**Step 3.** Calcola  $\alpha_k > 0$  lungo  $d_k = \hat{x}_k - x_k$  con regola opportuna.

**Step 4.** Poni  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ .

Riportiamo ora il risultato principale relativo alla convergenza del metodo Gradiente Proiettato:

**Proposizione 3.4.12** *Consideriamo il problema*

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in C \end{aligned}$$

con  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso. Assumiamo che la sequenza  $\{x_k\}$  sia generata dall'algoritmo Gradiente Proiettato con ricerca unidimensionale che soddisfa le seguenti condizioni:

- c1)  $x_{k+1} \in C$ ;
- c2)  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ ;
- c3)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k)^T d_k = 0$ .

Allora

- o esiste un indice  $T \geq 0$  tale che  $x_T$  è punto critico;
- oppure  $\{x_k\}$  è una sequenza infinita e ogni punto di accumulazione è un punto critico.

**Prova.** Dobbiamo prima dimostrare che la direzione generata ad ogni passo dell'algoritmo è di discesa per  $f$  in  $C$ . dalle caratteristiche della proiezione abbiamo:

$$(x^k - s\nabla f(x_k) - \hat{x}_k)^T (x - \hat{x}_k) \leq 0, \quad \forall x \in C.$$

Ponendo  $x = x_k$ , abbiamo

$$(x_k - s\nabla f(x_k) - \hat{x}_k)^T (x_k - \hat{x}_k) \leq 0$$

che possiamo riscrivere:

$$\nabla f(x_k)^T (\hat{x}_k - x_k) \leq -\frac{1}{s} \|x_k - \hat{x}_k\|^2 \quad (3.52)$$

quindi  $d_k$  è di discesa se  $\|x_k - \hat{x}_k\| \neq 0$ . Se l'algoritmo genera una successione  $\{x_k\}$  infinita, dalla compattezza di  $C$  esiste un punto di accumulazione  $\bar{x} \in C$ . Possiamo definire sottosuccessione  $\{x_k\}_K$  convergente a  $\bar{x}$ . Dalla (c3) e da (3.52) possiamo dunque scrivere:

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \|\rho[x_k - s\nabla f(x_k)] - x_k\| = 0.$$

Dalla continuità della proiezione,

$$\rho[\bar{x} - s\nabla f(\bar{x})] = \bar{x}.$$

Da cui  $\bar{x}$  punto critico di  $f$ . □

### 3.4.5 Metodi di Decomposizione

La principale motivazione per l'impiego di tecniche di decomposizione nell'ottimizzazione vincolata è che, quando alcune variabili sono fissate, si ottengono sottoproblemi di dimensioni minori e spesso di struttura particolare, tale da consentire l'uso di tecniche specializzate. Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in X \end{aligned}$$

con  $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$  e  $X_i \subseteq R^{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  chiusi e convessi, e  $n_1 + \cdots + n_m = n$ . Un punto generico  $x$  viene partizionato nella maniera seguente:

$$x = (x_1, \dots, x_m).$$

con  $x_i \in R^{n_i}$ . Dunque  $x \in X$  è equivalente a  $x_i \in X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . I metodi di decomposizione esistenti sono di due diverse tipologie:

- sequenziali: a partire da un punto  $x^k$ , effettuati  $m$  passi in sequenza in cui ogni singolo blocco  $x_i$  viene aggiornato;
- paralleli: a partire da un punto  $x^k$  aggiornati contemporaneamente e indipendentemente per  $i = 1, \dots, m$  i singoli blocchi ottenendo soluzioni  $w(k, i)$ . Il punto  $x^{k+1}$  viene poi costruito a partire da tali punti.

Riportiamo di seguito lo schema per il caso sequenziale (schema Gauss-Seidel):

#### Algoritmo Sequenziale (Gauss-Seidel)

**DATI.** Fissa il punto iniziale  $x^0 \in X$ .

Per  $k = 0, 1, \dots$

Per  $i = 1, \dots, m$  Calcola

$$x_i^{k+1} = \arg \min_{\xi \in X_i} f(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, \xi, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k)$$

A questo punto possiamo analizzare le proprietà di convergenza del metodo appena descritto:

**Proposizione 3.4.13** *Sia  $f(x) \in C^1(R^n)$ . e supponiamo che per ogni  $i = 1, \dots, m$  e per ogni  $x \in X$  la soluzione del problema*

$$\min_{\xi \in X_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_m)$$

*esiste ed è unica. Sia  $\{x^k\}$  generata dal metodo GS, allora ogni punto di accumulazione della sequenza è punto critico.*

Riportiamo infine lo schema per il caso sequenziale (schema Jacobi):

**Algoritmo Parallelo (Jacobi)**

**DATI.** Fissa il punto iniziale  $x^0 \in X$ .

Per  $k = 0, 1, \dots$

Per  $i = 1, \dots, m$

Calcola

$$u_i = \arg \min_{\xi \in X_i} f(x_1^k, \dots, x_{i-1}^k, \xi, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k)$$

Poni

$$w(k, i) = (x_1^k, \dots, u_i, \dots, x_m^k)$$

Fine Per

Determina  $i^*$  t.c.  $f(w(k, i^*)) = \min_{1 \leq i \leq m} \{f(w(k, i))\}$

Poni  $x^{k+1} = w(k, i^*)$

Fine per