RICERCA OPERATIVA - LM in Matematica
A.A. 2019/20

Esercizi su Branch and Bound - con risultati

Prof.ssa Carla De Francesco

---

[1] Si consideri il seguente programma lineare intero:

$$\max x_1 + x_2$$

$$\text{soggetto a} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \ \text{ intere.} \end{array}$$

Si trovino *tutte* le sue soluzioni ottime con il metodo Branch and Bound, risolvendo i rilassamenti lineari in modo grafico.

[Schema di risoluzione
Il rilassamento continuo del problema dato ha come soluzione ottima il punto $(10/3, 10/3)^t$ e valore ottimo 20/3; $\lfloor 20/3 \rfloor$ è quindi un *upper bound* al valore ottimo del problema dato. Si possono definire due sottoproblemi (figli del nodo radice nell'albero di BB), ottenuti dal problema iniziale con l'aggiunta della condizione $x_1 \leq 3$ per P1 e $x_1 \geq 4$ per P2. Risolvendo il rilassamento di P2 si ottiene la soluzione ottima $(4, 2)^t$, che essendo intera è anche la soluzione ottima di P2 con valore ottimo uguale a 6. Quindi P2 viene potato per ottimalità e la sua soluzione viene memorizzata come candidata ad essere soluzione ottima del problema dato. Risolvendo il rilassamento di P1 si trova soluzione ottima $(3, 7/2)^t$ e valore ottimo 13/2, *upper bound* associato a P1. Si devono quindi definire due figli di P1, ottenuti da P1 aggiungendo la condizione $x_2 \leq 3$ per P3 e $x_2 \geq 4$ per P4. Il rilassamento di P3 ha soluzione ottima $(3, 3)^t$, quello di P4 $(2, 4)^t$, entrambe intere e con valore ottimo 6. Si possono quindi potare per ottimalità anche P3 e P4. A questo punto non rimangono più nodi da esaminare nell'albero. Le tre soluzioni $(4, 2)^t$, $(3, 3)^t$ e $(2, 4)^t$ sono soluzioni ottime del problema dato. Si noti che sono le uniche soluzioni ottime dei tre rilassamenti corrispondenti, e quindi il problema dato non ha altre soluzioni ottime.]

[**2**] Si risolva il seguente problema dello zaino con il Branch and Bound:

$$\max\ 7x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4$$

$$\begin{array}{ll} \text{soggetto a} & 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ & x_1, \ldots, x_4 \in \{0,1\}\,. \end{array}$$

[La soluzione ottima (unica) è $(0,1,1,1)^t$ con valore ottimo 17.]

[**3**] Un signore vuole investire il suo piccolo capitale, 3000 euro, in modo da massimizzare il guadagno medio previsto. Inoltre, vuole ridurre il rischio, e quindi decide di diversificare il più possibile gli investimenti.

In borsa sono quotate sei azioni, e la seguente tabella contiene, per ogni azione, il guadagno medio previsto e il costo.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
guadagno	15	15	25	35	30	15
costo	800	1200	900	750	1000	950

L'investitore decide quindi di utilizzare il suo capitale per comprare alcune azioni, tutte diverse, scegliendo quelle che massimizzano il suo guadagno totale.

1. Si formuli un programma lineare intero per determinare la miglior politica dell'investitore.
2. Lo si risolva con il Branch and Bound.

[Si può definire una variabile binaria x_j per ogni investimento ($j = 1, \ldots, 6$), che sia uguale a 1 se la corrispondente azione viene acquistata, uguale a zero altrimenti. Allora il problema si può formulare con il programma seguente:

$$\max\ 15x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 35x_4 + 30x_5 + 15x_6$$

$$\begin{array}{ll} \text{soggetto a} & 800x_1 + 1200x_2 + 900x_3 + 750x_4 + 1000x_5 + 950x_6 \leq 3000 \\ & x_1, \ldots, x_6 \in \{0,1\}\,. \end{array}$$

Risolvendo con il Branch and Bound si ottiene la soluzione ottima $(0,0,1,1,1,0)^t$ con valore ottimo 90.]