

Esercizi su formulazioni e su piani di taglio

[1] Si consideri il seguente programma lineare intero P_I :

$$\begin{aligned} & \max 5.5x_1 + 2.1x_2 \\ \text{soggetto a } & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ intere.} \end{aligned}$$

1. Disegnare la regione ammissibile di P_I e del suo rilassamento lineare.
2. Scrivere la forma standard P_L del rilassamento lineare di P_I .
3. Risolvendo P_L con il simplex, si trova che la base ottima è individuata dalle variabili x_1 e x_2 . Scrivere la matrice base A_B , calcolare la sua inversa e la soluzione ottima associata.
4. Ricavare i due tagli (in realtà coincidenti) associati alle due componenti frazionarie della soluzione ottima di P_L .
5. Disegnare questo taglio nel grafico.
6. Inserendo l'equazione di questo taglio nella formulazione di P_L , si ottiene un nuovo programma lineare. Lo si può risolvere con il simplex (duale), e si ottiene questa volta la base ottima formata dalle prime tre variabili. Calcolare la sua soluzione ottima e ricavare due tagli (anche in questo caso risultano coincidenti).
7. Disegnare anche il nuovo taglio nel grafico.

[2] Considerare il seguente problema di *cutting stock*.

Un'azienda produce rotoli di carta di vari tipi per i suoi clienti. Un tipo viene prodotto in rotoli standard (*rotolini*), che sono larghi 60 cm e lunghi (se srotolati) 200 metri. Gli ordini per questo tipo di carta richiedono rotoli con le seguenti caratteristiche: larghezza pari a 12, 15, 20, 24, 30 o 40 cm, lunghezza pari a 200 metri. Ogni settimana, l'azienda aspetta di raccogliere tutti gli ordini e poi decide come tagliare i suoi rotolini di larghezza 60 cm per soddisfare le richieste.

Per esempio, se ci sono 5 ordini per rotoli di larghezza 15 cm e 2 ordini per rotoli di larghezza 40 cm, l'azienda può soddisfare la sua clientela producendo tre rotolini, tagliando i primi due in modo da ricavare da ciascuno un rotolo da 40 cm e un rotolo da 15 cm (e scartando quindi 5 cm per rotolone), e tagliando il terzo rotolone in quattro parti da 15 cm ciascuna (e scartando una di queste parti).

Ogni settimana l'azienda deve decidere la sua strategia di produzione, cioè quanti rotolini produrre e come tagliarli. In particolare vuole produrre il minor numero possibile di rotolini, ma vuole anche soddisfare le richieste della clientela, che per la prossima settimana sono indicate nella tabella seguente.

formato	12	15	20	24	30	40
quantità richieste	48	19	22	32	14	7

Individuare tutti i possibili schemi di taglio e scrivere la formulazione lineare intera associata.

[3] E' dato il seguente programma P_I lineare intero:

$$\begin{aligned} \max & -x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{soggetto a} & \begin{aligned} x_1 + x_3 - 2x_4 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 3x_4 &= 8 \\ x_j &\in \mathbb{Z}_+ \forall j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \end{aligned}$$

Dopo aver risolto il suo rilassamento lineare con il simplex, si sa che la base ottima è $\{3, 4\}$ e i vincoli nel tableau ottimo sono espressi nella seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3 & = & \frac{31}{3} \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_4 & = & \frac{8}{3} \end{array} \right.$$

1. Ricavare due tagli di Gomory.
2. Risolvendo con il simplex (duale) il rilassamento lineare con la aggiunta del secondo taglio generato, si trova che la base ottima è $\{2, 3, 4\}$. Qual è la soluzione ottima corrispondente? E' anche la soluzione ottima del programma P_I iniziale?

[4] Considerate il seguente programma lineare intero P_I :

$$\begin{aligned} \max & x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} & \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ intere.} \end{aligned} \end{aligned}$$

1. Disegnate la regione ammissibile di P_I e del suo rilassamento lineare P_L .
2. Ricavate la soluzione ottima di P_L dal grafico; trasformate P_L in forma standard, stabilite qual è la base ottima, individuate la matrice A_B associata alla base ottima e calcolate la sua inversa.
3. Premoltiplicate i vincoli di P_L in forma standard per A_B^{-1} in modo da esprimere le variabili della base ottima in funzione delle altre variabili.
4. Ricavate due tagli di Gomory dal sistema individuato al punto precedente e disegnateli nel grafico.