RICERCA OPERATIVA - LM in Matematica
A.A. 2019/20

Esercizi su formulazioni e su piani di taglio - con risultati

Prof.ssa Carla De Francesco

---

[1] Si consideri il seguente programma lineare intero P_I:

$$\max 5.5x_1 + 2.1x_2$$

$$\text{soggetto a} \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 8x_1 + 2x_2 &\leq 17 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ intere.} \end{aligned}$$

1. Disegnare la regione ammissibile di P_I e del suo rilassamento lineare.
2. Scrivere il rilassamento lineare P_L della forma standard di P_I.
3. Risolvendo P_L con il simplesso, si trova che la base ottima è individuata dalle variabili x_1 e x_2. Scrivere la matrice base A_B, calcolare la sua inversa e la soluzione ottima associata.
4. Ricavare i due tagli (in realtà coincidenti) associati alle due componenti frazionarie della soluzione ottima di P_L.
5. Disegnare questo taglio nel grafico.
6. Inserendo l'equazione di questo taglio nella formulazione di P_L, si ottiene un nuovo programma lineare. Lo si può risolvere con il simplesso (duale), e si ottiene questa volta la base ottima formata dalle prime tre variabili (x_1, x_2 e la variabile di scarto del primo vincolo). Calcolare la sua soluzione ottima e ricavare due tagli (anche in questo caso risultano coincidenti).
7. Disegnare anche il nuovo taglio nel grafico.

[La soluzione ottima di P_L è $(13/10, 33/10, 0, 0)^t$, la matrice A_B è formata dalle prime due colonne della matrice A. Per ricavare i due tagli è prima necessario esprimere il sistema di equazioni $Ax = b$ rispetto alla base ottima; per farlo basta premoltiplicarlo per la matrice A_B^{-1}, e si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 \qquad -\frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{13}{10} \\ \qquad x_2 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{33}{10} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava il taglio $x_1 - x_3 \leq 1$, equivalente a $x_2 \leq 3$. Dalla seconda equazione si ricava ancora $x_2 \leq 3$.

Inserendo il taglio appena calcolato nel problema P_L, si ottiene un nuovo problema con tre vincoli e con soluzione ottima $(11/8,\ 3,\ 3/8,\ 0,\ 0)^t$. Il sistema di equazioni dei suoi vincoli, espresso rispetto alla base indicata come ottima al punto (6) del testo, diventa:

$$\begin{cases} x_1 & & & +\frac{1}{8}x_4 & -\frac{1}{4}x_5 & = & \frac{11}{8} \\ & x_2 & & & +x_5 & = & 3 \\ & & x_3 & +\frac{1}{8}x_4 & -\frac{5}{4}x_5 & = & \frac{3}{8} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava il taglio $x_1 - x_5 \leq 1$, equivalente a $x_1 + x_2 \leq 4$. Dalla terza equazione si ricava $x_3 - 2x_5 \leq 0$, equivalente al taglio precedente.]

[2] Generare le disequazioni che descrivono l'inviluppo convesso dei seguenti insiemi:

(a) $S = \{(x, y) :\ x + y \geq b,\ x \geq 0 \text{ intero},\ y \geq 0\}$

(b) $T = \{(x, y) :\ x + y \geq b,\ x \geq 0 \text{ intero}\}$.

[(a) Se b è positivo e frazionario, allora $conv(S)$ è definito da:

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + y \geq b \\ fx + y \geq f\lfloor b \rfloor + f \end{cases}$$

dove con f si indica la parte frazionaria di b.
Se b è positivo e intero, allora $conv(S) = \{(x, y) :\ x + y \geq b,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
Se $b \leq 0$, allora $conv(S) = \{(x, y) :\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
(b) $conv(T) = \{(x, y) :\ x + y \geq b,\ x \geq 0\}$.]

[3] Si consideri la regione ammissibile di un problema dello zaino, e si confrontino le due formulazioni date a lezione:

- la formulazione classica $K = \left\{x \in \{0,1\}^n : \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq W\right\}$,
- la formulazione che usa le coperture minimali:
  $K^C = \left\{x \in \{0,1\}^n : \sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1 \text{ per ogni copertura minimale } C\right\}$.

Dare un esempio di problema dello zaino binario per il quale nessuna delle due formulazioni è migliore dell'altra, cioè tale che $P \setminus P^C \neq \emptyset$ e $P^C \setminus P \neq \emptyset$, dove P e P^C sono rispettivamente i rilassamenti lineari delle formulazioni K e K^C.

[Un esempio (non certo unico!) si ottiene considerando $n = 4$, $w = (2, 1, 1, 1)^t$ e $W = 3$. In tal caso $(1/3, 1, 1, 1/3)^t \in P \setminus P^C$ e $(2/3, 2/3, 2/3, 2/3)^t \in P^C \setminus P$.]

[4] Il *principio della piccionaia* stabilisce che il problema (P):

> Distribuire $n + 1$ piccioni in n buchi in modo che non ci siano due piccioni nello stesso buco

non ha soluzione.

Volendo formulare il problema (P) con un programma lineare intero, potete definire delle variabili binarie x_{ij} che sono uguali a 1 se e solo se il piccione j va nel buco i, per ogni piccione $j = 1, \dots, n+1$ e per ogni buco $i = 1, \dots, n$. Poi dovete scrivere dei vincoli che esprimano le seguenti condizioni:

(a) ogni piccione deve entrare in un buco,

(b) per ogni coppia di piccioni e per ogni buco, al più un piccione della coppia può entrare nel buco,

oppure, in alternativa a (b),

(b') ogni buco può contenere al massimo un piccione.

1. Dimostrare che la formulazione con le condizioni (a) e (b') non ha soluzioni intere, e il suo rilassamento lineare è inammissibile.

2. Dimostrare che la formulazione con le condizioni (a) e (b) non ha soluzioni intere, ma il rilassamento lineare è ammissibile.

[1.) Si può dimostrare facilmente con un'opportuna combinazione lineare dei vincoli.
2.) Se x è una soluzione intera che soddisfa le condizioni (a) e (b), allora soddisfa anche la (b') (anche questa affermazione è facilmente dimostrabile); usando il punto precedente si conclude che non esistono soluzioni intere per la formulazione con (a) e (b). Una soluzione frazionaria è invece facilmente individuabile.]

[5] Si consideri un grafo non orientato $G = (V, E)$ con un costo c_e associato ad ogni spigolo $e \in E$; siano s e t due nodi distinti del grafo. Si scriva un programma lineare intero per trovare un cammino Hamiltoniano in G con estremi s e t di costo minimo (un cammino Hamiltoniano è un cammino che visita ogni nodo del grafo esattamente una volta).

[Per ogni spigolo $e \in E$ sia x_e una variabile binaria che vale 1 se e solo se lo spigolo e fa parte del cammino Hamiltoniano cercato. Indichiamo con $\delta(v)$ l'insieme degli spigoli del grafo incidenti nel nodo v. Per ogni $S \subset V$, con $\delta(S)$ indichiamo l'insieme degli spigoli del grafo che hanno un estremo in S e un altro fuori di S. Allora la formulazione cercata può essere la seguente:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{s.a} & \sum_{e \in \delta(s)} x_e = 1 & \\
 & \sum_{e \in \delta(t)} x_e = 1 & \\
 & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\
 & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 & \forall S \subseteq V \setminus \{s,t\}\,,\ S \neq \emptyset \\
 & x_e \in \{0,1\} & \forall e \in E.
\end{array}
$$

Il quarto gruppo di vincoli serve a rendere inammissibili soluzioni formate dall'unione di un cammino da s a t e uno o più cicli disgiunti dal cammino.]

[6] Trovare una formulazione lineare intera per i seguenti insiemi:

1. $\left\{x \in \{0,1\}^4 : x \neq (1,0,1,0)^t\right\}$
2. $\left\{x \in \{0,1\}^4 : x \neq (1,0,1,0)^t,\ x \neq (1,1,1,1)^t\right\}$
3. $\{x \in \{0,1\}^n : |\{j :\ x_j = 1\}|\ \text{è pari}\}$

[Risposte:

1. $\left\{x \in \{0,1\}^4 : (1-x_1) + x_2 + (1-x_3) + x_4 \geq 1\right\}$
2. $\left\{x \in \{0,1\}^4 : (1-x_1) + x_2 + (1-x_3) + x_4 \geq 1, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3\right\}$
3. $\left\{(x,t) : x \in \{0,1\}^n, \ t \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^n x_j = 2t\right\}$

]

[7] Siano $P = \{x \in \mathbb{R}^n :\ A_1 x \leq b_1\}$ un poliedro limitato e $S = \{x \in \mathbb{R}^n :\ A_2 x < b_2\}$ un insieme, con $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$.

Formulare il problema di massimizzare una funzione lineare su $P \setminus S$ come un programma lineare binario misto.

[Si osservi che

$$
\begin{aligned}
P \setminus S &= \{x \in \mathbb{R}^n :\ A_1 x \leq b_1 \text{ e almeno una disequazione in } A_2 x < b_2 \text{ è falsa}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n :\ A_1 x \leq b_1 \text{ e almeno una disequazione in } A_2 x \geq b_2 \text{ è vera}\}\,.
\end{aligned}
$$

La formulazione richiesta si può allora scrivere seguendo l'approccio della disgiunzione di sistemi lineari, dove si richiede che almeno k tra m_2 sistemi siano soddisfatti. In questo caso particolare, ogni sistema è formato da una sola disequazione e $k = 1$.]

[8] Considerare il seguente problema di *cutting stock*.

Un'azienda produce rotoli di carta di vari tipi per i suoi clienti. Un tipo viene prodotto in rotoli standard (*rotoloni*), che sono larghi 60 cm e lunghi (se srotolati) 200 metri. Gli ordini per questo tipo di carta richiedono rotoli con le seguenti caratteristiche: larghezza pari a 12, 15, 20, 24, 30 o 40 cm, lunghezza pari a 200 metri. Ogni settimana, l'azienda aspetta di raccogliere tutti gli ordini e poi decide come tagliare i suoi rotoloni di larghezza 60 cm per soddisfare le richieste.

Per esempio, se ci sono 5 ordini per rotoli di larghezza 15 cm e 2 ordini per rotoli di larghezza 40 cm, l'azienda può soddisfare la sua clientela producendo tre rotoloni, tagliando i primi due in modo da ricavare da ciascuno un rotolo da 40 cm e un rotolo da 15 cm (e scartando quindi 5 cm per rotolone), e tagliando il terzo rotolone in quattro parti da 15 cm ciascuna (e scartando una di queste parti).

Ogni settimana l'azienda deve decidere la sua strategia di produzione, cioè quanti rotoloni produrre e come tagliarli. In particolare vuole produrre il minor numero possibile di rotoloni, ma vuole anche soddisfare le richieste della clientela, che per la prossima settimana sono indicate nella tabella seguente.

formato	12	15	20	24	30	40
quantità richieste	48	19	22	32	14	7

Individuare tutti i possibili schemi di taglio e scrivere la formulazione lineare intera associata.

[La formulazione è stata scritta a lezione e si trova nelle dispense. Con un po' di lavoro si possono elencare tutti gli schemi di taglio non dominati, alla fine se ne ottengono 26.]

[9] E' dato il seguente programma P_I lineare intero:

$$\max\ -x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a}\quad & x_1 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_4 = 8 \\ & x_j \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall\, j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Dopo aver risolto il suo rilassamento lineare con il simplesso, si sa che la base ottima è $\{3, 4\}$ e i vincoli nel tableau ottimo sono espressi nella seguente forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3 = \frac{31}{3} \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_4 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

1. Ricavare due tagli di Gomory.

2. Risolvendo con il simplesso (duale) il rilassamento lineare con l'aggiunta del secondo taglio generato, si trova che la base ottima è $\{2, 3, 4\}$. Qual è la soluzione ottima corrispondente? E' anche la soluzione ottima del programma P_I iniziale?

[Dalla prima equazione nel tableau ottimo del rilassamento lineare si ricava il taglio $x_3 \leq 10$, dalla seconda $-x_1 + x_4 \leq 2$. Per aggiungere il secondo taglio al rilassamento bisogna prima trasformarlo in forma di uguaglianza, inserendo la variabile di scarto x_5 e ottenendo $-x_1 + x_4 + x_5 = 2$. Quindi il rilassamento con l'aggiunta del taglio avrà un vincolo e una variabile in più rispetto al problema dato; indico con b il vettore dei termini noti e con A_B la matrice base associata alla base ottima $\{2, 3, 4\}$ di questo problema allargato. La sua soluzione ottima è data da $A_B^{-1}b = (0, 2, 9, 2, 0)^T$ ed è intera. E' quindi anche una soluzione ottima del programma P_I iniziale.]

[10] Considerate il seguente programma lineare intero P_I:

$$\begin{array}{ll} & \max x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ intere.} \end{array}$$

1. Disegnate la regione ammissibile di P_I e del suo rilassamento lineare P_L.

2. Ricavate la soluzione ottima di P_L dal grafico; trasformate P_L in forma standard, stabilite qual è la base ottima, individuate la matrice A_B associata alla base ottima e calcolate la sua inversa.

3. Premoltiplicate i vincoli di P_L in forma standard per A_B^{-1} in modo da esprimere le variabili della base ottima in funzione delle altre variabili.

4. Ricavate due tagli di Gomory dal sistema individuato al punto precedente e disegnateli nel grafico.

[La soluzione ottima di P_L è l'unico vertice frazionario $(6/5, 12/5)^T$. Trasformando P_L in forma standard la soluzione ottima diventa $(6/5, 12/5, 0, 0)^T$ e la base ottima è $\{1, 2\}$. I due tagli di Gomory sono $x_1 - x_3 \leq 1$ e $x_2 - x_4 \leq 2$. Per disegnarli bisogna esprimerli in funzione delle variabili x_1 e x_2: si ottiene rispettivamente $2x_1 + 2x_2 \leq 7$ e $3x_1 + 2x_2 \leq 8$. Si noti che il primo dei due tagli si può facilmente migliorare: $2x_1 + 2x_2 \leq 7$ è equivalente a $x_1 + x_2 \leq 7/2$, ma per ogni soluzione intera il termine a sinistra assume solo valori interi, e quindi il termine a destra si può arrotondare per difetto, ottenendo un taglio più forte: $x_1 + x_2 \leq 3$.]