RICERCA OPERATIVA - LM in Matematica
A.A. 2019/20

Esercizi su formulazione di modelli di PL - Soluzioni

Prof.ssa Carla De Francesco

Nota Vengono fornite delle *possibili* soluzioni. Potrebbero esserci soluzioni alternative altrettanto valide.

Esercizio 1

Definiamo le variabili:
S = numero di porzioni di snack,
G = numero di porzioni di gelato
che il signor Rossi si può concedere.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 85 \cdot 37\,S + 95 \cdot 65\,G \\
\text{s.a} \quad & 37\,S + 65\,G \geq 120 \\
& 120\,S + 160\,G \leq 450 \\
& 5\,S + 10\,G \leq 25 \\
& S,\, G \geq 0.
\end{aligned}
$$

I vincoli esprimono rispettivamente le condizioni sul peso minimo della merenda, sulla quantità massima di calorie e sulla quantità massima di grasso. La funzione oggetto esprime l'indice di gradimento totale.

Esercizio 2

Definiamo ($i = 1, \ldots, 6$):
P_i = numero di palloni prodotti durante il mese i,
M_i = numero di palloni messi in magazzino alla fine del mese i dopo le vendite,
$M_0 = 5000$ = scorta iniziale in magazzino,
$D = (10000, 15000, 30000, 35000, 25000, 10000)$ = domande mensili.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & (12.50\,P_1 + 12.55\,P_2 + 12.70\,P_3 + 12.80\,P_4 + 12.85\,P_5 + 12.95\,P_6) \\
& + \frac{5}{100}(12.50\,M_1 + 12.55\,M_2 + 12.70\,M_3 + 12.80\,M_4 + 12.85\,M_5 + 12.95\,M_6) \\
\text{s.a} \quad & M_{i-1} + P_i - D_i \;=\; M_i \quad \forall i = 1, \ldots, 6 \\
& 0 \leq P_i \leq 30000 \qquad \forall i = 1, \ldots, 6 \\
& 0 \leq M_i \leq 10000 \qquad \forall i = 1, \ldots, 6 \\
& M_0 = 5000.
\end{aligned}
$$

La funzione oggetto somma il costo di produzione e quello di magazzino. Il costo di magazzino relativo alla scorta M_0 inizialmente a disposizione è costante e contribuisce con una costante additiva alla funzione oggetto. Non influisce quindi nel problema di minimizzazione e non serve indicarlo.

La prima famiglia di vincoli individua la quantità di palloni immagazzinati alla fine del mese i in funzione della produzione, della domanda e delle scorte del mese i.

Esercizio 3

A_i = numero di lavoratori assunti all'inizio del mese i
L_i = numero di lavoratori licenziati all'inizio del mese i
W_i = numero di lavoratori a disposizione durante il mese i

$$
\begin{aligned}
&100 + A_1 - L_1 = W_1 \\
&W_1 + A_2 - L_2 = W_2 \\
&W_2 + A_3 - L_3 = W_3 \\
&W_3 + A_4 - L_4 = W_4 \\
&A_i,\, L_i,\, W_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, 4
\end{aligned}
$$

S_i = numero di paia di scarpe prodotte nel mese i
M_i = numero di paia di scarpe in magazzino alla fine del mese i

$$
\begin{aligned}
&500 + S_1 - 3000 = M_1 \\
&M_1 + S_2 - 5000 = M_2 \\
&M_2 + S_3 - 2000 = M_3 \\
&M_3 + S_4 - 1000 = M_4 \\
&M_i,\, S_i \geq 0 \qquad\qquad \forall i = 1, \dots, 4
\end{aligned}
$$

Str_i = numero totale di ore di straordinario eseguite nel mese i

$$
\begin{aligned}
&160\, W_1 + Str_1 \geq 4S_1 \\
&160\, W_2 + Str_2 \geq 4S_2 \\
&160\, W_3 + Str_3 \geq 4S_3 \\
&160\, W_4 + Str_4 \geq 4S_4 \\
&0 \leq Str_i \leq 20\, W_i \qquad \forall i = 1, \dots, 4
\end{aligned}
$$

Costo per stipendi = $1500\,(W_1 + \ldots + W_4)$
Costo per straordinari = $13\,(Str_1 + \ldots + Str_4)$
Costo per materia prima = $15\,(S_1 \ldots + S_4)$
Costo per assunzioni = $1600\,(A_1 + \ldots + A_4)$
Costo per licenziamenti = $2000\,(L_1 + \ldots + L_4)$
Costo per magazzino = $3\,(M_1 + \ldots + M_4)$
Costo totale = somma di tutti i costi elencati qui sopra (da minimizzare)

Esercizio 4

Le decisioni da prendere in questo caso sono quanti barili di benzina e di gasolio produrre, ma anche come produrli, cioè con quali proporzioni miscelare i due tipi di petrolio greggio. Quindi le variabili possono essere le seguenti:
x_{1b} = numero di barili di petrolio greggio di tipo 1 usati per la produzione di benzina
x_{2b} = numero di barili di petrolio greggio di tipo 2 usati per la produzione di benzina
x_{1g} = numero di barili di petrolio greggio di tipo 1 usati per la produzione di gasolio per riscaldamento
x_{2g} = numero di barili di petrolio greggio di tipo 2 usati per la produzione di gasolio per riscaldamento.
Di conseguenza produrremo $x_{1b}+x_{2b}$ barili di benzina e $x_{1g}+x_{2g}$ barili di gasolio. La quantità di petrolio di tipo 1 utilizzata sarà pari a $x_{1b}+x_{1g}$, mentre la quantità di petrolio di tipo 2 sarà $x_{2b}+x_{2g}$.

$$\begin{aligned}
\max \quad & 25\,(x_{1b}+x_{2b}) + 20\,(x_{1g}+x_{2g}) \\
\text{s.a} \quad & x_{1b}+x_{1g} \leq 5000 \\
& x_{2b}+x_{2g} \leq 10000 \\
& 10\,x_{1b} + 5\,x_{2b} \geq 8\,(x_{1b}+x_{2b}) \\
& 10\,x_{1g} + 5\,x_{2g} \geq 6\,(x_{1g}+x_{2g}) \\
& x_{1b},\ x_{2b},\ x_{1g},\ x_{2g}\ \geq 0.
\end{aligned}$$

I primi due vincoli esprimono la disponibilità limitata dei due tipi di petrolio.
I due successivi vincoli esprimono la condizione che il livello di qualità della benzina e del gasolio, calcolato come media pesata del livello di qualità degli ingredienti, raggiunga almeno la soglia richiesta.

Esercizio 5

Ci conviene definire della variabili che distinguano le quantità di farmaci prodotte e vendute dalle quantità di farmaci prodotte e utilizzate come ingredienti per altri farmaci:
A_v = unità del farmaco A prodotte e vendute direttamente
A_p = unità del farmaco A prodotte e poi utilizzate per produrre il farmaco B
B_v = unità del farmaco B prodotte e vendute direttamente
B_p = unità del farmaco B prodotte e poi utilizzate per produrre il farmaco C

C = unità del farmaco C prodotte e vendute.

$$\begin{array}{rl} \max & 8\,A_v + 70\,B_v + 100\,C \\ \text{s.a} & 1\,(A_v + A_p) + 2\,(B_v + B_p) + 3\,C \leq 4000 \\ & B_v + B_p = 1/2\,A_p \\ & C = B_p \\ & A_v,\ A_p,\ B_v,\ B_p,\ C \geq 0 \end{array}$$

Il ricavo dell'industria dipende in modo diretto solo dalle variabili che rappresentano le quantità di farmaci vendute. Il primo vincolo calcola le ore di manodopera e impone che siano minori o uguali al numero totale di ore disponibili, il secondo vincolo segue dal fatto che per ogni unità di B prodotta si utilizzano 2 unità di A_p, il terzo vincolo segue dal fatto che per ogni unità di C prodotta si utilizza una unità di B_p.

Dal terzo vincolo si ricava che $B_p = C$, dal secondo che $A_p = 2\,(B_v + B_p) = 2\,(B_v + C)$, e quindi il programma si può riformulare in modo più compatto utilizzando solo le variabili A_v, B_v e C.