RICERCA OPERATIVA - LM in Matematica
A.A. 2019/20

Esercizi su modelli di PLI - Soluzioni

Prof.ssa Carla De Francesco

Nota Vengono fornite delle *possibili* soluzioni. Potrebbero esserci soluzioni alternative altrettanto valide.

Esercizio 1

Usiamo l'indice $i = 1, \dots, 6$ per indicare le compagnie e l'indice $j = 1, \dots, 8$ per indicare le linee. Variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la compagnia } i \text{ ha in gestione la linea } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Indichiamo con B l'insieme di tutte le coppie (i, j) corrispondenti a celle bianche, e poniamo $x_{ij} = 0$ per ogni $(i, j) \in B$. Indichiamo inoltre con c_{ij} i costi riportati nella tabella del testo.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{8} c_{ij} x_{ij} & \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1 & \forall j = 1, \dots, 8 \\ & \sum_{j=1}^{8} x_{ij} \leq 2 & \forall i = 1, \dots, 6 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i = 1, \dots, 6, \quad \forall j = 1, \dots, 8 \\ & x_{ij} = 0 & \forall (i, j) \in B. \end{array}$$

Il primo gruppo di equazioni impone che ogni linea debba essere realizzata da una compagnia, il secondo gruppo impone che ogni compagnia possa avere in gestione al massimo due linee.

Esercizio 2

Usiamo l'indice $i = 1, \dots, 4$ per indicare gli stili e l'indice $j = 1, \dots, 5$ per indicare i nuotatori. Variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se lo stile } i \text{ è assegnato al nuotatore } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Con c_{ij} indichiamo i tempi riportati in tabella.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} & \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq 1 & \forall j = 1,\dots,5 \\ & \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 & \forall i = 1,\dots,4 \\ & x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i = 1,\dots,4, \quad \forall j = 1,\dots,5. \end{array}$$

Il primo gruppo di vincoli impone che ogni nuotatore non faccia più di una specialità, il secondo gruppo impone che ci sia esattamente un nuotatore per ogni stile.

Esercizio 3

Usiamo l'indice $j = 1,\dots,5$ per indicare le tipologie di automobili nell'ordine del testo. Le variabili intere x_j indicano il numero di automobili del tipo j prodotte. Avremo quindi due vincoli, rispettivamente per la limitata disponibilità di acciaio e di ore lavoro:

$$\begin{array}{l} 1.5\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 + 6\,x_4 + 8\,x_5 \leq 6500 \\ 30\,x_1 + 25\,x_2 + 40\,x_3 + 45\,x_4 + 55\,x_5 \leq 65000. \end{array}$$

Dobbiamo poi esprimere la condizione che la produzione di automobili di tipo j o non è attiva ($x_j = 0$), o raggiunge almeno la soglia minima riportata in tabella ($x_j \geq 1000$ per $j = 1,2,3$, $x_j \geq 200$ per $j = 4,5$). Per fare questo introduciamo le variabili binarie

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se c'è produzione di auto del tipo } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Fissando l'attenzione sul primo tipo di auto, il legame tra le variabili x_1 e y_1 è dato dalla seguente condizione:

$$1000\,y_1 \leq x_1 \leq M_1\,y_1,$$

dove M_1 è un numero grande che supera la produzione massima, ad esempio $M_1 = 65000/30$. Infatti, se la variabile y_1 è uguale a zero, allora anche la variabile x_1 è forzatamente nulla, mentre se la y_1 è uguale a uno, la x_1 è maggiore o uguale a 1000. In questo modo riusciamo a rendere inammissibili tutti i valori della variabile x_1 compresi tra 1 e 999. Complessivamente questo è il programma cercato:

$$
\begin{array}{rll}
\max & 2000\,x_1 + 2500\,x_2 + 3000\,x_3 + 5500\,x_4 + 7000\,x_5 & \\
\text{s.a} & 1.5\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 + 6\,x_4 + 8\,x_5 \le 6500 & \\
& 30\,x_1 + 25\,x_2 + 40\,x_3 + 45\,x_4 + 55\,x_5 \le 65000 & \\
& 1000\,y_j \le x_j \le M_j\,y_j & \forall j = 1,2,3 \\
& 200\,y_j \le x_j \le M_j\,y_j & \forall j = 4,5 \\
& x_j \in \mathbb{Z}_+ & \forall j = 1,\ldots,5 \\
& y_j \in \{0,1\} & \forall j = 1,\ldots,5.
\end{array}
$$

Esercizio 4

Variabili binarie ($j = 1,\ldots,12$):

$$
y_j = \begin{cases} 1 & \text{se la città } j \text{ è hub,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{rll}
\min & \sum_{j=1}^{12} y_j & \\
\text{s.a} & y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_8 + y_9 \ge 1 & \\
& y_2 + y_8 + y_9 \ge 1 & \\
& y_1 + y_3 + y_7 + y_8 + y_9 \ge 1 & \\
& y_4 + y_{10} \ge 1 & \\
& y_1 + y_5 + y_7 \ge 1 & \\
& y_6 + y_{10} + y_{11} \ge 1 & \\
& y_1 + y_3 + y_5 + y_7 \ge 1 & \\
& y_1 + y_2 + y_3 + y_8 + y_9 \ge 1 & \\
& y_1 + y_2 + y_3 + y_8 + y_9 \ge 1 & \\
& y_4 + y_6 + y_{10} + y_{11} + y_{12} \ge 1 & \\
& y_6 + y_{10} + y_{11} + y_{12} \ge 1 & \\
& y_{10} + y_{11} + y_{12} \ge 1 & \\
& y_j \in \{0,1\} & \forall j = 1,\ldots,12.
\end{array}
$$

Il primo vincolo, ad esempio, esprime la condizione che almeno una tra le città entro 1000 miglia da Atlanta deve essere hub. Ogni vincolo corrisponde ad una città. E' evidente che alcuni vincoli sono ridondanti.

Esercizio 5

Usiamo l'indice $j = 1, 2, 3$ per individuare i clienti. Definiamo le variabili intere x_j che contano il numero di aeroplani prodotti per il cliente j e le variabili binarie:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se si produce almeno un aeroplano per il cliente } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \max & 2\,x_1 + 3\,x_2 + 0.8\,x_3 - (3\,y_1 + 2\,y_2) & \\ \text{s.a} & 20\,x_1 + 40\,x_2 + 20\,x_3 \leq 100 & \\ & 0 \leq x_1 \leq 3\,y_1 & \\ & 0 \leq x_2 \leq 2\,y_2 & \\ & 0 \leq x_3 \leq 5\,y_3 & \\ & x_j \in \mathbb{Z}_+ & \forall j = 1,\,2,\,3 \\ & y_j \in \{0, 1\} & \forall j = 1,\,2,\,3. \end{array}$$

Il primo vincolo è conseguenza della limitata capacità produttiva, i successivi tre sono vincoli logici che esprimono il legame tra le variabili x_j e y_j e tengono anche conto della domanda di ogni cliente. Considerando che la produzione di aeroplani per il terzo cliente non comporta costi di start-up, la variabile y_3 non è necessaria e può essere posta uguale a 1.

Esercizio 6

Per ogni arco $e \in E$ del grafo indichiamo con c_e il relativo costo e con x_e la variabile binaria che vale 1 se e solo se l'arco e fa parte del cammino minimo. Un modello per il problema di cammino minimo è il seguente (vedi dispense, si noti che i costi sono positivi e quindi conservativi):

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{e \in E} c_e\,x_e & \\ \text{s.a} & \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e = 0 & \forall v \in V \setminus \{v_1, v_2\} \\ & \sum_{e \in \delta^-(v_1)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v_1)} x_e = -1 & \\ & \sum_{e \in \delta^-(v_2)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v_2)} x_e = 1 & \\ & x_e \in \{0, 1\} & \forall e \in E. \end{array}$$

In questo modello tra le soluzioni ammissibili ce ne sono alcune che non rappresentano cammini senza nodi ripetuti: in particolare, rappresentano insiemi di archi formati ciascuno dall'unione di un cammino da v_1 a v_2 e di alcuni cicli, che possono essere disgiunti o no dal cammino. Nel problema del cammino minimo "classico" con costi conservativi queste soluzioni, anche se ammissibili, non saranno mai ottime: infatti, rimuovendo un ciclo da una di queste soluzioni se ne trova un'altra, ammissibile e di costo inferiore. Di conseguenza, non abbiamo bisogno di inserire ulteriori condizioni che le rendano inammissibili.

Nel problema con variante, invece, tali soluzioni se ammissibili potrebbero risultare ottime: infatti può succedere che una soluzione visiti alcuni nodi in Q percorrendo dei cicli per soddisfare la condizione della variante, e la rimozione di uno o più di questi cicli la renda inammissibile. Abbiamo quindi bisogno di vietare in modo esplicito queste soluzioni, e lo facciamo imponendo i seguenti *subtour elimination constraints*:

$$\sum_{e \in E[S]} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \subseteq V,\ S \neq \emptyset,$$

dove l'insieme $E[S]$ contiene tutti gli archi del grafo che hanno entrambe gli estremi in S. Con l'aggiunta di questi vincoli, ogni soluzione ammissibile rappresenta un cammino da v_1 a v_2 che non contiene cicli e non visita nessun nodo più di una volta.

Per ogni nodo $v \neq v_1$, la quantità $\sum_{e \in \delta^-(v)} x_e$ è uguale ad 1 se il cammino visita il (o entra nel) nodo v, 0 altrimenti. Quindi il numero di nodi visitati da un cammino è uguale a

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e + 1 \;=\; \sum_{v \in Q} \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e + \sum_{v \in V \setminus Q} \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e \;+\; 1,$$

dove il termine $+1$ conta il nodo v_1. Invece, il numero di nodi appartenenti all'insieme Q visitati da un cammino è uguale a $\sum_{v \in Q} \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e$. Quindi la condizione *almeno la metà dei nodi visitati appartenga all'insieme* Q si esprime con il vincolo:

$$\sum_{v \in Q} \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e \geq \sum_{v \in V \setminus Q} \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e \;+\; 1.$$

Esercizio 7

Utilizziamo ancora il modello dell'esercizio precedente, compresi i *subtour elimination constraints*. La condizione *il cammino visiti almeno la metà dei nodi appartenenti all'insieme* Q si esprime con il vincolo:

$$\sum_{v \in Q} \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e \geq |Q| / 2.$$

Esercizio 8

Per ogni nodo $v \in V$ del grafo, indichiamo con w_v il suo peso e con x_v una variabile binaria, con

$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il nodo } v \text{ appartiene all'indipendente,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Un programma che permette di individuare un indipendente di peso massimo è il seguente:

$$\begin{array}{rll} \max & \sum_{v\in V} w_v\, x_v & \\ \text{s.a} & x_u + x_v \le 1 & \forall e=(u,v)\in E \\ & x_v \in \{0,1\} & \forall v \in V. \end{array}$$

2. Indichiamo con 1, 2 i nodi nella prima parte della partizione, con 3, 4, 5 i nodi nell'altra parte.

$$\begin{array}{rl} \max & \sum_{v=1}^{5} w_v x_v \\ \text{s.a} & x_1 + x_3 \le 1 \\ & x_1 + x_4 \le 1 \\ & x_1 + x_5 \le 1 \\ & x_2 + x_3 \le 1 \\ & x_2 + x_4 \le 1 \\ & x_2 + x_5 \le 1 \\ & x_v \in \{0,1\} \ \ \forall v \in \{1,\dots,5\}. \end{array}$$

3. La matrice dei vincoli ... è la matrice di incidenza archi/nodi di un grafo non orientato bipartito e quindi è totalmente unimodulare.

4. Di conseguenza, una soluzione ottima del problema si può ottenere risolvendo il rilassamento lineare tramite il simplesso. La totale unimodularità della matrice dei vincoli (e l'interezza dei coefficienti del programma) assicura l'interezza della soluzione restituita dal simplesso.

Esercizio 9

1. Usiamo l'indice $i = 1,\dots,7$ per indicare i seminari e l'indice $j = 1,\dots,8$ per indicare le fasce orarie (quattro al mattino e quattro al pomeriggio). Indichiamo con p_{ij} il valore che indica il grado di preferenza dello studente per il seminario i tenuto nella sessione j. Variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se lo studente segue il seminario } i \text{ nel periodo } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rll} \max & \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{8} p_{ij}x_{ij} & \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{7} x_{ij} \le 1 & \forall j = 1,\dots,8 \\ & \sum_{j=1}^{8} x_{ij} \le 1 & \forall i = 1,\dots,7 \\ & \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{8} x_{ij} = 4 & \\ & x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i = 1,\dots,7, \quad \forall j = 1,\dots,8. \end{array}$$

Le tre famiglie di disequazioni impongono che in ogni fascia oraria lo studente possa seguire al massimo un seminario, che ogni seminario sia seguito al massimo una volta e che lo studente segua esattamente quattro seminari.

2. La condizione richiesta equivale a: lo studente può frequentare al massimo due seminari in ogni terna di periodi consecutivi. E' quindi sufficiente aggiungere i vincoli

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} + \sum_{i=1}^{7} x_{i,j+1} + \sum_{i=1}^{7} x_{i,j+2} \leq 2$$

per $j = 1, \ldots, 6$.

3. La condizione richiesta equivale a: lo studente non può frequentare esattamente due ore al mattino (e quindi due al pomeriggio). Quindi basta imporre che il numero di ore frequentate al mattino, $\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}$ sia diverso da due. Chiamiamolo z per brevità e usiamo la tecnica della disgiunzione di vincoli lineari. Sulla variabile intera z deve quindi valere $z \leq 1$ oppure $z \geq 3$. Definendo un'ulteriore variabile binaria y, la condizione richiesta può essere espressa dai seguenti vincoli, dove M è un numero grande opportunamente scelto (ad esempio, $M = 100$):

$$\begin{aligned}
&z \leq 1 + My \\
&-z \leq -3 + M(1-y) \\
&y \in \{0,1\},
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq 1 + My \\
&-\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq -3 + M(1-y) \\
&y \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

Esercizio 10

Per $i, j = 1, \ldots, 8$, definiamo le variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la casella } (i,j) \text{ è occupata da una regina,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osservando che le caselle situate su una stessa parallela a una diagonale hanno in comune il valore di $i - j$ o di $i + j$, un possibile modello è il seguente:

$$\begin{array}{lll}
\max & \sum_{i,j} x_{ij} & \\
\text{s.a} & \sum_j x_{ij} \le 1 & 1 \le i \le 8 \\
& \sum_i x_{ij} \le 1 & 1 \le j \le 8 \\
& \sum_{i,j} \{x_{ij} : i + j = \ell\} \le 1 & 3 \le \ell \le 15 \\
& \sum_{i,j} \{x_{ij} : i - j = \ell\} \le 1 & -6 \le \ell \le 6 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & 1 \le i \le 8,\ 1 \le j \le 8
\end{array}$$

(è sottinteso che nelle varie sommatorie si considerano solo gli indici i, j compresi tra 1 e 8)

Esercizio 11

1. Definiamo le variabili binarie y_i che valgono 1 se e solo se il call center i viene attivato e variabili intere x_{ij} che indicano quante chiamate di tipo j ricevono risposta dal call center i.

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_i f_i y_i + \sum_{i,j} v_i x_{ij} & \\
\text{s.a} & \sum_i x_{ij} = D_j, & 1 \le j \le m \\
& \sum_j x_{ij} \le C_i y_i, & 1 \le i \le n \\
& y_i \in \{0, 1\},\ x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, & 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m.
\end{array}$$

   L'ultima famiglia di disequazioni obbliga y_i a valere 1 (e dunque attiva il costo fisso) non appena qualche telefonata viene gestita dal call center i. Contemporaneamente, impone il limite di chiamate C_i quando il call center i è attivato.

2. Definiamo le variabili binarie z_{ij} che valgono 1 se e solo se il call center i gestisce qualche chiamata di tipo j. Dovremo aggiungere i seguenti vincoli al modello precedente:

$$\begin{array}{ll}
x_{ij} \le D_j z_{ij}, & 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m \\
\sum_j z_{ij} \le 4, & 1 \le i \le n \\
z_{ij} \in \{0, 1\}, & 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m.
\end{array}$$

3. Basta imporre $y_1 + y_2 + y_4 \le 2$.