

Esercizi su dualità e analisi della sensitività

[1] Si consideri il seguente programma lineare:

$$\begin{aligned} & \max x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_3 = 3 \\ & -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

e la sua soluzione ottima di base $\bar{x} = (3, 3, 0, 0)^t$.

- Si individui la base B associata alla soluzione $\bar{x}$, si scriva la matrice A_B , si calcoli la sua inversa A_B^{-1} .
- Si modifichino i coefficienti delle variabili x_1 e x_2 nella funzione obiettivo: in particolare si ponga $c_1 = 1 + \alpha$ e $c_2 = 1 + \alpha$. Determinare i valori del parametro reale α che mantengono invariata la soluzione ottima.
- Si ritorni alla funzione obiettivo originaria e invece si modifichi il termine noto del secondo vincolo, ponendo $b_2 = 3 + \beta$. Determinare i valori del parametro reale β che mantengono invariata la base ottima.

[2] Si supponga di aver risolto il seguente programma lineare:

$$\begin{aligned} & \max -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

e di aver ottenuto il seguente tableau ottimo:

1	10/3	0	0	5/3	13/3
0	5/3	1	0	1/3	17/3
0	-1/3	0	1	-2/3	2/3

- Si scrivano la base ottima B , la soluzione ottima, la matrice A_B e la matrice A_B^{-1} associate al tableau ottimo.
- Si scriva il duale del problema dato.
- Si ricavi una soluzione ottima del duale.
- Si modifichi il termine noto del primo vincolo, ponendolo uguale a $5 + \beta$. Per quali valori del parametro reale β la base ottima rimane tale? In corrispondenza di tali valori, come varia il valore ottimo del problema in funzione di β ?
- Si modifichi invece il coefficiente della variabile x_2 nella funzione oggetto, ponendolo uguale a $1 + \alpha$. Per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima non cambia?

[3] Si consideri il seguente programma lineare

$$\begin{aligned} & \max x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) E' noto che l'insieme di indici $B = \{1, 4\}$ fornisce una base ottima. Si calcoli la relativa soluzione ottima di base.
- (b) Dire per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima resta invariata se il vettore dei coefficienti della funzione oggetto viene sostituito con $c = (1, -2, -1, \alpha)^t$.
- (c) Dire per quali valori del parametro reale β la base ottima resta invariata se il vettore dei termini noti viene sostituito con $b = (9 + \beta, 6 + \beta)^t$. Dire qual è la nuova soluzione ottima se $b = (15, 12)^t$.
- (d) Dire per quali valori del parametro reale γ la base ottima resta tale se, contemporaneamente, il vettore dei coefficienti della funzione oggetto viene sostituito con $c = (1, -2, -1 - \gamma, 0)^t$ e il vettore dei termini noti viene sostituito con $b = (9 + \gamma, 6 - \gamma)^t$.

[4] Si consideri il seguente programma lineare P :

$$\begin{aligned} & \max x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Disegnare la regione ammissibile di P e ricavare graficamente la sua soluzione ottima.
- (b) Individuare la soluzione ottima e la base ottima del programma trasformato in forma standard.
- (c) Modificare il termine noto del primo vincolo in $15 + \beta$ e quello del secondo vincolo in $24 + \beta$. Come cambia la regione ammissibile del problema originario P al variare del parametro reale β ? Per quali valori di β la regione ammissibile è un triangolo? E per quali valori di β è vuota? Stabilire per quali valori di β la base individuata al punto precedente resta ottima. Stabilire anche come varia il valore ottimo del problema in funzione di β .
- (d) Tornare ai termini noti originari e modificare invece la funzione oggetto, ponendola uguale a $c_1 x_1 + x_2$. Determinare l'intervallo di valori entro cui può variare il parametro reale c_1 affinché la soluzione determinata al punto (b) rimanga ottima.

[5] Dato il seguente programma lineare P :

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

si consideri la base $B = \{1, 3\}$.

- (a) Calcolare la soluzione di base associata alla base B , verificare che è ottima e calcolare il valore ottimo del programma P .
- (b) Scrivere il programma D duale di P e trovare una sua soluzione ottima e il suo valore ottimo.
- (c) Supponiamo di modificare i coefficienti della funzione obiettivo trasformandoli nel vettore $(-1 + \alpha, -2 + \alpha, 1 + \alpha, -4 + \alpha)^t$, cioè aggiungiamo α ad ogni componente. Per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima di P resta ottima?
- (d) Supponiamo adesso di fare una diversa modifica dei coefficienti della funzione obiettivo trasformandoli nel vettore $(-\alpha, -2\alpha, \alpha, -4\alpha)^t$, cioè moltiplichiamo per α ogni componente. Per quali valori del parametro reale α la soluzione ottima di P resta ottima?
- (e) Ripristiniamo i valori della originaria funzione obiettivo, e invece modifichiamo il termine noto del secondo vincolo, ponendolo uguale a $2 + \beta$. Per quali valori del parametro β la base ottima per il programma iniziale resta ancora ottima? In corrispondenza di tali valori, come cambiano le coordinate della soluzione ottima di P ? Qual è l'espressione che lega il valore ottimo di P al parametro β ?