Esercizi Programmazione Non Lineare

1. Si dimostri che se la funzione

$$f(x) = x^T Q x + c^T x + d$$

ha matrice Q definita positiva, allora $f(x)$ è coerciva su R^n.

2. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in R^m$. Quali condizioni devono essere verificate affinché la funzione:

$$f(x) = \|Ax - b\|^2,$$

sia coerciva?

3. Si descrivano le direzioni ammissibili per il caso di insieme ammissibile costituito da vincoli di disuguaglianza lineari.

4. Descrivete, se possibile, la direzione di discesa ottenuta ad una generica iterazione k dell'algoritmo di Frank-Wolfe per l'insieme

$$C = \{x \in R^n : \|x\|^2 <= 1\}.$$

5. Considerate il seguente problema:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in R^n} c^T x \\ s.t. \quad &\|x\|_1 \leq 1, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Descrivete le proprietà del problema e calcolate, se possibile, la sua soluzione.

6. Si dia la definizione di inviluppo convesso e si calcoli l'inviluppo convesso nell'intervallo $[0, 90]$ per la funzione

$$f(x) = \log_{10}(x + 10).$$

7. Si consideri il problema:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}$$

con $f, g, h : R^n \to R$. Dire quali tra i punti $x_2, \ldots, x_5$ riportati nella seguente tabella sono dominati dal punto x_1 (motivando la risposta).

x_i	$f(x_i)$	$g(x_i)$	$h(x_i)$
x_1	0.7	-0.3	0
x_2	0.6	-0.1	0
x_3	0.1	0.001	0.0005
x_4	-1.5	0	0.0001
x_5	0.8	-0.005	0

8. Considerate il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in R^n} \sum\limits_{i=1}^{n} (1 - e^{-\alpha x_i}) & \\ s.t. \quad Ax = b, & \\ \qquad\; x \geq 0 & \end{array} \tag{2}$$

con $A \in R^{m \times n}$. Descrivete le proprietà del problema e un metodo di ottimizzazione globale per la risoluzione dello stesso.

9. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{array}{l} \min\limits_{x \in R^n} x^T Q x + \sum\limits_{i=1}^{n} \{\log[x_i + \epsilon] + \log[(1 - x_i) + \epsilon]\} \\ s.t. \quad Ax \geq b, \\ \qquad 0 \leq x \leq e \end{array} \tag{3}$$

con $Q \in R^{n \times n}$ matrice definita positiva, $0 < \epsilon << 1$, $A \in R^{m \times n}$ e $b \in R^m$. Si descrivano le proprietà del problema e un metodo di ottimizzazione per la risoluzione dello stesso.

10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{w \in R^m} & \frac{1}{l} \sum\limits_{i=1}^{l} e^{-\rho (Aw)_i y_i} \\ \text{s.a} & e^T w = 1 \\ & w \geq 0, \end{array} \tag{4}$$

con $A \in R^{l \times m}$, $y \in R^m$ e $\rho > 0$ parametri opportunamente scelti. Si descrivano le proprietà del problema e un metodo di ottimizzazione per la risoluzione dello stesso.