Exercices d'Analyse Complexe - MaPC41

1. Le plan complexe

Exercice 1.1. *Trouver la partie réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :*

$$\frac{1}{1-i}$$
$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$$
$$\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$
$$\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$$
$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$$

Exercice 1.2. *Trouver module et argument des nombres complexes suivants :*

$$i$$
$$-3$$
$$1+i^{123}$$
$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{1-i}{1+i}$$
$$-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$$
$$(-4+3i)^3$$
$$(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$$

Exercice 1.3. *Faire des dessins des sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C}$ suivants :*

$$\{z\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)|\geq 1\}$$
$$\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq\sqrt{2}\}$$
$$\{z\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)|\geq 1\}\cap\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq\sqrt{2}\}$$
$$\{z\in\mathbb{C} \mid |z-i|=1\}$$
$$\{z\in\mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4}<\arg(z)<\frac{\pi}{4}\}$$
$$\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)>0\}$$
$$\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z)\leq 1\}$$
$$\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq 1\}$$
$$\{z\in\mathbb{C} \mid |z-i|<1\}$$
$$\{z\in\mathbb{C} \mid 0<\arg(z)<\frac{\pi}{4}\}$$

Exercice 1.4. *Le produit scalaire entre deux vecteurs* $v = (x, y)$ *et* $w = (\tilde{x}, \tilde{y})$ *de* $\mathbb{R}^2$ *est donné par la formule*

$$v \cdot w = (x, y) \cdot (\tilde{x}, \tilde{y}) = x\tilde{x} + y\tilde{y}.$$

Une rotation $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *d'un angle* θ *autour de l'origine du plan est une application lineaire representée par une matrice*

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

donc

$$R(v) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Verifier que la rotation R *preserve le produit scalaire entre vecteurs, c'est à dire*

$$v \cdot w = R(v) \cdot R(w).$$

Montrer aussi que la multiplication complexe par $e^{i\theta}$ *d'un nombre complexe* $z = x + iy$ *correspond à une rotation du vecteur réel* (x, y) *d'un angle* θ.

2. Series entieres

Exercice 2.1. *Trouver le rayon de convergence des series entieres suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\log(n+2)]^k z^n, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\alpha}}, \qquad \alpha > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn)!}{n!(n+1)! \dots (n+k-1)!} z^n, \qquad k \in \mathbb{N}$$

3. Fonctions holomorphes

Exercice 3.1. *Soit* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, *où* $u(x, y)$ *e* $v(x, y)$ *sont fonctions réelles et* $z = x + iy$. *On definit*

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Montrer que, si $f(z)$ *est holomorphe, alors*

$$\Delta(|f|^2) \geq 0$$

[hint : calculer explicitement $\Delta(u^2 + v^2)$ *et utiliser le fait que, si* $f(z)$ *est holomorphe, alors on sait que*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

]

Exercice 3.2. *Montrer que l'equation de Laplace pour une fonction complexe $f(z)$, où $z = x + iy$,*

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

est equivalente à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

Exercice 3.3. *Calculer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ pour les fonctions suivantes :*

$$f(z) = |z|$$

$$f(z) = |z-a|^p, \qquad a \in \mathbb{C}, \qquad -\infty < p < \infty$$

$$f(z) = \sqrt{|z-a|^2 + |z-b|^2}$$

Exercice 3.4. *Etant donnée une fonction holomorphe $f(z)$, montrer que :*

$$\frac{\partial}{\partial z}(|f(z)|) = \frac{1}{2}|f(z)|\frac{f'(z)}{f(z)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Re} f(z) = \frac{1}{2} f'(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Im} f(z) = \frac{1}{2i} f'(z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(1 + |f(z)|^2) = \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}$$

Exercice 3.5. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$. En utilisant le principe du prolongement analytique, montrer que, si $f(z) - f(2z) = 0$, alors $f(z)$ est une fonction constante.*

[hint : rappeller que le principe du prolongement analytique dit que les zeros d'une fonction $f(z)$ holomorphe sont isolés si et seulement si $f(z) \neq 0$]

4. Integrales complexes

Exercice 4.1. *Soit $f(z)$ holomorphe sur $-a < \mathrm{Im} z < a$, telle que $\lim_{\substack{|z| \to \infty \\ -a < \mathrm{Im} z < a}} f(z) = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx < \infty$. Montrer que $\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(z)dz < \infty$ si $-a < \alpha < a$ et que la valeur de cette integrale ne depend pas de α.*

Exercice 4.2. *En utilisant l'exercice precedent et en se souvenant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x) dx, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

.

Exercice 4.3. *Soit $f(z)$ holomorphe sur $-a < \arg z < a < \pi$ et telle que*

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ |\arg z| < a}} z f(z) = 0$$

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ |\arg z| < a}} z f(z) = 0$$

et $\int_0^{+\infty} f(x)dx < \infty$. Montrer que $\int_{\arg z = \alpha} f(z)dz < \infty$ si $-a < \alpha < a$ et que la valeur de cette integrale ne depend pas de α.

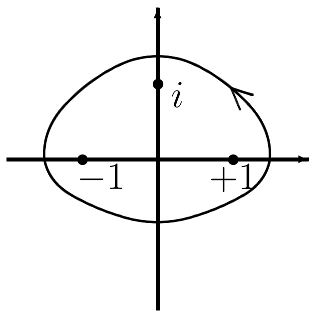
Exercice 4.4. *En utilisant l'exercice precedent et en se souvenant que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ calculer les integrales (dites "de Fresnel") $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ et $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$.*

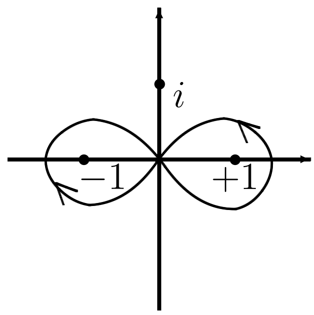
5. Formule integrale de Cauchy

Exercice 5.1. *Calculer l'intégrale de chemin*

$$\oint_\gamma \frac{z^2+1}{(z^2-1)(z-i)} dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ suivants :



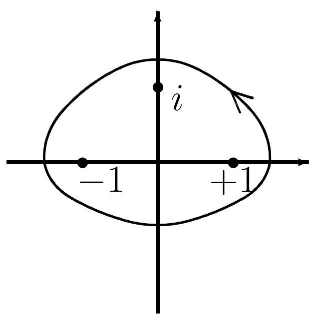


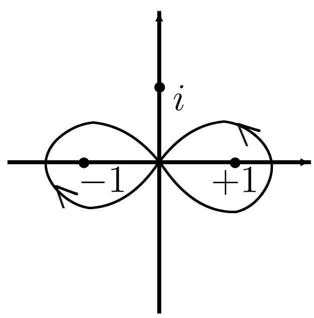
Est-il possible de deformer le premier chemin en l'autre sans sortir du domaine d'holomorphie de la fonction integrande ?

Exercice 5.2. *Calculer l'intégrale de chemin*

$$\oint_\gamma \frac{z}{(z^2-1)(z-i)} dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ suivants :

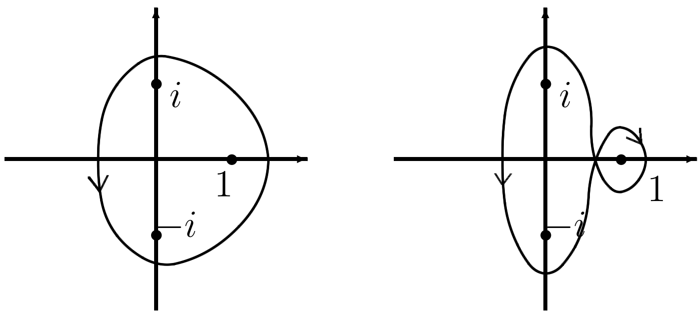




Exercice 5.3. *Calculer l'intégrale de chemin*

$$\oint_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)(z-1)}dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ *suivants :*



Exercice 5.4. *Calculer les integrales suivants :*

$$\oint_{|z+i|=3} \frac{\sin(z)}{z+i}dz$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}dz$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}dz$$

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz$$

$$\oint_{|z+1|=1} \frac{1}{(1+z)(z-1)^3}dz$$

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$$

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}dz, \qquad a,b\in\mathbb{C}, \quad |a|<r<|b|, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\oint_{\partial D} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$$

pour le domaines suivants :

$$a)\ D=\{|z|<\frac{1}{2}\} \qquad b)\ D=\{|z|<\frac{3}{2}\} \qquad c)\ D=\{|z-1|<\frac{1}{2}\}$$

6. Points singuliers isolés

Exercice 6.1. *Trouver le points singuliers et leur type pour le fonctions suivantes :*

$$\frac{z}{\sin z}$$

$$\frac{1-\cos z}{(\sin z)^2}$$

$$z^2\sin\frac{z}{z+1}$$

$$\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}$$

$$\cot z - \frac{1}{z}$$

$$z\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)$$

$$e^{\cot\frac{\pi}{z}}$$

$$\sin e^{\frac{1}{z}}$$

7. Theoreme des residus

Exercice 7.1. *Soit* C_{r,z_0} *le cercle de rayon* r *centré en* $z = z_0$*. Calculer les integrales suivantes :*

$$\oint_{C_{2,0}} \frac{1}{z(z-1)^3}dz$$

$$\oint_{C_{2,0}} \frac{1}{(\sin z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}dz$$

$$\oint_{C_{2,\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{(\sin z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}dz$$

$$\oint_{\gamma} \frac{(\sin z)^2}{z^3-1}dz, \qquad \gamma = \{z=t|-3<t<0\}\cup\{z=it|0<t<3\}\cup(C_{3,0}\cap\{z|\mathrm{Im}z>0,\mathrm{Re}z<0\})$$

Exercice 7.2. *Soit f(z) meromorphe sur* $\{\mathrm{Im}z>0\}$ *avec poles* $z=a_1,\dots,a_n$*, continue jusq'à l'axe réel et telle que*

$$\lim_{\substack{|z|\to 0\\ \mathrm{Im}z>0}} zf(z) = 0.$$

Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}_{z=a_k}f(z)$$

Exercice 7.3. *Calculer les integrales suivantes :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(a+bx^2)^n}dx, \qquad a>0, b>0,\ n\in\mathbb{N}$$

Exercice 7.4. *Calculer, en utilisant le lemme de Jordan, les intégrale suivantes :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^3}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+2ix-2)^2}dx$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{zt}}{(z^2-1)^2}dz, \qquad \textit{pour : a) } t>0, \ \textit{b) } t<0$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cosh zt}{(z+1)(z+2)}dz, \qquad t>0$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{z\sin zt}{z^2+1}dz, \qquad t>0$$