RICERCA OPERATIVA - Laurea Magistrale in Matematica - A.A. 2019/20

Esercizi su dualità e analisi della sensitività

[1] Si consideri il seguente programma lineare:

$$max\ x_1 + x_2$$

$$\text{soggetto a} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 3 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{array}$$

e la sua soluzione ottima di base $\bar{x} = (3, 3, 0, 0)^t$.

(a) Si individui la base B associata alla soluzione $\bar{x}$, si scriva la matrice A_B, si calcoli la sua inversa A_B^{-1}.

(b) Si modifichino i coefficienti delle variabili x_1 e x_2 nella funzione obiettivo: in particolare si ponga $c_1 = 1+\alpha$ e $c_2 = 1+\alpha$. Determinare i valori del parametro reale α che mantengono invariata la soluzione ottima.

(c) Si ritorni alla funzione obiettivo originaria e invece si modifichi il termine noto del secondo vincolo, ponendo $b_2 = 3 + \beta$. Determinare i valori del parametro reale β che mantengono invariata la base ottima.

[2] Si supponga di aver risolto il seguente programma lineare:

$$max\ -x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\text{soggetto a} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{array}$$

e di aver ottenuto il seguente tableau ottimo:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 10/3 & 0 & 0 & 5/3 & 13/3 \\ \hline 0 & 5/3 & 1 & 0 & 1/3 & 17/3 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \end{array}$$

(a) Si scrivano la base ottima B, la soluzione ottima, la matrice A_B e la matrice A_B^{-1} associate al tableau ottimo.

(b) Si scriva il duale del problema dato.

(c) Si ricavi una soluzione ottima del duale.

(d) Si modifichi il termine noto del primo vincolo, ponendolo uguale a $5 + \beta$. Per quali valori del parametro reale β la base ottima rimane tale? In corrispondenza di tali valori, come varia il valore ottimo del problema in funzione di β?

(e) Si modifichi invece il coefficiente della variabile x_2 nella funzione oggetto, ponendolo uguale a $1 + \alpha$. Per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima non cambia?

[**3**] Si consideri il seguente programma lineare

$$max\, x_1 - 2\,x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ & 2\,x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) E' noto che l'insieme di indici $B = \{1, 4\}$ fornisce una base ottima. Si calcoli la relativa soluzione ottima di base.

(b) Dire per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima resta invariata se il vettore dei coefficienti della funzione oggetto viene sostituito con $c = (1, -2, -1, \alpha)^t$.

(c) Dire per quali valori del parametro reale β la base ottima resta invariata se il vettore dei termini noti viene sostituito con $b = (9 + \beta, 6 + \beta)^t$. Dire qual è la nuova soluzione ottima se $b = (15, 12)^t$.

(d) Dire per quali valori del parametro reale γ la base ottima resta tale se, contemporaneamente, il vettore dei coefficienti della funzione oggetto viene sostituito con $c = (1, -2, -1-\gamma, 0)^t$ e il vettore dei termini noti viene sostituito con $b = (9 + \gamma, 6 - \gamma)^t$.

[**4**] Si consideri il seguente programma lineare P:

$$max\, x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Disegnare la regione ammissibile di P e ricavare graficamente la sua soluzione ottima.

(b) Individuare la soluzione ottima e la base ottima del programma trasformato in forma standard.

(c) Modificare il termine noto del primo vincolo in $15+\beta$ e quello del secondo vincolo in $24+\beta$. Come cambia la regione ammissibile del problema originario P al variare del parametro reale β? Per quali valori di β la regione ammissibile è un triangolo? E per quali valori di β è vuota? Stabilire per quali valori di β la base individuata al punto precedente resta ottima. Stabilire anche come varia il valore ottimo del problema in funzione di β.

(d) Tornare ai termini noti originari e modificare invece la funzione oggetto, ponendola uguale a $c_1 x_1 + x_2$. Determinare l'intervallo di valori entro cui può variare il parametro reale c_1 affinché la soluzione determinata al punto (b) rimanga ottima.

[5] Dato il seguente programma lineare P:

$$
\begin{array}{rl}
max & -x_1 - 2\,x_2 + x_3 - 4\,x_4 \\
\text{soggetto a} & 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 - \;x_4 = 6 \\
& -x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 2 \\
& x_1, \dots, x_4 \geq 0,
\end{array}
$$

si consideri la base $B = \{1, 3\}$.

(a) Calcolare la soluzione di base associata alla base B, verificare che è ottima e calcolare il valore ottimo del programma P.

(b) Scrivere il programma D duale di P e trovare una sua soluzione ottima e il suo valore ottimo.

(c) Supponiamo di modificare i coefficienti della funzione obiettivo trasformandoli nel vettore $(-1+\alpha, -2+\alpha, 1+\alpha, -4+\alpha)^t$, cioè aggiungiamo α ad ogni componente. Per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima di P resta ottima nel problema modificato?

(d) Supponiamo adesso di fare una diversa modifica dei coefficienti della funzione obiettivo trasformandoli nel vettore $(-\alpha, -2\alpha, \alpha, -4\alpha)^t$, cioè moltiplichiamo per α ogni componente. Per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima di P resta ottima nel problema modificato?

(e) Ripristiniamo i valori della originaria funzione obiettivo, e invece modifichiamo il termine noto del secondo vincolo, ponendolo uguale a $2 + \beta$. Per quali valori del parametro β la base ottima per il programma iniziale resta ancora ottima? In corrispondenza di tali valori, come cambiano le coordinate della soluzione ottima? Qual è l'espressione che lega il valore ottimo del problema modificato al parametro β?