RICERCA OPERATIVA - LM in Matematica
A.A. 2019/20

Esercizi su dualità e analisi della sensitività - con risultati

Prof.ssa Carla De Francesco

[**1**] Si consideri il seguente programma lineare:

$$max\ x_1 + x_2$$

$$\text{soggetto a} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 3 \\ x_1, \ldots, x_4 \geq 0 \end{array}$$

e la sua soluzione ottima di base $\bar{x} = (3, 3, 0, 0)^t$.

(a) Si individui la base B associata alla soluzione $\bar{x}$, si scriva la matrice A_B, si calcoli la sua inversa A_B^{-1}.

(b) Si modifichino i coefficienti delle variabili x_1 e x_2 nella funzione obiettivo: in particolare si ponga $c_1 = 1 + \alpha$ e $c_2 = 1 + \alpha$. Determinare i valori del parametro reale α che mantengono invariata la soluzione ottima.

(c) Si ritorni alla funzione obiettivo originaria e invece si modifichi il termine noto del secondo vincolo, ponendo $b_2 = 3 + \beta$. Determinare i valori del parametro reale β che mantengono invariata la base ottima.

[La base è formata dalle prime due colonne della matrice A, al punto (b) si ricava la condizione $\alpha \geq -1$, al punto (c) $\beta \geq -9$.]

[2] Si supponga di aver risolto il seguente programma lineare:

$$\begin{array}{rl} & max \; -x_1 + x_2 - 2x_3 \\[1ex] \text{soggetto a} & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{array}$$

e di aver ottenuto il seguente tableau ottimo:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 10/3 & 0 & 0 & 5/3 & 13/3 \\ \hline 0 & 5/3 & 1 & 0 & 1/3 & 17/3 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \end{array}$$

(a) Si scrivano la base ottima B, la soluzione ottima, la matrice A_B e la matrice A_B^{-1} associate al tableau ottimo.

(b) Si scriva il duale del problema dato.

(c) Si ricavi una soluzione ottima del duale.

(d) Si modifichi il termine noto del primo vincolo, ponendolo uguale a $5+\beta$. Per quali valori del parametro reale β la base ottima rimane tale? In corrispondenza di tali valori, come varia il valore ottimo del problema in funzione di β?

(e) Si modifichi invece il coefficiente della variabile x_2 nella funzione oggetto, ponendolo uguale a $1 + \alpha$. Per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima non cambia?

[La matrice A_B è formata dalla seconda e terza colonna della matrice A, una soluzione ottima del duale è il vettore $\left(c_B^t A_B^{-1}\right)^t = (4/3,\ -1/3)^t$. Al punto (d) risulta $\beta \in [-17/2,\ 2]$ e il valore ottimo del problema modificato è uguale a $13/3 + 4/3\ \beta$. Al punto (e) si ottiene $\alpha \geq -2$.]

[3] Si consideri il seguente programma lineare

$$max\, x_1 - 2\, x_2 - x_3$$

$$\text{soggetto a} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2\, x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{array}$$

(a) E' noto che l'insieme di indici $B = \{1, 4\}$ fornisce una base ottima. Si calcoli la relativa soluzione ottima di base.

(b) Dire per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima resta invariata se il vettore dei coefficienti della funzione oggetto viene sostituito con $c = (1, -2, -1, \alpha)^t$.

(c) Dire per quali valori del parametro reale β la base ottima resta invariata se il vettore dei termini noti viene sostituito con $b = (9 + \beta, 6 + \beta)^t$. Dire qual è la nuova soluzione ottima se $b = (15, 12)^t$.

(d) Dire per quali valori del parametro reale γ la base ottima resta tale se, contemporaneamente, il vettore dei coefficienti della funzione oggetto viene sostituito con $c = (1, -2, -1 - \gamma, 0)^t$ e il vettore dei termini noti viene sostituito con $b = (9 + \gamma, 6 - \gamma)^t$.

[(a) La soluzione ottima associata alla base B è $(1, 0, 0, 4)^t$.
(b) La soluzione ottima non cambia se $\alpha \in [-1, 2]$.
(c) La base ottima resta invariata se $\beta \geq -3$. Il caso $b = (15, 12)^t$ corrisponde a $\beta = 6 \geq -3$, quindi la base ottima è ancora B e la nuova soluzione ottima è $(3, 0, 0, 6)^t$.
(d) La base B resta ottima nel problema modificato se valgono le due seguenti condizioni: la sba associata è ammissibile (vero per $\gamma \in [-4, 1]$) e i coefficienti di costo ridotto soddisfano le condizioni di ottimalità (vero per $\gamma \geq -8/3$). Complessivamente la base B è ottima anche nel problema modificato se $\gamma \in [-8/3, 1]$.]

[4] Si consideri il seguente programma lineare P:

$$max\, x_1 + x_2$$

$$\text{soggetto a} \quad \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

(a) Disegnare la regione ammissibile di P e ricavare graficamente la sua soluzione ottima.

(b) Individuare la soluzione ottima e la base ottima del programma trasformato in forma standard.

(c) Modificare il termine noto del primo vincolo in $15 + \beta$ e quello del secondo vincolo in $24 + \beta$. Come cambia la regione ammissibile del problema originario P al variare del parametro reale β? Per quali valori di β la regione ammissibile è un triangolo? E per quali valori di β è vuota? Stabilire per quali valori di β la base individuata al punto precedente resta ottima. Stabilire anche come varia il valore ottimo del problema in funzione di β.

(d) Tornare ai termini noti originari e modificare invece la funzione oggetto, ponendola uguale a $c_1x_1 + x_2$. Determinare l'intervallo di valori entro cui può variare il parametro reale c_1 affinché la soluzione determinata al punto (b) rimanga ottima.

[(a) La regione ammissibile è un quadrilatero e la soluzione ottima è il punto $(4, 3)^t$.
(b) Per trasformare il problema in forma standard bisogna inserire due variabili di scarto. La soluzione ottima del punto precedente si estende in modo abbastanza ovvio al problema in forma standard: basta calcolare il valore delle variabili di scarto in base alla loro definizione. La soluzione ottima è quindi il vettore $(4, 3, 0, 0)^t$ e le variabili in base sono x_1 e x_2.
(c) Al variare di β il coefficiente angolare delle rette che individuano la regione ammissibile non cambia, ma cambia solo il loro termine noto. Aumentando β per valori positivi, la regione ammissibile non cambia forma, ma si dilata; invece diminuendo β a partire da zero la regione ammissibile si contrae. Vediamo nei dettagli i vari casi.
- Se $\beta \geq -12$, la regione ammissibile è un quadrilatero con i seguenti vertici: l'origine, $(5 + \beta/3,\ 0)^t$, $(4 + \beta/3,\ 3)^t$ e $(0,\ 6 + \beta/4)^t$. La soluzione ottima è il punto $(4 + \beta/3,\ 3)^t$, che corrisponde alla base ottima del problema iniziale.
- Se $\beta = -12$, la regione ammissibile diventa un triangolo con i seguenti vertici: l'origine, $(1,\ 0)^t$ e $(0,\ 3)^t$. Il vertice $(0,\ 3)^t$ è soluzione ottima e corrisponde alla base ottima del problema iniziale, che però in questo caso è degenere.

- Se $\beta \in (-15, -12)$, la regione ammissibile è un triangolo, i vertici sono: l'origine, $(5+\beta/3)^t$ e $(0, 15+\beta)^t$. Il secondo vincolo è ridondante. Il vertice $(0, 15+\beta)^t$ è soluzione ottima e corrisponde alla base formata dalla seconda e quarta colonna della matrice A.
- Se $\beta = -15$, abbiamo una situazione degenere del caso precedente e la regione ammissibile contiene solo l'origine.
- Se $\beta < -15$ il problema è inammissibile.

Complessivamente quindi la base individuata al punto precedente rimane ottima se $\beta \geq -12$, la soluzione ottima associata è il punto $(4 + \beta/3,\, 3)^t$ e il valore ottimo è uguale a $7 + \beta/3$.

(d) La soluzione determinata al punto (b) rimane ottima se $c_1 \in [3/4,\, 3]$.]

[5] Dato il seguente programma lineare P:

$$\begin{array}{rl} max & -x_1 - 2\,x_2 + x_3 - 4\,x_4 \\[1ex] \text{soggetto a} & 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 - \;x_4 = 6 \\ & -x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1, \ldots, x_4 \geq 0, \end{array}$$

si consideri la base $B = \{1, 3\}$.

(a) Calcolare la soluzione di base associata alla base B, verificare che è ottima e calcolare il valore ottimo del programma P.

(b) Scrivere il programma D duale di P e trovare una sua soluzione ottima e il suo valore ottimo.

(c) Supponiamo di modificare i coefficienti della funzione obiettivo trasformandoli nel vettore $(-1+\alpha, -2+\alpha, 1+\alpha, -4+\alpha)^t$, cioè aggiungiamo α ad ogni componente. Per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima di P resta ottima nel problema modificato?

(d) Supponiamo adesso di fare una diversa modifica dei coefficienti della funzione obiettivo trasformandoli nel vettore $(-\alpha, -2\alpha, \alpha, -4\alpha)^t$, cioè moltiplichiamo per α ogni componente. Per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima di P resta ottima nel problema modificato?

(e) Ripristiniamo i valori della originaria funzione obiettivo, e invece modifichiamo il termine noto del secondo vincolo, ponendolo uguale a $2 + \beta$. Per quali valori del parametro β la base ottima per il programma iniziale resta ancora ottima? In corrispondenza di tali valori, come cambiano le coordinate della soluzione ottima? Qual è l'espressione che lega il valore ottimo del problema modificato al parametro β?

[(a) La sba ottima associata alla base B è $(2, 0, 2, 0)^t$ e il valore ottimo è uguale a zero.
(b) Una soluzione ottima per il duale è $(-1/5,\ 3/5)^t$ con valore ottimo uguale a zero.
(c) La soluzione ottima di P resta ottima nel problema modificato se $\alpha \in [-2,\ 24/7]$.
(d) E' noto che la soluzione ottima di un problema di ottimizzazione non viene modificata se si moltiplica la funzione oggetto per una costante positiva. Comunque i coefficienti di costo ridotto sono uguali a $(-2\alpha,\ -24/5\,\alpha)^t$ e soddisfano la condizione di ottimalità se $\alpha \geq 0$.
(e) La base B è ottima anche per il problema modificato se $\beta \in [-5,\ 10]$, le coordinate della soluzione ottima sono $(2 - 1/5\,\beta,\ 0,\ 2 + 2/5\,\beta,\ 0)^t$, il valore ottimo è uguale a $3/5\,\beta$.
]