

RICERCA OPERATIVA - Laurea Magistrale in Matematica – A.A. 2019/20

Esercizi su modelli di Programmazione Lineare Intera

1 - Scuolabus

Una città sta esaminando le offerte provenienti da sei compagnie di autobus disponibili a gestire 8 diverse linee che devono essere realizzate per il trasporto scolastico. Ogni compagnia presenta una proposta indicando i prezzi per la realizzazione di ciascuna linea a cui è interessata.

I dati sono riportati nella tabella qui sotto (le celle bianche indicano che per quella linea la compagnia non ha presentato un'offerta):

Compagnia	Linea 1	Linea 2	Linea 3	Linea 4	Linea 5	Linea 6	Linea 7	Linea 8
1		7200	6800	4400		2900		
2	6800	7200		5300		2300	3900	
3		3800				3400	4600	2600
4			7000	4000	5800		5700	3200
5	6200	5400		2900	5400	1800		2000
6	6000	4800	6500	3500	4600		5000	3200

La città deve decidere a quale compagnia assegnare ciascuna linea per realizzare l'intera rete di trasporto a costo minimo, alle seguenti condizioni:

1. Se una compagnia non ha fatto un'offerta per una determinata linea, non può essere assegnata a quella linea.
2. Ogni linea deve essere realizzata da esattamente una compagnia.
3. Ogni compagnia può avere in gestione al massimo 2 linee.

2 – Staffetta

L'allenatore di un gruppo sportivo di nuoto deve preparare il suo gruppo per una gara a staffetta. Deve quindi selezionare quattro atleti, e ognuno di questi dovrà percorrere 50 metri con lo stile assegnato (quindi uno dovrà nuotare a dorso, uno a rana, uno a farfalla e uno a stile libero). Poiché i suoi atleti sono in genere veloci in più specialità, non è chiaro come assegnare gli stili agli atleti. La seguente tabella mostra i tempi raggiunti dai cinque migliori nuotatori del gruppo, nelle quattro specialità in questione.

stile	Carlo	Paolo	Fabio	Marco	Luigi
dorso	37.7	32.9	33.8	37.0	35.4
rana	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
farfalla	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
libero	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

L'allenatore vuole scegliere quattro dei cinque nuotatori e assegnare loro i quattro stili, uno per ciascuno, in modo da minimizzare la somma dei tempi.

Scrivete un modello di programmazione lineare intera che rappresenti questo problema.

3 – Produzione di automobili – Vincoli *either-or*

Un'azienda sta considerando di produrre industrialmente tre tipi di automobili: compatta, media e grande, nonché due tipi di minivan: medio e grande. Le risorse richieste per la produzione e i profitti unitari generati dalla vendita di ogni veicolo sono illustrati nella seguente tabella, suddivisi per tipologia di veicolo.

In questo momento sono disponibili 6.500 tonnellate di acciaio e 65.000 ore lavoro. La produzione di un dato tipo di automobili è però realizzabile economicamente solo se almeno un numero minimo di veicoli di quel tipo viene prodotto. Anche questo dato è riportato nella tabella.

Scrivere un programma lineare intero per individuare un piano di produzione che massimizzi il profitto della azienda.

Dati unitari	Auto Compatta	Auto Media	Auto Grande	Minivan Medio	Minivan Grande
Acciaio richiesto (tonn)	1,5	3	5	6	8
Lavoro richiesto (ore)	30	25	40	45	55
Produzione min. (se c'è produzione)	1000	1000	1000	200	200
Profitto	\$ 2.000	\$ 2.500	\$ 3.000	\$ 5.500	\$ 7.000

4 – Localizzazione di *hubs* – *set covering*

Una compagnia aerea ha deciso di organizzare la propria rete negli Stati Uniti in un sistema con uno o più *hub*. *Hub*, in inglese, è il mozzo della ruota e un sistema *hub and spokes* (= mozzo e raggi) è un sistema di nodi collegati direttamente con un nodo centrale, detto appunto *hub*. Ciascuno *hub* ha la funzione di concatenare voli con città che si trovino in un raggio di 1000 miglia dallo *hub* stesso. La compagnia effettua voli tra le seguenti città: Atlanta, Boston, Chicago, Denver, Houston, Los Angeles, New Orleans, New York, Pittsburgh, Salt Lake City, San Francisco e Seattle. La compagnia aerea vuole determinare il minor numero di *hub* necessari per coprire tutte queste città, definendo "coperta" una città se essa si trova entro 1000 miglia da almeno un *hub*. La tabella sottostante elenca quali città si trovano entro 1000 miglia da ciascuna delle città indicate nella prima colonna.

Città	Città entro 1000 miglia
Atlanta (AT)	AT, CH, HO, NO, NY, PI
Boston (BO)	BO, NY, PI
Chicago (CH)	AT, CH, NY, NO, PI
Denver (DE)	DE, SL
Houston (HO)	AT, HO, NO
Los Angeles (LA)	LA, SL, SF
New Orleans (NO)	AT, CH, HO, NO
New York (NY)	AT, BO, CH, NY, PI
Pittsburgh (PI)	AT, BO, CH, NY, PI
Salt Lake City (SL)	DE, LA, SL, SF, SE
San Francisco (SF)	LA, SL, SF, SE
Seattle (SE)	SL, SF, SE

5 – Produzione di aeroplani

Una ditta costruisce aeroplani di piccole dimensioni; i suoi clienti sono enti che li acquistano per il trasporto dei loro dirigenti. Questi enti in genere richiedono un *design* fuoriserie per i loro aeroplani; questa richiesta comporta un notevole costo aggiuntivo di *start-up*, cioè un costo fisso da sostenere all'inizio della produzione.

La ditta ha appena ricevuto le richieste di acquisto da parte di tre clienti, con una data di consegna ravvicinata. Però non è in grado di accettare tutti tre gli ordini, perché non ha sufficiente capacità produttiva, visti gli impegni già presi precedentemente. In particolare, il primo cliente richiede 3 aeroplani, il secondo 2, il terzo 5. La ditta dovrà quindi, per ogni cliente, decidere se accettare il suo ordine e in caso affermativo stabilire se produrre tutti gli aeroplani richiesti o solo alcuni.

I dati sono riportati nella tabella. La prima riga contiene i costi di *start-up* necessari per iniziare la produzione richiesta da ogni cliente. La seconda riga indica i profitti ottenuti dalla vendita di ogni singolo aereo prodotto (prezzo di vendita meno costo unitario di produzione). La terza riga mostra la percentuale di capacità produttiva disponibile che sarebbe utilizzata per produrre ogni aereo.

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
Costo di <i>start-up</i>	\$ 3 milioni	\$ 2 milioni	\$ 0
Profitti unitari	\$ 2 milioni	\$ 3 milioni	\$ 0,8 milioni
Capacità produttiva usata	20 %	40 %	20 %

Scrivete un programma lineare intero per decidere quanti aeroplani produrre per ogni cliente, volendo massimizzare il profitto totale della ditta.

6 – Cammino minimo con variante 1

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con costi positivi associati agli archi. Siano fissati due nodi distinti v_1 e v_2 ed un sottoinsieme Q dell'insieme dei nodi, non contenente né v_1 né v_2 . Si chiede di scrivere un programma lineare intero per individuare un cammino di costo minimo da v_1 a v_2 , senza nodi ripetuti, in cui almeno la metà dei nodi visitati appartenga all'insieme Q .

7 – Cammino minimo con variante 2

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con costi positivi associati agli archi. Siano fissati due nodi distinti v_1 e v_2 ed un sottoinsieme Q dell'insieme dei nodi, non contenente né v_1 né v_2 . Si chiede di scrivere un programma lineare intero per individuare un cammino di costo minimo da v_1 a v_2 , senza nodi ripetuti, che visiti almeno la metà dei nodi appartenenti all'insieme Q .

8 – Indipendente di peso massimo

Si consideri un grafo $G = (V, E)$ non orientato con pesi associati ai nodi.

Un sottoinsieme U dell'insieme dei nodi V è detto *indipendente* se non contiene nodi adiacenti, cioè se, per ogni paio di nodi u e v in U , la coppia (u, v) non appartiene ad E .

Il peso di un indipendente è la somma dei pesi dei suoi nodi.

Considerare il problema di determinare un indipendente di peso massimo nel grafo G .

1. Formulare questo problema con un programma lineare intero.
2. Riscrivere esplicitamente la formulazione del punto precedente applicata al grafo $K_{2,3}$, cioè al grafo bipartito completo con due vertici da una parte della bipartizione e tre dall'altra.
3. Scrivere la matrice dei vincoli del punto precedente e riconoscere il tipo di matrice.
4. Dire se il programma ottenuto è risolvibile con le tecniche standard per la PL (simplex).

9 – Scuola estiva

Uno studente deve frequentare una scuola estiva della durata di un giorno, durante la quale verranno tenuti sette seminari. Lo studente è tenuto a seguire quattro di questi seminari e non ha alcuna intenzione di seguirne di più. Ogni seminario dura un'ora, ma, a causa del gran numero di studenti presenti, verrà ripetuto ad ogni ora tra le 9:00 e le 17:00, da diversi docenti. La preferenza dello studente su quali sessioni seguire dipende della reputazione del docente e dall'orario della lezione, ed è espressa da valori numerici noti.

1. Formulate come programma lineare intero il problema di selezionare le sessioni da seguire, in modo che non vi siano sovrapposizioni e che la somma delle preferenze dello studente sia massimizzata.
2. Modificate la formulazione in modo che lo studente non abbia mai più di due ore di lezione consecutive.
3. Modificate la formulazione in modo che lo studente abbia almeno tre ore libere o in mattinata (9:00--13:00) o nel pomeriggio (13:00-17:00).

10 – Problema delle regine

Considerate una scacchiera con 8 righe e 8 colonne. Formulate come programma lineare intero il problema di collocare sulla scacchiera il massimo numero di regine in modo tale che nessuna di esse ne possa catturare un'altra con una singola mossa. (A scacchi, la mossa della regina consiste nello spostarsi di un numero arbitrario di caselle lungo una riga, una colonna, o parallelamente ad una diagonale. La cattura avviene quando un pezzo si sposta su una casella occupata da un altro pezzo.)

11 – Call center

Una compagnia di telecomunicazioni ha n call center. Ciascun call center i , $i=1, \dots, n$, ha una capacità di C_i chiamate che possono essere gestite in un giorno dagli operatori. Tenere aperto il call center i comporta un costo fisso giornaliero f_i . Ogni chiamata gestita dal call center i comporta un costo (stimato) v_i .

Ci sono m tipi di chiamate (domande concernenti i servizi di telefonia fissa, telefonia mobile, internet, ecc.). Ogni giorno vi sono D_j chiamate di tipo j , per $j=1, \dots, m$.

La compagnia vuole decidere quali call center tenere aperti e quali chiudere, e quante chiamate di tipo j debbano ricevere risposta da operatori del call center i , in modo da soddisfare tutte le domande senza eccedere la capacità, minimizzando i costi.

1. Formulate il problema come un programma lineare intero misto
2. Aggiungete un vincolo che stabilisca che ciascun call center può rispondere a chiamate di al più quattro tipi diversi.
3. L'apertura del call center numero 2 non è possibile nel caso in cui vengano aperti sia il call center numero 1 che il numero 4. Modificate la formulazione in modo da imporre questa condizione.