Soluzioni
Esercizi Programmazione Non Lineare

1. Si dimostri che se la funzione

$$f(x) = x^T Qx + c^T x + d$$

ha matrice Q definita positiva, allora $f(x)$ è coerciva su R^n.

Soluzione. Indichiamo con $\{x_k\}$ una successione in R^n e con λ_m il minimo autovalore di Q. Possiamo scrivere

$$f(x_k) \geq \frac{\lambda_m}{2}\|x_k\|^2 - \|c\|\|x_k\| = \left(\frac{\lambda_m}{2}\|x_k\| - \|c\|\right)\|x_k\|.$$

Se $\|x_k\| \to \infty$, si avrà, per k sufficientemente grande,

$$\frac{\lambda_m}{2}\|x_k\| - \|c\| > 0.$$

Dunque

$$f(x_k) \to \infty$$

ed f è coerciva.

2. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in R^m$. Quali condizioni devono essere verificate affinché la funzione:

$$f(x) = \|Ax - b\|^2,$$

sia coerciva?

Soluzione. Notiamo innanzitutto che la matrice Hessiana associata al problema è $2\left(A^T A\right)$. Dalla risposta relativa al quesito 1, si evince facilmente che se la matrice A ha colonne linearmente indipendenti, la funzione f è coerciva.

3. Si descrivano le direzioni ammissibili per il caso di insieme ammissibile costituito da vincoli di disuguaglianza lineari.

   Soluzione. Consideriamo l'insieme ammissibile

   $$P = \{x \in R^n : \ a_i^T x \leq b_i, \ i = 1, \dots, \ n\}.$$

   Indichiamo con $I(x^*)$ l'insieme dei vincoli attivi in x^*, ossia:

   $$I(x^*) = \{i : a_i^T x^* = b_i\}.$$

   Risulta molto semplice vedere che un vettore non nullo d è direzione ammissibile per P in x^* se e solo se

   $$a_i^T d \leq 0$$

   per ogni $i \in I(x^*)$.

4. Descrivete, se possibile, la direzione di discesa ottenuta ad una generica iterazione k dell'algoritmo di Frank-Wolfe per l'insieme

   $$C = \{x \in R^n : \|x\|^2 <= 1\}.$$

   Soluzione. Il problema di Frank-Wolfe può essere scritto nella maniera seguente:

   $$\begin{array}{ll} \min & \nabla f(x_k)^\top x \\ s.t. & \|x\|^2 \leq 1. \end{array}$$

   Facile vedere che il problema ha soluzione:

   $$\hat{x}_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|_2}.$$

   La direzione di discesa è dunque $d_k = \hat{x}_k - x_k$.

5. Considerate il seguente problema:

   $$\begin{array}{ll} \min_{x \in R^n} c^T x & \\ & \\ s.t. \quad \|x\|_1 \leq 1, & \\ \qquad\quad x \geq 0 & \end{array} \tag{1}$$

   Descrivete le proprietà del problema e calcolate, se possibile, la sua soluzione.

Soluzione. L'insieme ammissibile del Problema (1) può essere scritto in maniera equivalente come segue:

$$P = \{x \in R^n : \ e^T x \le 1, \ x \ge 0\} = conv\{\mathbf{0}, e_1, \dots, e_n\}.$$

Abbiamo dunque un semplice problema di PL, la cui soluzione ottima sarà $\mathbf{0}$ se $c_i \ge 0, i = 1, \dots, n$ e e_l con $l \in \arg\min_i c_i$, altrimenti.

6. Si dia la definizione di inviluppo convesso e si calcoli l'inviluppo convesso nell'intervallo $[0, 90]$ per la funzione

$$f(x) = \log_{10}(x + 10).$$

Soluzione. Per la definizione di inviluppo convesso, si rimanda lo studente alle note disponibili sulla homepage del corso. L'inviluppo convesso in questo caso è il segmento congiungente i punti $(0, 1)$ e $(90, 2)$.

7. Si consideri il problema:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g(x) \le 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}$$

con $f, g, h : R^n \to R$. Dire quali tra i punti $x_2, \dots, x_5$ riportati nella seguente tabella sono dominati dal punto x_1 (motivando la risposta).

x_i	$f(x_i)$	$g(x_i)$	$h(x_i)$
x_1	0.7	-0.3	0
x_2	0.6	-0.1	0
x_3	0.1	0.001	0.0005
x_4	-1.5	0	0.0001
x_5	0.8	-0.005	0

Soluzione. In questo caso consideriamo la seguente misura della violazione:

$$h(x) = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\} + \sum_{j=1}^{q} |h_j(x)|.$$

Sappiamo che una coppia $(f^p, h^p) = (f(x^p), h(x^p))$ *domina* un'altra coppia (f^l, h^l) se

$$f^p \le f^l$$

e

$$h^p \le h^l.$$

L'unico punto dominato da x_1 è dunque x_5.

8. Considerate il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} & \sum_{i=1}^{n} (1 - e^{-\alpha x_i}) \\ s.t. \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

con $A \in R^{m \times n}$. Descrivete le proprietà del problema e un metodo di ottimizzazione globale per la risoluzione dello stesso.

Soluzione. La funzione obiettivo è concava e continuamente differenziabile e l'insieme ammissibile è poliedrale. Dovendo risolvere un problema di ottimizzazione concava, è opportuno utilizzare un approccio di ottimizzazione globale. Se le dimensioni del problema sono contenute, possiamo utilizzare un metodo deterministico. Nel caso di problemi a grandi dimensioni, si può optare per un approccio probabilistico (e.g., BH/ILS in cui la ricerca locale è effettuata utilizzando Frank-Wolfe con passo unitario).

9. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} & \, x^T Q x + \sum_{i=1}^{n} \{\log[x_i + \epsilon] + \log[(1 - x_i) + \epsilon]\} \\ s.t. \quad & Ax \geq b, \\ & 0 \leq x \leq e \end{aligned} \tag{3}$$

con $Q \in R^{n \times n}$ matrice definita positiva, $0 < \epsilon << 1$, $A \in R^{m \times n}$ e $b \in R^m$. Si descrivano le proprietà del problema e un metodo di ottimizzazione per la risoluzione dello stesso.

Soluzione. La funzione obiettivo è data dalla somma di una quadratica strettamente convessa e una funzione concava (somma di funzioni concave univariate) continuamente differenziabile e l'insieme ammissibile è poliedrale. Anche in questo caso è opportuno utilizzare un approccio di ottimizzazione globale. Se le dimensioni del problema sono contenute, possiamo utilizzare un metodo deterministico. Nel caso di problemi a grandi dimensioni, si può optare per un approccio probabilistico (e.g., BH/ILS in cui la ricerca locale è effettuata utilizzando Frank-Wolfe con ricerca unidimensionale di Armijo).

10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min_{w\in R^m} \quad & \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} e^{-\rho(Aw)_i y_i} \\ \text{s.a} \quad & e^T w = 1 \\ & w \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

con $A \in R^{l\times m}$, $y \in R^m$ e $\rho > 0$ parametri opportunamente scelti. Si descrivano le proprietà del problema e un metodo di ottimizzazione per la risoluzione dello stesso.

Soluzione. Facile verificare che la funzione obiettivo è convessa e continuamente differenziabile. Dovendo in questo caso risolvere un problema di ottimizzazione convesso con insieme ammissibile molto semplice (simplesso unitario), possiamo utilizzare un metodo di ottimizzazione locale come Frank-Wolfe con ricerca unidimensionale di Armijo o il Gradiente Proiettato (il costo della proiezione è in questo caso contenuto).