

Per una dinamica nei fondamenti

Un modo di concepire matematica e logica
Raccolta degli 'scritti senza formule', 1987-2000

Giovanni Sambin

29 maggio 2005

Indice

1	Alla ricerca della certezza perduta (forma - contenuto nei fondamenti della matematica)	5
1.1	Le sette rivoluzioni	6
1.2	Il problema dei fondamenti	8
1.3	Il programma di Hilbert	9
1.4	La forma del formalismo	14
1.5	Brouwer e Hilbert, scontro di opposti?	18
1.6	Un tentativo di sintesi	20
1.7	La settima rivoluzione	22
1.8	Epilogo	24
2	Per una dinamica nei fondamenti	27
2.1	Introduzione.	28
2.2	Astrazione come attività biologica, mentale e sociale.	30
2.2.1	30
2.2.2	34
2.2.3	44
2.2.4	47
2.3	Intermezzo: definizione antropologica della matematica come scienza stabile.	53
2.4	Il processo dinamico di creazione delle astrazioni matematiche.	55
2.5	Verso un'ecologia della conoscenza matematica.	66
3	Matematica, logica e verità, verso un risanamento	71
4	Verso un costruttivismo dinamico	79
4.1	Una tesi generale	80
4.2	Le domande familiari	82
4.3	Il processo dinamico	83
4.4	Un costruttivismo dinamico	85
4.5	La logica di base	91
4.6	La basic picture	95
4.7	Commenti e problemi aperti	97

Avvertenza

Questa è una prova: ho raccolto tutti i miei scritti “senza formule” in italiano. L’idea è di farne un libro. I primi tre sono già stati pubblicati (nel 1987, nel 1991 e nel 1998), ma saranno da ripulire (in particolare, togliere tutti i commenti che li rendono legati alla situazione). Il quarto è una revisione e traduzione, fatta nel 2000, di *Steps towards a dynamic constructivism*. L’articolo che sento come più importante ha dato il titolo al libro.

Non cambierei nulla del contenuto, salvo forse lo stile di presentazione (ora sembra tutto troppo facile da leggere, ma in realtà è estremamente sintetico). Credo di introdurre delle idee davvero nuove, anche con rilevanza filosofica generale, e non solo per la matematica.

Forse è da aggiungere una introduzione, per aiutare il lettore, fornirgli i “prerequisiti”. Ma non credo sia facile. Oppure è da espandere qualche parte di *Alla ricerca...* fino a farlo diventare una introduzione al tema dei fondamenti. Forse è anche da espandere la parte sui teoremi di incompletezza (la settima rivoluzione).

Se risulta comunque troppo corto, posso aggiungere altre cose che ho in mente: sulla basic logic e l’unità della logica, sui diversi livelli di riferimento (linguaggio - metalinguaggio) come unico modo per spiegare il significato, sulla necessità di vari livelli di astrazione - dentro lo stesso sistema formale - anche per la matematica e per l’intelligenza artificiale, ecc.

Dovrei anche sistemare e tradurre la terza parte di *Some points*, a cui rimando per ora per una attuazione nella pratica matematica delle idee e principi qui introdotti.

Prima di leggere questo testo, controllare in rete al sito www.math.unipd.it/~sambin che sia la versione più recente.

Giovanni Sambin

Padova, settembre 1998 - maggio 2005

Capitolo 1

Alla ricerca della certezza perduta (forma - contenuto nei fondamenti della matematica)

Agilulfo passava, attento, nervoso, altero: il corpo della gente che aveva un corpo gli dava sì un disagio somigliante all'invidia, ma anche una stretta che era d'orgoglio, di superiorità sdegnosa.

I. Calvino, Il cavaliere inesistente

Derivati della parola forma compaiono spesso nella letteratura sui fondamenti della matematica: formula (cioè piccola forma), formalizzazione, logica (sistema, teoria, ecc.) formale, ecc. Come vedremo, la stessa parola Formalismo è il nome di una scuola sui fondamenti. Per questo motivo, quando fui invitato ad intervenire, come logico e matematico, ad un congresso sulla forma¹, dopo qualche dubbio accettai: nel caso peggiore, mi sarei limitato a presentare i principi del formalismo (come cerco di fare nel paragrafo 3), lasciando ad altri, come una domanda aperta, il compito di svelare la connessione tra la forma nei fondamenti della matematica e la forma in filosofia, in psicologia, in biologia, ecc. e nel linguaggio quotidiano.

Ma ogni domanda chiaramente posta pretende risposta. Far emergere la mia risposta non è stato facile; e ancora meno facile è ora cercare di comunicarla e sostenerla. Il linguaggio e la tradizione filosofici qui certamente sarebbero d'aiuto; ma nel mestiere di matematico, anche se come me specializzato in logic and foundations, la speculazione filosofica oggi trova posto soltanto indirettamente, come ispirazione, spesso inconsapevole, per la costruzione di teorie o la dimostrazione di teoremi. Sono così costretto ad affidarmi soltanto alla mia esperienza della matematica ed alla passione, di dilettante, per alcune questioni di natura filosofica poste dai suoi fondamenti. Se nonostante queste difficoltà mi cimento nell'impresa (nei paragrafi 4, 5 e 6), è perché ritengo che alcuni aspetti colti dal punto di osservazione, in un certo senso privilegiato, in cui mi trovo possano costituire materiale vivo per chi più di me ha disposizione per, e consuetudine con, la ricerca filosofica (ma con l'avvertenza di non considerare troppo semplice, oltre al linguaggio, anche la sostanza).

Infine, per dar senso a quanto segue, è necessario mettere in chiaro che, contrariamente ad una opinione diffusa anche tra matematici, non solo esiste un problema dei fondamenti ma

¹Ringrazio dell'invito i promotori del congresso, in particolare Maria Grazia Ciani, Oddone Longo e Giuseppe Scorza.

il suo interesse, oggi in particolare, non è soltanto teorico². Un mito da sfatare è la totale certezza, chiarezza e staticità dei concetti matematici, il cui corollario è una affidabilità assoluta che non prevede discussioni. Ma che la matematica poggi su basi ben ferme e indiscutibili è un'illusione in cui si può cadere solo da un punto di osservazione esterno o schiacciato al tempo presente. Se entrare nel regno della matematica, o dualmente - farla entrare in testa, è un viaggio che non può essere narrato ma solo compiuto, è invece possibile esporne lo sviluppo, e così allargare il campo visivo fino ad includere lo sfondo storico. La seguente brevissima e personalissima panoramica sull'evoluzione storica dei concetti matematici ha il duplice scopo di solleticare eventuali curiosità e di portarci per la via più comoda alla definizione della questione che ci siamo posti.

1.1 Le sette rivoluzioni

Ripercorrendo sinteticamente la storia della matematica, nel susseguirsi di capovolgimenti concettuali e inaspettate scoperte sembra di poter identificare sette avvenimenti che più profondamente hanno inciso sul modo di concepire la matematica stessa, e che perciò possiamo chiamare rivoluzioni.

La prima vera, grande rivoluzione è la nascita, nella Grecia antica, del concetto di dimostrazione. Certo oggi la matematica è talvolta addirittura definita come la scienza delle dimostrazioni, e ogni matematico è ad esse talmente assuefatto che a fatica immagina come si possa farne a meno. Ma è un fatto che le dimostrazioni compaiono in un periodo storico preciso: sono assenti in tutta la matematica preellenica, con Euclide raggiungono piena maturità.

Una breve, semplice dimostrazione, quella dell'impossibilità di commisurare lato e diagonale d'un quadrato, provoca la seconda rivoluzione. Crolla la fede di Pitagora in un Paradiso Numerico in cui tutto è numero, e cominciano per i Greci i problemi con infinito e infinitesimo, continuo e discreto, uno e tutto, ecc. è la prima cacciata dal paradiso. Alla fine di un lungo e acceso dibattito, l'infinito e l'irrazionale sono imbrigliati (ma non domati) nella nitida struttura logico-geometrica di Euclide. Per la seconda volta sembra di aver toccato il paradiso, un Paradiso Geometrico in cui tutta la matematica greca è espressa nel linguaggio unificante della geometria. Si dice che gli Elementi sia il libro che ha avuto più edizioni, dopo la Bibbia. Certamente, per il senso di assoluta precisione e forza intellettuale che esso emana, è considerato per circa due millenni il paradigma della verità ed Euclide, come Aristotele per altri aspetti, venerato come un santo.

Assieme al mondo antico, anche la raffinata struttura concettuale di Euclide si eclissa, e la terza inconsapevole rivoluzione si compie lentamente, umile e silenziosa, più in botteghe e banche che in aule o accademie e nasce dai nuovi bisogni concreti del medioevo. Essa consiste nella costruzione, come risultato di un lunghissimo processo che si conclude assieme al medioevo, di un calcolo algebrico in cui si usano simboli per operazioni, incognite ecc. oltre che per i numeri. Anche a chi non apprezza l'economia di pensiero così ottenuta per

²Il problema dei fondamenti della matematica è a mio parere niente meno che al cuore della scienza, e pertanto di enorme interesse teorico; ma per imprevedibili ricorsi della storia, negli ultimi anni si va affermando l'idea che una sana fondazione della matematica abbia benefici riflessi anche sull'informatica, e quindi che la ricerca filosofica sui fondamenti possa congiungersi direttamente con le applicazioni pratiche. Un esempio emblematico è la teoria degli insiemi intuizionistica, o costruttiva, di Martin-Löf, nata da esigenze filosofiche nel decennio scorso ed ora direttamente implementata su calcolatore.

Nel tentativo di fornire qualche idea anche al lettore inesperto, cercherò di evitare il gergo usato oggi nello studio sui fondamenti della matematica; tuttavia, in alcuni punti specifici un po' d'esperienza è necessaria. Il lettore interessato può cominciare da A. Cantini, I fondamenti della matematica, Loescher 1979, una raccolta di testi con una nota bibliografica ed una breve e chiara introduzione, utile complemento al presente articolo.

la soluzione di problemi concreti, non può sfuggire l'importanza del passaggio dalla parola o dall'immagine geometrica, al puro simbolo, al segno sulla carta.

La quarta rivoluzione è invece, almeno apparentemente, di origine totalmente intellettuale, ed è la sintesi tra geometria e calcolo iniziata da Descartes con la geometria analitica. Più suggestivamente, è il ricollegarsi dell'immagine (geometrica) con il segno (algebrico). Lo sviluppo della matematica è da allora tumultuoso e ininterrotto. Basti ricordare che poco dopo nasce l'analisi infinitesimale, lo strumento principale della matematizzazione della natura e quindi della cosiddetta rivoluzione scientifica moderna. Ma dopo oltre un secolo di travolgenti successi, a cavallo tra il '700 e l' '800 nuove applicazioni e le difficoltà insite nei concetti di infinito e di infinitesimo (naturalmente, assieme a fattori esterni, quali la rivoluzione borghese e industriale, e il conseguente diffondersi dell'istruzione scientifica) inducono un generale ripensamento. È la fase della cosiddetta rigorizzazione dell'analisi, nella quale i ferri del mestiere, cioè i concetti di funzione, serie, integrale, continuità, ecc. vengono affinati (da Cauchy, Fourier, Riemann e tanti altri) fino a liberarli dall'uso degli infinitesimi e infiniti attuali, tramite il concetto di limite (l'analisi $\epsilon - \delta$ di Weierstrass). Un passo essenziale dell'impresa, e ultimo in ordine cronologico (siamo già nel 1872), è la definizione rigorosa dei numeri reali (razionali e irrazionali) ad opera di Weierstrass, Dedekind e Cantor. Ma per definire i numeri reali si deve far ricorso, in un modo o nell'altro, all'infinito (che compare nelle infinite cifre dello sviluppo decimale di numeri come $\sqrt{2}$, π , ...). Così il compimento di un'opera prelude, come vedremo, alla rivoluzione successiva, ad opera di Cantor. Ma prima conviene dare almeno uno sguardo a come nel frattempo si è sviluppata la geometria.

Nel lodevole tentativo di liberare Euclide da ogni neo, in particolare quello di aver malamente nascosto i problemi dei Greci nei confronti dell'infinito sotto un postulato meno evidente degli altri (il famoso quinto postulato, di esistenza e unicità della parallela ad una retta data per un punto esterno dato), si arriva lentamente a concepire la possibilità di differenti geometrie, in cui non solo si rinunci alla verità del quinto postulato, ma anzi si assuma come vera una sua negazione. La nascita delle geometrie non-euclidee ha una tale importanza, soprattutto per gli effetti che si propagano oltre l'ambito della matematica e fino ai nostri giorni, da poterla considerare senza perplessità la quinta rivoluzione concettuale. Innanzitutto, scompare l'assoluta fede in Euclide e nell'intuizione spaziale, indiscusso fondamento da sempre: è la seconda cacciata dal paradiso. L'intuizione matematica è costretta a ritirarsi dal sensibile visivo ad un campo più astratto, ancora non ben definito, e in buona parte è sostituita dal rigore delle dimostrazioni, radicalizzando così la tendenza già in atto nell'analisi infinitesimale. Ma il bisogno di rigore non è che la prima manifestazione del riproporsi, via via più apertamente, del problema dei fondamenti: rendere le basi della matematica inattaccabili da ogni dubbio, cioè scongiurare il ripetersi di ritirate. Per accertare l'ammissibilità di diverse geometrie si fa ricorso a rappresentazioni, o modelli, in cui si vedono concretati i postulati³. Così si sviluppa la distinzione tra modello e teoria formale, e quest'ultima gradualmente si sostituisce, come fondamento, all'intuizione. Una teoria è accettata non tanto per quel che descrive, quanto perchè esiste qualcosa in cui può essere interpretata, e quindi non è contraddittoria. Ma a quel punto, perchè cercare un'interpretazione quando la si può inventare? Verso la fine del secolo scorso, infatti, i termini sono rovesciati: se una teoria è esente da contraddizioni, si dichiarano esistenti gli enti matematici da essa implicitamente descritti. Questa tendenza raggiunge l'apice nel fondamentale *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert del 1899. In esso tutta la geometria è per la prima

³Quindi un modello della geometria iperbolica sarà un dominio che contenga oggetti da chiamarsi punti, rette, ecc. tali che esistano rette distinte e parallele ad una retta data, passanti per un punto esterno. Ad esempio, si chiami piano la superficie interna ad un cerchio dato, retta ogni corda, punto ogni punto interno. Si vede allora facilmente che una qualsiasi retta ammette infinite parallele per un punto dato esterno, cioè vale la negazione del quinto postulato, mentre gli altri quattro continuano a valere.

volta esposta esaurientemente con il metodo assiomatico formale: spariscono le definizioni degli enti geometrici, e quindi l'intuizione spaziale lascia il posto ad una struttura formata da assiomi (nuovo nome per i postulati) e proposizioni geometriche, da essi dedotte in modo puramente formale, cioè soltanto tramite la pura logica.

Come già accennato, l'infinito compare più o meno esplicitamente già nelle definizioni rigorose dei numeri reali del 1872. Così quando Cantor, affrontando uno specifico problema d'analisi (sulle serie di Fourier), è indotto a misurare aggregati arbitrari di numeri reali, è libero di fare il gran balzo: nelle sue mani l'infinito attuale si tramuta da millenario tabù in oggetto di studio e strumento matematico. In pochi anni Cantor sviluppa una teoria dei numeri ordinali e cardinali transfiniti, e dagli aggregati di numeri reali giunge alla nozione astratta di insieme. È senza dubbio una rivoluzione, la sesta. Di fronte alle astrazioni di Cantor, il grande Dedekind, uno dei padri fondatori dell'algebra astratta, è colto da vertigine. E il geniale, povero Cantor stesso è talmente sconvolto (famosa e spesso citata la sua frase: lo vedo, ma non ci credo) da uscirne pazzo. Dopo alcuni anni di diretta opposizione o al più indifferenza, nei quali Cantor è costretto a cercare interlocutori tra i teologi, i matematici cominciano a vedere di quale nuovo paradiso Cantor abbia aperto le porte. La potenza del linguaggio insiemistico fa impallidire quello geometrico di Euclide; nascono nuove teorie (la topologia, l'analisi funzionale, la teoria della misura di Lebesgue, ...) e le vecchie ringiovaniscono (l'algebra astratta, la geometria algebrica, l'analisi reale, ...). Ma soprattutto, unitamente alla nuova logica simbolica appositamente creata da Frege e Peano (una rivoluzione anche nella storia della logica), la teoria degli insiemi sembra dare a tutta la matematica una fondazione di vastità e profondità prima inconcepibili (perfino i numeri interi sono ricondotti a generali concetti logico-insiemistici, ad opera di Frege, Dedekind, Peano) e il rigore assoluto sembra raggiunto.

1.2 Il problema dei fondamenti

L'entusiasmo per aver finalmente trovato negli insiemi una base sufficientemente profonda e solida non dura molto: come i precedenti, il Paradiso Insiemistico di Cantor è destinato a rivelarsi esso stesso infondato, e in soli due decenni. Prima timidamente Cantor stesso, poi gli italiani che tra i primi avevano recepito le sue idee, poi infine Russell e altri, intorno al 1900 si rendono conto di alcune gravi difficoltà, i cosiddetti paradossi. Meno eufemisticamente, vere e proprie contraddizioni interne alla teoria degli insiemi di Cantor, la più famosa delle quali è di Russell: per il principio di comprensione illimitata (per cui l'estensione di ogni predicato è un insieme), $R = \{x : x \notin x\}$ è un insieme, quindi $x \in R$ se e solo se $x \notin x$, che per $x = R$ dà $R \in R$ se e solo se $R \notin R$, contro il principio di non contraddizione. In termini approssimativi, ma più divertenti: chi rade il barbiere di un villaggio in cui tutti gli uomini che non si radono da sé, vanno dal barbiere? ⁴

La comparsa dei paradossi rende pressante il bisogno di una sicura fondazione della matematica. Così la ricerca sui fondamenti, che nell'800 era vista sostanzialmente come sistemazione rigorosa di conoscenze e risultati non discussi, e quindi parte del progresso e compito esclusivamente matematico, nei primi anni del '900 è considerata un mezzo necessario, per quanto poco gradito, per scongiurare una ritirata. È la cosiddetta crisi dei fondamenti. Dal punto di vista della pratica matematica, si tratta di conciliare l'indiscussa utilità della teoria degli insiemi con la sua affidabilità (naturalmente, per un matematico una teoria contraddittoria è il massimo dell'inaffidabile) e molti matematici, anche se sempre una minoranza, sono direttamente coinvolti nell'impresa. Ma, mentre è opinione comune che

⁴Si noti che la trasposizione in termini di barbe è così infedele da risultare, contrariamente all'originale sugli insiemi, facilmente risolvibile, con un barbiere donna o negando l'esistenza di un villaggio simile.

la teoria di Cantor soffra di qualche patologia, cioè che la fonte delle contraddizioni stia al suo interno, non c'è affatto accordo su quale sia la diagnosi, e quindi quale sia la terapia più adatta. Il dibattito si estende allora in modo naturale al problema, ben più generale e profondo, della natura della conoscenza matematica. Emergono divergenze così profonde sul modo di concepire la matematica che, forse per la prima volta, si hanno come conseguenza diversi modi di far matematica⁵. In particolare, da allora due sono le visioni globali della matematica giunte fino a noi: intuizionismo e formalismo⁶.

Siamo così finalmente arrivati al vivo del tema proposto, in quanto intuizionismo e formalismo possono essere caratterizzati proprio dall'atteggiamento che manifestano nei confronti della formazione dei concetti matematici. Rivolgerò particolare attenzione al formalismo, non tanto per il nome, quanto perchè si è storicamente imposto come la filosofia pratica vincente per la matematica. La matematica oggi prodotta è quasi tutta sostanzialmente inserita in un quadro formalista, e una grande maggioranza dei matematici coscienti delle proprie scelte filosofiche si dichiara formalista a parole (anche se magari platonista nei fatti o nel cuore). Il fatto che in questo modo sia oggi praticamente spenta l'accesa polemica dei primi decenni del nostro secolo non è, a mio parere, tanto un segno di guarigione dalla patologia, quanto un risultato dell'assuefazione ai suoi sintomi. Per rendercene conto, è necessario rivedere in dettaglio la posizione del fondatore del formalismo, David Hilbert.

1.3 Il programma di Hilbert

Quando Cantor toglie i primi veli all'infinito attuale, Hilbert è un adolescente; e nel 1886, quando Hilbert all'età di 24 anni è nominato Privatdozent, Cantor ha praticamente completato la sua teoria degli insiemi. Così Hilbert, libero da pregiudizi e non offuscato da polemiche, può diventare uno degli artefici della insiemizzazione dell'intera matematica. Inoltre, come già accennato, portando a compimento il processo di revisione della geometria innescato dalla nascita delle geometrie non-euclidee, nel 1899 dà un'esposizione sistematica della geometria con il metodo assiomatico formale e in particolare riconduce la sua coerenza⁷ a quella dei numeri reali. Così è naturale che Hilbert cerchi di salvare la nuova matematica dal travaglio dei paradossi e che trovi nel metodo assiomatico, da lui stesso perfezionato, la soluzione alla crisi dei fondamenti. Detto questo, lasciamo che sia Hilbert stesso ad esporre la sua posizione (tutte le citazioni sono tratte da una recente preziosa edizione in italiano degli scritti fondazionali di Hilbert⁸; per non appesantire il testo di note indicherò tra parentesi soltanto il numero di pagina).

Con la teoria dei numeri transfiniti di Cantor, il fiore più bello dello spirito matematico ed in generale una delle più alte prestazioni dell'attività puramente intellettuale dell'uomo(239), e grazie al gigantesco lavoro collettivo di Frege, Dedekind e Cantor, l'infinito fu posto sul trono e godette un periodo di massimi trionfi. L'infinito, con un volo molto ardito, aveva raggiunto una vertiginosa vetta di successi.

⁵Queste diversità nulla hanno in comune con le battute per cui nella matematica moderna due più due fa quasi sempre quattro. Anzi, uno dei punti di forza della matematica è proprio il generale consenso su un nucleo centrale, identificabile più o meno nella parte della matematica inevitabile nelle applicazioni.

⁶Di solito i manuali di filosofia della matematica in realtà considerano tre scuole come principali, aggiungendo alle due citate il logicismo, sostenuto da Frege e da Russell. Ho creduto opportuno non prenderlo in considerazione qui principalmente per due motivi, forse legati: il logicismo, spesso riassunto nello slogan la matematica è diramazione della logica, dà una fondazione indiretta ed esterna alla matematica, e (quindi?) di fatto oggi non ha seguito nella pratica matematica.

⁷Qui e d'ora in poi uso la parola coerenza con lo stesso significato dell'inglese consistency o del tedesco Widerspruchsfreiheit, letteralmente esenzione da contraddizioni, non-contraddittorietà.

⁸D. Hilbert, Ricerche sui fondamenti della matematica, a cura di V. Michele Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1984. Non ho preso in considerazione gli scritti in collaborazione con Paul Bernays, successivi al 1930.

Ma non mancò la reazione: essa assunse, in realtà, forme molto drammatiche. Accadde proprio come nello sviluppo del calcolo infinitesimale. Nella gioia per i nuovi ed abbondanti risultati, ci si era comportati in maniera poco critica nei riguardi dell'ammissibilità dei ragionamenti; e proprio nel semplice uso di concettualizzazioni e di inferenze a poco a poco divenute ordinarie vennero fuori delle contraddizioni dapprima sporadiche e poi gradualmente sempre più acute e serie: i cosiddetti paradossi della teoria degli insiemi. In particolare fu una contraddizione, scoperta da Zermelo e Russell, ad avere un effetto addirittura catastrofico quando divenne nota nel mondo matematico (241-242, corsivi miei).

Infatti, mentre una contraddizione nelle scienze sperimentali non fa scalpore, è del tutto diverso quando compaiono contraddizioni nei campi conoscitivi puramente teorici (183). Bisogna riconoscere che la condizione in cui ora ci troviamo di fronte ai paradossi non può essere sopportata a lungo andare. Si pensi: nella matematica, in questo modello di sicurezza e di verità, portano ad assurdità le concettualizzazioni e le inferenze che tutti imparano, insegnano ed adoperano! E dove si deve trovare altrove sicurezza e verità, se persino il pensiero matematico viene meno? (242). Di fronte ai paradossi, Dedekind e Frege gettano la spugna; Cantor propone la distinzione tra insiemi consistenti e insiemi inconsistenti, che però lascia ancora spazio ad una valutazione soggettiva e che non garantisce quindi alcuna sicurezza oggettiva (165). E contro la teoria [degli insiemi] di Cantor furono mosse, dalle parti più diverse, gli attacchi più violenti. La reazione fu così impetuosa che furono minacciati anche i concetti più comuni e fecondi ed i tipi di ragionamento più semplici ed importanti della matematica, e si voleva vietare il loro impiego (242).

Duro è il sarcasmo di Hilbert verso gli autori dei divieti. Kronecker e Poincaré sono indotti a negare il diritto di esistenza all'intera teoria dei numeri, ad una delle branche più feconde e più potenti della matematica (183) e Kronecker, il dittatore classico del divieto, proibì rigorosamente ciò che per lui non era numero intero (194). Brouwer e Weyl cercano di fondare la matematica gettando a mare tutto ciò che a loro appare scomodo (192) cioè il principio del *tertium non datur*, l'infinito attuale, i teoremi esistenziali, ecc. Ma ciò significa smembrare e mutilare la nostra scienza, e seguendo questi riformatori corriamo il pericolo di perdere una gran parte dei nostri più preziosi tesori (192). In particolare contro Brouwer, uno dei filosofi travestiti da matematici (316), la polemica è pesante e colorita: No, Brouwer non è, come sostiene Weyl, la rivoluzione bensì solo la ripetizione con vecchi metodi di un tentativo di *putsch* che a suo tempo, pur essendo stato intrapreso con maggior risolutezza, fallì miseramente e che adesso è condannato in partenza all'insuccesso poiché il potere statale è stato così ben armato e rafforzato da Frege, Dedekind e Cantor e, aggiungiamo noi, da Hilbert stesso.

Ai traditori della matematica Hilbert si contrappone come paladino, desidera restituire alla matematica l'antica reputazione di verità incontestabile (192), vede una via del tutto soddisfacente per sfuggire ai paradossi senza tradire la nostra scienza (242), cioè conservando in pieno il patrimonio della matematica (193). Più esplicitamente, e ripetutamente, dichiara: Scopo delle mie indagini per una nuova fondazione della matematica è niente meno che la definitiva eliminazione dei dubbi diffusi intorno alla sicurezza del ragionamento matematico (215, ma vedi anche 192, 292, 300, 316). La via intrapresa da Hilbert per questo fine è nient'altro che il metodo assiomatico. [...] Il metodo assiomatico è e rimane davvero lo strumento indispensabile, adeguato al nostro spirito, per ogni indagine esatta in qualunque campo; esso è logicamente incontestabile e allo stesso tempo è fecondo ... (193).

Nel caso della teoria degli insiemi il metodo assiomatico hilbertiano manifesta tutta la propria potenza, ma nello stesso momento anche le proprie difficoltà. Mentre la coerenza delle geometrie assiomatiche, comprese quelle non-euclidee, può essere ricondotta a quella della geometria di Euclide (ossia infine al sistema dei numeri reali), che a sua volta è confor-

tata almeno dall'interpretazione intuitiva e da oltre due millenni di storia, al contrario, la teoria assiomatica degli insiemi viene a sostituire completamente una interpretazione intuitiva (o ingenua) del concetto di insieme, che proprio dai paradossi è inibita. La definizione del concetto di insieme è allora soltanto implicita nelle proprietà che gli assiomi esprimono; in termini più approssimativi, gli insiemi possono essere concepiti in un qualunque modo, purché gli assiomi vengano rispettati, ma nessuna interpretazione è privilegiata. Il vantaggio dell'assiomatizzazione, iniziata da Zermelo nel 1908 certamente sotto l'influenza di Hilbert, è che, regolando tramite assiomi opportuni la costruzione di insiemi, si riesce a sviluppare la teoria degli insiemi in modo tale che quelle contraddizioni vengono a cadere e tuttavia la portata e l'applicabilità della teoria degli insiemi rimangono inalterate nonostante le limitazioni imposte. [...] Ma non basta evitare le contraddizioni presenti, se deve essere ristabilita la reputazione, da esse messa in pericolo, della matematica come modello della scienza più rigorosa (184). Infatti in tal modo non è esclusa la possibilità che nuove contraddizioni emergano in futuro. Pertanto il requisito principale dell'assiomatica deve essere spinto più in là e precisamente verso il riconoscimento che di volta in volta, all'interno di un campo conoscitivo, in base agli assiomi fissati le contraddizioni sono assolutamente impossibili (184); successivamente Hilbert sarà anche più chiaro e categorico: dovunque viene applicato il metodo assiomatico, abbiamo l'obbligo di dimostrare la non-contraddittorietà degli assiomi (278, vedi anche 195, 217, 253).

Ma come è possibile matematizzare una questione apparentemente così sfuggiva come la coerenza di una teoria assiomatica, tanto da poterne dare una dimostrazione? Certamente, mediante questo procedimento assiomatico, non è poi possibile una soluzione definitiva del problema dei fondamenti. Infatti, gli assiomi posti come base da Zermelo contengono autentiche assunzioni contenutistiche [...] Ma se noi usiamo assiomi contenutistici come punti di partenza e come fondamenti per le dimostrazioni, allora la matematica perde con ciò il carattere della sicurezza assoluta (293). In altre parole, secondo Hilbert una dimostrazione non può essere basata sul contenuto (per lui sinonimo di significato, interpretazione intuitiva, ...) degli assiomi. Ma allora su cosa? A mio parere tutte le indagini svolte finora sui fondamenti della matematica non hanno ancora fatto conoscere una via che renda possibile formulare ciascuna questione sui fondamenti in una maniera tale che ne debba seguire una risposta univoca (189). Una risposta univoca può per Hilbert essere data solo da una dimostrazione matematica, e questo è possibile solo trasformando ogni enunciato matematico in una formula concretamente esibibile e rigorosamente derivabile e con ciò trasferendo l'intero complesso di tali questioni [fondazionali] nel campo della matematica pura (293, vedi anche 267, 317). Questo è in sintesi il programma di Hilbert: la matematica, svuotata del suo contenuto intuitivo, si riduce ad un complesso di formule che, in quanto segni sulla carta, sono oggetto di studio di una matematica minimale, totalmente affidabile e inattaccabile; in particolare, riducendo in formule anche l'apparato deduttivo della matematica, cioè la logica, diventa possibile dimostrare matematicamente l'impossibilità di derivare contraddizioni in una data teoria formalizzata, e questo è appunto lo scopo. La geniale scoperta di Hilbert è cioè l'aver trovato il modo di rendere la matematica stessa oggetto di studio matematico, in una disciplina da lui sviluppata e chiamata metamatematica, o teoria della dimostrazione. Vediamo ora alcuni dettagli.

Il primo passo consiste nell'isolare un terreno totalmente sicuro, inattaccabile da chiunque in quanto senza ipotesi, che Hilbert chiama matematica reale, o finitaria. Essa è sostanzialmente la teoria matematica delle cose o fatti reali (ossia, nel caso della matematica, dei segni: in principio è il segno, questo è il motto (195)), e base di ogni conoscenza, logica compresa. La matematica dispone di un contenuto assicurato indipendentemente da ogni logica e quindi non può essere fondata mediante la sola logica [...]. Anzi, come preconditione

per l'uso delle inferenze logiche e per l'effettuazione di operazioni logiche, deve essere già dato qualcosa nella rappresentazione (*Vorstellung*): certi oggetti concreti extra-logici, che esistono intuitivamente come qualcosa di immediato, prima di ogni pensiero. Se il ragionamento logico deve essere sicuro, questi oggetti devono lasciarsi completamente dominare in tutte le loro parti; e, insieme agli oggetti, la loro esibizione, la loro distinzione, il loro susseguirsi, il loro stare l'uno accanto all'altro, deve esser dato intuitivamente, come qualcosa che non si lascia ridurre ancora a qualcos'altro e che non richiede una riduzione. Questa è la disposizione filosofica basilare che ritengo necessaria non solo per la matematica, ma per ogni pensiero, per ogni comprensione e per ogni comunicazione nella scienza. E, in particolare, nella matematica sono oggetto della nostra considerazione gli stessi segni concreti la cui forma (*Gestalt*), in virtù della nostra disposizione, è immediatamente chiara e riconoscibile (242-43, vedi anche 195-96, 267-68, 314). Successivamente, Hilbert aggiunge che questo è il presupposto minimo di cui nessun scienziato può fare a meno e che quindi deve essere osservato da ciascuno, consapevolmente o inconsapevolmente (267-268) e infine, ricollegandosi a Kant, che in matematica l'a priori non è né più né meno che una impostazione basilare che io desidero chiamare anche impostazione finitaria (314).

Vediamo in concreto come si può sviluppare una matematica finitaria. Nella teoria dei numeri abbiamo i segni numerici

1, 11, 111, 1111, ...

dove ogni segno numerico è riconoscibile intuitivamente per il fatto che in esso ad 1 segue ancora 1. Tali segni numerici - oggetti della nostra considerazione - non hanno in sé alcun significato (244). Abbiamo inoltre segni che servono per la comunicazione, come 2 per 11, 3 per 111, ecc., e segni per operazioni e per comunicare asserzioni, come +, =, >. Ci rendiamo conto di poter ottenere e dimostrare le sue verità [della teoria finitaria dei numeri] con argomentazioni contenutistiche intuitive. Le formule che vi compaiono vengono usate soltanto per la comunicazione. Le lettere significano segni numerici, e con una equazione viene comunicata la coincidenza di due segni (274). In una teoria dei numeri svolta a questo modo non ci sono assiomi e non ci possono in alcun modo essere contraddizioni. Come oggetti abbiamo sempre segni concreti, con essi operiamo e su di essi facciamo enunciati contenutistici (197). Con questo genere di trattazione contenutistica e intuitiva possiamo andare molto avanti (245); tuttavia, già nella teoria elementare dei numeri spesso compaiono enunciati che, per quanto apparentemente innocui, sottointendono un salto nel transfinito, come ad esempio l'asserzione di Euclide che, qualunque sia il numero primo p , esiste un numero primo maggiore di p (p. 245). Parimenti, arriviamo ad enunciati transfiniti quando neghiamo un enunciato universale, cioè un'asserzione che si estende a segni numerici qualsiasi. Così, ad esempio, l'enunciato che: se a è un segno numerico, deve essere sempre

$$a + 1 = 1 + a,$$

dalla posizione finitaria non è suscettibile di negazione (246). Ne segue che, in particolare, il principio aristotelico del *tertium non datur* non vale per gli enunciati finitari, semplicemente perchè la negazione di un enunciato può non avere senso da un punto di vista finitario. E più in generale, constatiamo questo; se restiamo, come noi dobbiamo restare, nell'ambito degli enunciati finitari, vi regnano rapporti logici assai poco dominabili, e questa loro non dominabilità diventa insopportabile quando 'tutti' ed 'esistÈ' compaiono combinati in proposizioni immerse l'una nell'altra. Comunque, non valgono quelle leggi logiche che gli uomini hanno sempre adoperato da quando hanno cominciato a pensare, e che proprio Aristotele ci ha insegnato. Potremmo ora cercare di fissare le leggi logiche che valgono per il dominio delle asserzioni finitarie; ma ciò non ci servirebbe, poiché non vogliamo proprio rinunciare all'uso delle semplici leggi della logica aristotelica, e nessuno, neppure se parlasse le lingue

degli angeli, tratterrà gli uomini dal negare asserzioni universali, dal formare giudizi parziali e dall'adoperare il *tertium non datur*. Come dobbiamo comportarci ora? (247, corsivo mio). Come riesce Hilbert ad uscire da questo apparente *cul de sac*, ad evitare la difficoltà sostanziale qui insita (276) ?

Ricordiamoci che siamo matematici e che, in quanto tali, ci siamo trovati spesso in una simile situazione precaria dalla quale siamo usciti con il geniale metodo degli elementi ideali. [...] Proprio come $i = \sqrt{-1}$ è stato introdotto per poter mantenere nella forma più semplice le leggi dell'algebra (ad esempio, quelle relative all'esistenza ed al numero delle radici di un'equazione) (247) e come nella geometria vengono aggiunte alle figure reali le figure ideali (226) (ad esempio, con l'introduzione dei punti all'infinito), così qui agli enunciati finitari dobbiamo aggiungere gli enunciati ideali per conservare le semplici regole formali dell'usuale logica aristotelica (247-248). Ma come ottenere gli enunciati ideali? (248). Basta proseguire in un modo naturale e coerente lo sviluppo che è stato già preso dal procedimento matematico finora usuale (275). Infatti, il metodo del calcolo letterale algebrico non è compreso nella teoria intuitivo-contenutistica dei numeri come noi l'abbiamo costruita finora. In questa, le formule sono state sempre adoperate soltanto per la comunicazione: le lettere significavano segni numerici, e con un'equazione veniva comunicata la coincidenza di due segni. Invece, nell'algebra consideriamo le espressioni letterali in se stesse come costrutti autonomi e con esse vengono formalizzati i teoremi contenutistici della teoria dei numeri (248). Ad esempio, al posto del giudizio ipotetico per cui $a + b = b + a$ ogniqualvolta a, b siano determinati segni numerici, si considera la formula $a + b = b + a$ e questa non è più una comunicazione immediata di un qualcosa di contenutistico, ma è un certo costrutto formale (248-249) dal quale gli enunciati intuitivi particolari, come $5 + 7 = 7 + 5$, vengono ottenuti sostituendo a, b con segni numerici specifici, cioè con un procedimento dimostrativo (ancorché molto semplice) (249). Così già la matematica elementare contiene in primo luogo formule alle quali corrispondono comunicazioni contenutistiche di enunciati finitari (cioè sostanzialmente equazioni o disequazioni numeriche, oppure comunicazioni più complicate composte da quelle) e che possiamo chiamare anche enunciati reali della teoria, e contiene in secondo luogo formule che in sè non significano niente, allo stesso modo dei segni numerici della teoria contenutistica dei numeri, ma sono soltanto oggetti per l'applicazione delle nostre regole e devono essere riguardati come costrutti ideali della teoria (275).

Generalizzando questa concezione, la matematica diviene un patrimonio di formule: in primo luogo, formule cui corrispondono comunicazioni contenutistiche di enunciati finitari, e in secondo luogo altre formule che non significano niente e che sono i costrutti ideali della nostra teoria (249). È importante afferrare il significato di quel non significano niente: l'idea fondamentale della mia teoria della dimostrazione è la seguente: tutto ciò che costituisce la matematica nel senso odierno viene rigorosamente formalizzato (*streng formalisiert*), cosicché la matematica propriamente detta o la matematica in senso stretto diventa un complesso di formule (216, vedi anche 198, 268, 317). Gli enunciati della matematica usuale vengono svuotati del loro contenuto, del loro significato intuitivo, e riprodotti in formule che, in quanto composte da segni proprio come nella teoria finitaria dei numeri, sono a loro volta oggetti concreti di una considerazione intuitiva (248), cioè oggetto di studio nell'ambito finitario.

Sorge però un problema: poiché gli enunciati ideali, cioè le formule [...] non significano niente, allora su di essi non possono essere applicate contenutisticamente le operazioni logiche come sugli enunciati finitari. È dunque necessario formalizzare le operazioni logiche e anche le dimostrazioni matematiche stesse (249-250). Per raggiungere i nostri scopi dobbiamo rendere oggetti della nostra indagine le dimostrazioni in quanto tali; così veniamo spinti verso una teoria della dimostrazione che tratta proprio dell'operare con le dimostrazioni stesse (204). A questo fine Hilbert utilizza un calcolo logico, del tutto simile a quello usato

tutt'oggi in logica matematica, e quindi oltre ai segni e variabili matematici introduce anche segni logici (per i connettivi e, o, implica, non e per i quantificatori per ogni, esiste). In perfetta analogia con il passaggio dalla teoria contenutistica dei numeri all'algebra formale, noi consideriamo ora i segni e i simboli di operazioni del calcolo logico astraendo dal loro significato contenutistico. Con ciò infine, invece della scienza matematica contenutistica che viene comunicata con il linguaggio ordinario, otteniamo un patrimonio di formule che contengono segni matematici e logici [e] che si susseguono secondo determinate regole (250), le usuali regole di inferenza della logica formale (ad esempio, il modus ponens). Il ragionamento contenutistico viene così rimpiazzato da un operare esterno secondo regole e con ciò viene compiuto il passaggio rigoroso da una trattazione ingenua ad una trattazione formale (250), e una dimostrazione matematica diventa qualcosa di concreto e di esibibile (204), una figura che in quanto tale deve esserci presente intuitivamente (251), costituita da formule che o sono assiomi o sono ottenute da formule precedenti mediante le regole stabilite. Come usuale, una formula è detta dimostrabile, se è l'ultima formula di una dimostrazione (251).

A questo punto il lavoro preparatorio è completo, e si arriva al nocciolo del programma hilbertiano. Nella gioia suscitata, in generale dal successo, e in particolare dall'aver trovato già pronto senza sforzo alcuno da parte nostra uno strumento indispensabile come il calcolo logico, non dobbiamo dimenticare qual è la condizione essenziale del nostro lavoro. C'è infatti una condizione, una sola ma assolutamente necessaria e questa è la dimostrazione della non-contraddittorietà. L'estensione mediante aggiunta di ideali è infatti ammissibile solo se con essi non sorgono contraddizioni [...] Questo problema [...] tuttavia, nella situazione attuale ammette senz'altro di poter essere trattato (252-253). Infatti, giunti a questo punto, esso si riduce al problema di accertare che non esistono due dimostrazioni di cui una abbia come conclusione una formula A e l'altra $\neg A$ (cioè non- A), ossia equivalentemente che non esiste una dimostrazione della formula $1 = 1$. E questo è un compito che per principio sta ancora nell'ambito della considerazione intuitiva, così come ad esempio appartiene alla teoria dei numeri costruita contenutisticamente il problema della dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, cioè la dimostrazione che è impossibile trovare due segni numerici a e b che stiano nella relazione $a^2 = 2b^2$ [...] Analogamente, a noi importa mostrare che non ci può essere una dimostrazione avente una certa proprietà. Ma una dimostrazione formalizzata è, al pari di un segno numerico, un oggetto concreto e dominabile. Essa è comunicabile dall'inizio alla fine (253). Pertanto, poiché la proprietà in questione, cioè l'aver come conclusione la formula $1 = 1$, è una proprietà concretamente constatabile, il compito posto rientra interamente nell'ambito della matematica finitaria.

1.4 La forma del formalismo

Indubbiamente il programma di Hilbert esercita un intenso fascino, anche su chi non si è mai sentito direttamente minacciato dai paradossi, come invece accadde ai matematici all'inizio del secolo. Ci attrae la possibilità di ottenere assolute certezze almeno in un campo di conoscenza ben delimitato qual è la matematica, ci suggestiona l'idea di raggiungere la verità (anche se con la v minuscola) solo con il sudore del cervello, ci colpisce la potenza intellettuale di chi ha concepito un tale complesso meccanismo e istintivamente ci auguriamo che l'impresa possa essere portata a termine. In definitiva, ci affascina l'idea che l'eterno desiderio umano di partecipare alla perfezione e potenza divina possa realizzarsi in qualche luogo della mente, per quanto piccolo: almeno per l'intelletto matematico limiti non sono tracciati e [...] esso addirittura è in grado di rintracciare le leggi del suo pensiero (300).

Visto in questi termini, è tanto più difficile accettare l'idea che si tratti soltanto di un'illusione. Ma per quanto a malincuore, è proprio qui che la ragione ci porta: a riconoscere

che il programma di Hilbert, indipendentemente dalla sorte storica, è un'inaccettabile illusione, tanto più seducente in quanto basata sull'armonia delle forme e sostenuta dal rigore dell'intelletto.

Per giungere a questa conclusione, è necessario ricostruire ed analizzare la posizione filosofica, non sempre esplicita, soggiacente il programma di Hilbert; così si scoprirà anche, a mio parere, perché la denominazione di formalismo, nel senso di illusione delle forme, è ad esso appropriata⁹. Tuttavia, chi non vede motivi per dover rinunciare a tale illusione, facilmente troverà il modo per rifiutare l'interpretazione qui proposta; in altri termini, non mi illudo di poter convincere chi già non condivide con me alcune convinzioni, o ipotesi, che spero risultino chiare nel contesto. E d'altra parte voler dimostrare in assoluto, cioè senza ipotesi come richiede Hilbert, significa cadere nella stessa trappola: cercando di ripulire il terreno da qualsiasi assunzione, si rischia di fondare sul nulla anziché sulla roccia viva.

La prima illusione di Hilbert è infatti quella di potersi liberare di ogni ipotesi, ossia, secondo il suo punto di vista, di ogni filosofia; ma che egli esprima comunque una filosofia dei matematici, se non della matematica, e in termini abbastanza decisi, pur se non sviluppati, è fuor di dubbio (e anzi, forse proprio il suo continuo ripetere il contrario ce lo suggerisce).

Sostenendo che la matematica non ha bisogno di una fondazione esterna, e anzi dichiarando di voler eliminare ogni questione fondazionale trasferendola all'interno della matematica, egli non solo rifiuta, ma anche si preclude qualsiasi possibilità di analizzare e comprendere il reale processo di formazione dei concetti matematici, che non può già essere parte della matematica. Al contrario, il suo scopo manifesto è di ripristinare la reputazione della matematica e difenderla dagli attacchi dei golpisti pseudorivoluzionari, cioè conservarla come attualmente si presenta, giustificare tutti i suoi prodotti, ma solo a posteriori, una volta usciti dalla fabbrica. Il suo è così un progetto per un restauro conservativo, non per una rifondazione, ispirato dalla fede nell'assoluta verità della matematica; anzi, a guardar meglio, è la risposta intellettuale all'angoscia generata dal timore di dover perdere tale fede e dall'incapacità di vedere alternative: E dove si deve trovare altrove sicurezza e verità, se persino il pensiero matematico viene meno? (242). Che ne sarebbe infatti della verità della nostra conoscenza, che ne sarebbe dell'esistenza e del progresso della scienza, se nemmeno nella matematica ci fosse una verità sicura? (300).

Il compito in cui Hilbert si impegna è perciò formidabile: si tratta nientemeno che di salvaguardare il mito della scienza, comprovando la purezza del suo cuore (...tutta la nostra cultura attuale, nella misura in cui poggia sulla penetrazione intellettuale e sull'asservimento della natura, trova il suo fondamento nella matematica (309)) messa in dubbio dai paradossi. E le metafore che usa Hilbert sono altrettante conferme del suo vedere la matematica come mito: grandiose sale (292), tribunale supremo (253), ruolo di guida (188), paradiso (242), santuario (323), vette eccelse Ma come può presumere di poter eliminare ogni dubbio, ogni sospetto sulla matematica senza uscire dalla matematica stessa?

Nel momento in cui si propone di mantenere un mito, Hilbert nega ogni dubbio, ogni discussione, ogni conflitto interno ed esterno (o forse, viceversa, il mito nasce per l'insofferenza del conflitto) e, servendo l'idea di non mutilare la matematica, è costretto a mutilare se stesso e gli altri: qualsiasi riferimento al soggetto è bandito come fonte d'incertezza, golpisti traditori sono considerati i matematici che non condividono la sua fede e cercano di riflettere a modo loro, i paradossi sono visti come una falla minacciosa di catastrofi e perciò da rattoppare al più presto (Hilbert dichiara con insistenza di aver risolto ogni problema già dal 1904 quando ancora il programma è in gran parte nella sua mente), piuttosto che una preziosa occasione per riflettere.

⁹E così saranno meglio giustificate anche alcune affermazioni troppo sintetiche su Hilbert contenute in G. Sambin, *Alle radici della logica*, Atti degli Incontri di Logica Matematica v. 1, Siena 1985, pp. 377-386.

Il suo atteggiamento filosofico è perciò quello di illudersi di evitare la filosofia, fonte di dubbi e vuote chiacchiere basate su ipotesi, semplicemente negandola. Senza il conforto della filosofia, per convincere e soprattutto per convincersi con definitiva sicurezza, per vaccinarsi contro ogni sofferenza futura (ciò che abbiamo sperimentato già due volte, una volta quando si trattava dei paradossi del calcolo infinitesimale e l'altra volta con i paradossi della teoria degli insiemi, non potrà verificarsi una terza volta né mai più (253)), per non essere cacciato dal Paradiso (p. 242), per poter continuare indisturbato a giocare nel limbo dei desideri matematici (chi mi vuole confutare deve (come è stata finora e sarà consuetudine in matematica) indicarmi precisamente il posto in cui si trova il mio presunto errore. Un'obiezione che non fa questo, io la respingo in partenza (300)), l'unica via che gli rimane è appunto di salvare la matematica con la matematica, cioè di dimostrare che l'illusione del mito è in realtà l'unica certezza. E a noi non resta che analizzare la sua presunta dimostrazione, per vedere in atto, esplicitamente, la sua filosofia.

Avendo svalutato al massimo grado qualsiasi partecipazione del soggetto, Hilbert è costretto a cercare sicurezza (Sicherheit) soltanto nella concretezza di oggetti o meccanismi esterni. Infatti, innanzitutto, come giustifica l'assoluta affidabilità di quella parte incontaminata della matematica chiamata reale? Essa coincide sostanzialmente con i risultati della capacità di manipolare, dominare oggetti concreti (Dingen, o Zeichen, nel caso della matematica) che ci sono presentati (dati in anticipo nella Vorstellung) in modo immediato prima di ogni pensiero (vedi il brano di p. 243 citato sopra); sembra proprio che Hilbert abbia messo ogni cura nello scegliere parole che in qualunque modo non facciano riferimento a soggetti, se non in quanto provvisti di mani per toccare o occhi per guardare, e non stupisce allora che consideri tali attività esterne come a priori, e base di ogni conoscenza. Ma, essendo la matematica reale il punto d'appoggio da cui sollevare tutto l'edificio della matematica, esterna risulta allora anche la matematica ideale, dove ogni enunciato è svuotato del suo contenuto interno e ridotto ad una formula, oggetto concreto di una considerazione intuitiva (248), cioè ad un complesso di segni trattabile nella matematica reale; così dell'enunciato resta solo l'enunciazione in segni, il veicolo della comunicazione trattato indipendentemente da ciò che comunica, come una poesia ridotta al concreto susseguirsi di lettere o suoni. In terzo luogo, esterna è anche la logica, avvilita a modo di operare esterno (pp. 250, 271, 318) con regole prederminate su configurazioni concrete, comunicabili dall'inizio alla fine (253, 277) e che si trovano davanti a noi (pp. 216, 268), cioè le dimostrazioni matematiche formalizzate. Infine, nello slancio di oggettificare, estrinsecare ogni attività mentale, Hilbert non sa fermarsi neppure davanti al pensiero tout court: la mia teoria della dimostrazione non fa altro che riprodurre l'intima attività del nostro intelletto e stendere un protocollo delle regole con le quali procede di fatto il nostro pensiero. Il pensare si svolge proprio parallelamente al parlare e allo scrivere: mediante la formazione e l'allineamento di proposizioni (322, vedi anche 193, 283, 300). E questo estremo, così ingenuo da farci sorridere appena ricordiamo quali tortuose e spesso inconsapevoli vie il pensiero segue nella realtà, ci può tuttavia aiutare ad intendere correttamente anche le precedenti affermazioni di Hilbert.

In definitiva, certamente Hilbert sa che il ragionamento contenutistico, cioè l'intuizione e quindi il soggetto, è ineliminabile (pp. 198, 243), ma nell'affannosa ricerca di certezze oggettive il suo sforzo maggiore sta proprio nel riversarlo all'esterno, surrogando per quanto gli è possibile la riflessione interna con la sua forma esterna, cioè di fatto con la manipolazione di oggetti concretamente dati. In termini grossolani ma forse efficaci, si può dire che Hilbert butta tutto fuori.

Ma dopo questa operazione, guardando solo l'immagine riflessa all'esterno si preclude la possibilità di com-prendere, riflettere davvero, e di-spiegando il meccanismo non può spiegare perché dovrebbe funzionare, al più di-mostrarci come funziona. Innanzitutto Hilbert non

giustifica opportunamente il ruolo essenziale attribuito al metodo assiomatico, se non per dar forma esterna a cose fatte. In questo modo non può certo chiarire l'intima natura dei concetti matematici in generale, e nemmeno la comprensione dei più comuni, come insieme, funzione, infinito, ecc., perchè li irrigidisce in una struttura statica, fissata una volta per tutte (e così negando sia il passato che qualsiasi evoluzione futura). Infatti non ci spiega chi, come, perchè si scelgano certi specifici assiomi e non altri, se non con il criterio esterno ed a posteriori della coerenza formale, che in ultima analisi è nient'altro che la constatazione che un certo meccanismo esterno non può produrre un certo segno sulla carta. Mai si sofferma invece sulla coerenza sostanziale dell'espressione formale, cioè del meccanismo, con la comprensione contenutistica intuitiva; tanto che, paradossalmente, pur dopo aver accertato la coerenza di una teoria formalizzata, ancora ci si potrebbe chiedere di che cosa si è dimostrata la coerenza. Infine, non ci spiega addirittura perchè dovremmo credere al suo programma, ma soltanto ce lo presenta come dispositivo per poter continuare a camminare come si è sempre fatto e senza paura di precipizi, crolli o putsch, ma anche senza sapere qual è la meta.

Ecco allora emergere il vero motivo per cui la denominazione di formalismo è appropriato alla filosofia insita nel programma di Hilbert: di ogni cosa egli considera soltanto la forma, percepita come un oggetto esterno e indipendente dal contenuto. E come un formalista nel senso quotidiano del termine, badando soltanto alle forme finisce col nascondere la sostanza, come lo sporco (a parere di Hilbert, le intuizioni, le comprensioni e le idealizzazioni del soggetto) sotto il tappeto della coerenza formale, ed a sacrificare all'armonia delle forme anche la comprensione della realtà dei fatti. Se da una parte l'infinito non ha un significato intuitivo (304), è semplicemente qualcosa di apparente (234), un'astrazione spaventosa (304), dall'altra Hilbert non esita di fronte alle vette eccelse dell'infinito attuale purché reso in formule; se il principio del tertium non datur non ha senso per gli enunciati reali della matematica finitaria, egli preferisce rivolgersi ad una realtà fittizia, la sua matematica ideale, in cui il tertium non datur possa liberamente applicarsi, poiché con esso la logica consegue la completa armonia; i suoi teoremi ricevono una forma tanto semplice, e il sistema dei suoi concetti risulta tanto conchiuso, da rispondere all'importanza di una disciplina che esprime la struttura di tutto il nostro pensiero (330); infine, pur dichiarando che la matematica è una scienza senza ipotesi (289), assume senza scomporsi e senza rimorsi la matematica reale come a priori. Sembra esserci una scissione tra un Hilbert reale, che crede solo alla realtà di ciò che tocca, e un Hilbert ideale, che vuole poter credere nella realtà delle idealizzazioni; nell'intento di ricomporre tale scissione, Hilbert semplicemente nega di fatto ogni idealizzazione (un'atteggiamento che considera meritorio: è pur compito della scienza liberarci dall'arbitrario, dal sentimento e dall'abitudine, e proteggerci dal soggettivismo (283)) mantenendone soltanto la formulazione esterna in simboli, cioè il prodotto finale concretamente percepibile. Ma questa soluzione senza battaglia, questo abito inamidato per coprire le vere forme mostra subito la corda, e la contraddizione evitata all'esterno ricompare all'interno: non importa aver capito davvero, basta riuscire a produrre una forma ben strutturata come se il contenuto fosse chiaro, prima di averlo posseduto (una specie di *formatio praecox* nevrotica, e l'impulso a dar forma prima del dovuto è tale da far cadere Hilbert in clamorosi errori specifici, come quando pretende di aver dimostrato l'ipotesi del continuo o il tertium non datur). E infine, proprio nel momento in cui cerca di eludere ogni coinvolgimento in opinioni, Hilbert impegna tutta la sua reputazione e le sue energie in una congettura, che tale tutto sommato è il suo programma.

Stando così le cose, la sua filosofia della matematica è tutta affidata alla riuscita del programma; una volta fallito (come la storia e i teoremi di Gödel ci hanno dimostrato, vedi il paragrafo 7) non ne resta che l'ingegnoso meccanismo, una forma vuota che la sola armonia non può riempire di contenuto.

1.5 Brouwer e Hilbert, scontro di opposti?

Un curioso giovane personaggio compare sulla scena nel primo decennio del '900, prima con un libello moralista su Vita, arte e misticismo, subito dopo con una tesi di dottorato, censurata in parte dal relatore, Sui fondamenti della matematica, e infine con un articolo di poche pagine su L'inaffidabilità dei principi logici. Luitzen Egbertus Jan Brouwer è ben diverso da Hilbert, e non solo per la matematica che propone. No, certamente Brouwer non è con il potere statale, ma nemmeno ripete putsch falliti, e la rivoluzione che porta con sé ha origini intime ed oscure, ma raggiunge il profondo. Apparentemente incurante dei paradossi e del clamore da essi suscitato, si scaglia con mistico furore e candore sui caposaldi storici della matematica, il linguaggio simbolico, i principi logici aristotelici, l'infinito attuale, le applicazioni, e dalla mistica ricava una matematica nuova, costruita per molti anni in solitaria speculazione.

Brouwer non dà alcun peso all'esistenza intesa come mancanza di contraddizioni (famosa è la metafora: una teoria scorretta (*unrichtig*), anche se non può venir arrestata da una contraddizione che la refuterebbe, è nondimeno scorretta, proprio come una politica criminale resta criminale anche se non può essere ostacolata da nessuna corte che la reprima¹⁰) e considera la metamatematica di Hilbert in blocco un puro gioco di formule: alla questione se esista esattezza matematica le due parti danno risposte diverse: l'intuizionista dice: nell'intelletto umano, il formalista dice: sulla carta¹¹. Egli introduce invece per la matematica (come per la politica della metafora) un criterio etico¹²; il suo scopo non è salvare la matematica, ma redimerla dal peccato di voler asservire la natura con l'intelletto. Perciò comincia a costruirla una nuova dalle radici fino ai frutti, il cui fondamento è l'aderenza di ogni passo all'intuizione del soggetto. Anzi, il soggetto è tutto, e la matematica intuizionistica è nient'altro che il risultato delle sue libere (cioè non piegate al principio di causalità) costruzioni mentali sulla base dell'intuizione primaria della biunità (a priorità del tempo): niente linguaggio, pericoloso strumento di deformazione, niente *tertium non datur*, che sottintende la solubilità di ogni problema matematico, nessuna verità esterna al soggetto, ma solo costruzioni mentali.

Per quanto bizzarre siano le motivazioni del fondatore, la matematica intuizionistica ha grande potere di attrazione (tanto che già nel 1927 Hilbert si meraviglia soprattutto del fatto che anche nei circoli matematici la capacità di suggestione di un singolo uomo dotato di un forte carattere e ricco di ingegno, riesca ad esercitare le più improbabili ed eccentriche influenze (284)), perché in essa i problemi da cui la matematica statale, da allora chiamata classica, è afflitta semplicemente non hanno luogo. Purtroppo non c'è spazio per esporne lo sviluppo, nemmeno per sommi capi¹³. In generale, dall'interpretazione dei connettivi e quantificatori logici (da cui segue il rifiuto del *tertium non datur*, base della logica aristotelica¹⁴), fino alla definizione dei numeri reali, delle funzioni, degli insiemi, ecc. e a tutto lo sviluppo tecnico, ogni concetto è profondamente analizzato e ricostruito, mentre viene ignorato tutto ciò che non si presta ad una trattazione costruttiva (ad esempio, l'infinito at-

¹⁰Vedi L. E. J. Brouwer, *Collected Works*, North Holland 1975, p. 270, trad. ital. tratta da A. Cantini, op. cit., p. 172.

¹¹Vedi L. E. J. Brouwer, op. cit., p. 125, traduzione mia.

¹²Vedi G. Pretto - G. Sambin, *Mistica come etica della filosofia della matematica di L. E. J. Brouwer*, in: *Atti del Convegno Internazionale di Storia della Logica*, S. Gimignano, 4-8 dicembre 1982, a cura di V. M. Abrusci, E. Casari, M. Mugnai, CLUEB 1983, pp. 359-362. Purtroppo un'esposizione dettagliata del pensiero filosofico di Brouwer deve ancora essere scritta; vedi comunque A. Cantini, op. cit.

¹³Un classico nella divulgazione della matematica intuizionistica è A. Heyting, *Intuitionism*, an introduction, North Holland 1956.

¹⁴Una formalizzazione della logica intuizionistica è di notevole interesse per l'informatica, in quanto da una dimostrazione in essa formulata si può estrarre un algoritmo di calcolo.

tuale, le dimostrazioni per riduzione all'assurdo, gli enunciati esistenziali privi di effettività, ecc.). Il risultato è una matematica globalmente alternativa a quella classica, e in cui il problema della coerenza, non più formale ma concettuale, si pone solo al momento stesso della creazione; così non solo non si riproducono i paradossi, ma ogni concetto ha un significato intuitivo, assolutamente indipendente dalla sua espressione. Il potere di attrazione, perciò, non è dovuto tanto alla potenza (anzi, al matematico classico l'intuizionismo appare come una incomprensibile gabbia, un'irragionevole mutilazione), quanto alla estrema coerenza concettuale, che rende l'intuizionismo di Brouwer un corpus compatto dai fondamenti fino ai teoremi specifici, senza divisioni in aree affidabili con diverse motivazioni.

Al contrario, Brouwer considera il desiderio di potere, sugli altri e sulla natura, come la fonte del peccato e per astenersene si rifugia nella mistica, e nella sua matematica intuizionistica che ne è la propagazione. Così la scissione di Hilbert tra realtà e ideale in Brouwer diventa un conflitto risolto eticamente, e il mito del paradiso si scioglie in umana consapevolezza della sua perdita (e proprio questo ci fa sentire Brouwer molto più vicino).

Tuttavia, per astenersi dal peccato Brouwer taglia ogni comunicazione con l'esterno (da cui la frequente accusa di solipsismo) e finisce con l'esercitare un desiderio di potere più riposto ma non meno feroce, nel momento in cui si propone di controllare il proprio interno e imporsi (e imporre) delle norme limitative. L'unica alternativa che egli sembra vedere all'uso del linguaggio come strumento di dominio, come droga per indurre pseudo-comprensioni, è nient'altro che l'astinenza, cioè il silenzio. Ma questo, come ben noto, è soltanto l'opposto dell'assunzione, non ancora libertà dall'assuefazione e dalla dipendenza. È naturale chiedersi allora se lo stesso valga in generale; si scopre così che la posizione assunta da Brouwer è semplicemente all'opposto di quella di Hilbert (o viceversa, visto che sono contemporanei) in molti aspetti, di cui alcuni già accennati, altri indicati senza commenti nello schema:

forma	contenuto
(buttar) fuori	(guardar) dentro
a priori è la matematica reale, esterna	a priori è la coscienza del tempo, interna
in principio è il segno	guarda in te stesso
negazione del soggetto,	negazione della comunicazione,
basta comunicare	basta afferrare con la mente
di-mostrare	com-prendere
esse est percipi	esse est concipi
successo	peccato
difendere la matematica dai putsch	redimere la matematica dal peccato
il linguaggio dà forma	il linguaggio de-forma
formulatio praecox	abstinentia (o impotentia formulandi?)

In linguaggio matematico, la congettura è pertanto che Brouwer non sia il superamento di Hilbert, ma solo il suo duale, cioè che, almeno in prima approssimazione, tutto ciò che sta in Hilbert fuori si possa ritrovare rovesciato in Brouwer dentro, e viceversa. Resta da fare un lavoro più sistematico per confermare tale congettura, ma resta anche la sensazione di aver colto una struttura in cui molte tessere trovano posto in modo naturale. Così si può dire che sì, Brouwer è una rivoluzione, ma che porta soltanto all'antitesi dello stato di Hilbert, ed è ben lontana dalla sintesi del buon senso realizzato, nei fondamenti della matematica. Sia Hilbert che Brouwer in ultima analisi ci hanno dato prescrizioni, e non descrizioni della realtà. Ma, anche se è stato giusto aver creduto fino in fondo e per lungo tempo prima ai virtuosismi verbali dell'uno, poi ai silenzi introspettivi dell'altro, ora che la prescrizione è sentita come tale, non c'è più nessun buon motivo per seguirla.

1.6 Un tentativo di sintesi

Lasciare le strade tracciate dai due giganti del nostro secolo crea sgomento e dubbi, che solo il convincimento d'essere più vicini alla realtà può lenire e forse in futuro dissipare. Il buon senso e l'esperienza quotidiana dicono infatti che sia Hilbert che Brouwer hanno trascurato un banale dato di fatto: il processo di conoscenza è una continua altalena, anche in matematica, tra forma e contenuto, tra oggettivo e soggettivo, tra atti mentali e la loro espressione. Forma - contenuto, come altri (astratto - concreto, presenza - assenza, sintetico - analitico, oggettivo - soggettivo, esterno - interno) è un unico concetto complesso, o una dualità, di cui forma e contenuto sono solo i due poli, o estremi. Banalmente, non ci può essere una forma senza un contenuto di cui sia la forma, e viceversa, così come non ci può essere un fuori senza un dentro rispetto al quale sia fuori, ecc. Ma possiamo andare oltre ancora con banalità, ed osservare che il rapporto tra forma e contenuto è ben più ricco e dinamico che una semplice opposizione tra complementari. Infatti, ogni forma è ottenuta, anche in matematica, con un processo di successive distillazioni, o addirittura de-formazioni, della realtà esterna bruta, o del contenuto interno indistinto, proprio come la forma di un oggetto concreto è ottenuta trascurando quelle caratteristiche considerate inessenziali, o addirittura difetti (come un'ammaccatura sulla forma di un'automobile, una particolare espressione momentanea in un volto, il respiro del cantante in un brano musicale, ecc); si vede allora che per dar forma bisogna deformare, creando una struttura al di là delle singole rappresentazioni. E viceversa, per vedere e comprendere una forma come un tutto al di là delle singole sensazioni che la compongono, è necessario potervi cogliere un contenuto, per quanto soggettivo. Così il processo di creazione e comprensione si svolge per successivi raffinamenti in un oscillare continuo dall'esterno all'interno, dalla forma che esprime al contenuto espresso: nel momento in cui si dà forma esterna, anche se parziale, ad un contenuto interno, ad un atto mentale, anche se oscuro, si ha la possibilità di confrontare il contenuto della forma, l'oggetto denotato dall'espressione con il contenuto interno che si voleva esprimere, e quindi adattare l'una all'altro se necessario, e chiarire il contenuto o correggere la forma. E viceversa.

La necessità di questo rapporto dinamico è visibile concretamente nel modo di operare dei matematici: da una parte formalisti che per potersi orientare tra i segni sono costretti ad utilizzare un'intuizione, attribuendo un contenuto di secondo livello alle forme senza contenuto (ad esempio, usando parole come albero, radici, rami e foglie parlando di dimostrazioni formalizzate, o sviluppando un intuito che permetta loro di destreggiarsi con enunciati sulla cui verità non si impegnano, come nel caso dell'assioma di scelta), dall'altra intuizionisti che per poter comunicare tra loro e con se stessi sono costretti a dare espressione formale a concetti indicibili o troppo complessi per essere con-tenuti a mente (ad esempio, utilizzando la fauna più disparata di teorie assiomatiche per trattare il concetto di successione infinita di scelte).

Prendendo in considerazione solo un estremo della dualità forma - contenuto Hilbert e Brouwer bloccano il processo in un quadro statico che non può descrivere nemmeno una metà della realtà; l'aver riconosciuto invece un processo dinamico ci permette non solo di dar conto della realtà quotidiana, ma anche di proporre un'utile distinzione teorica, per quanto ancora allo stato fluido.

Diciamo che un concetto è esterno, o oggettificabile, quando i successivi scambi tra la sua forma e il suo contenuto hanno raggiunto uno stadio di sostanziale stabilità, e la forma esterna aderisce perfettamente al contenuto interno. In tal caso anche il gioco sulle formule non fa perdere contatto con il contenuto, anzi, può produrre nuove comprensioni; e viceversa, ogni elaborazione interna può essere espressa formalmente. Il concetto allora acquista le caratteristiche di un oggetto, più o meno concreto, perché il soggetto non è più

necessario per la sua esistenza, come Geppetto non serve più a Pinocchio da quando comincia a camminare. Alcuni concetti di questo tipo, come i numeri interi, sembrano tanto reali e concreti che ci si dimentica facilmente tutto il processo, storico e individuale, da cui sono stati generati; ma questo è proprio lo scopo, poterli adoperare come strumenti, acquistando un'abilità quasi automatica, simile all'abilità manuale in altre attività umane (come guidare l'automobile, suonare uno strumento, adoperare una piolla, ecc.). E, come per gli oggetti concreti, ci sembra di poterli percepire e conoscere senza ambiguità, proprio perché la forma esterna sorregge da sola tutto il contenuto, cosicché la sua interpretazione è sostanzialmente unica e quindi c'è un generale consenso sulla verità o falsità di ogni affermazione su di essi.

Ma presumere con Hilbert che ogni concetto sia oggettificabile, nel momento stesso in cui è in qualche modo espresso, solo perché conveniamo di poter affermare su di esso solo ciò in cui sappiamo d'essere tutti d'accordo, cioè solo quel che segue dagli assiomi, significa rovesciare artificialmente l'ordine delle cose, o addirittura barare con noi stessi, sostituendo la comprensione, il contenuto interno con una sua forma esterna parziale. D'altra parte, ritenere con Brouwer di poter, o dover, tenere a mente ogni prodotto mentale anche compiuto per non vederlo deformato dalla sua espressione, vuol dire non sgravarsi mai (quando perfino la possente testa del professor Kien in *Autodafè* ogni sera si sgravava dell'intera biblioteca che portava) e in definitiva non essere mai del tutto sicuri di parlare delle stesse cose.

Per mantenere la dualità, chiamiamo interno, o non oggettificabile, un concetto che non può essere liberato dalla partecipazione del soggetto in quanto la forma non esprime compiutamente il contenuto, ossia il processo dall'una all'altro non è ancora stabilizzato, o non lo sarà mai. Così un concetto interno non può essere oggettificato, poiché, per poterlo percepire come un oggetto, il soggetto dovrebbe porsi fuori di se stesso e considerare come un oggetto anche la propria attività mentale di formazione del concetto stesso. Il che non si dà, se non in modo fittizio, cioè operando una idealizzazione così spregiudicata da risultare avulsa dalla realtà oppure dichiarando che ogniqualvolta si diano proprietà non contraddittorie tra loro debba esistere un oggetto che le soddisfa (un po' come sostenere, in letteratura, che il fissare alcune caratteristiche che non si escludono tra loro automaticamente crea un personaggio).

Ad analoghe considerazioni, certamente motivate dallo stesso spirito, pervenne Federigo Enriques già nel 1906¹⁵, in qualche modo operando la sintesi del buon senso prima ancora che tesi (di Hilbert) e antitesi (di Brouwer) comparissero in modo esplicito. Certamente in Enriques, come qui fino a questo punto, non si trovano precise proposte tecniche, e perciò il lettore matematico può avere la sensazione di vuote chiacchiere che tanto irritavano Hilbert. Fortunatamente non è così, e la ricerca fondazionale di Per Martin-Löf, vera sintesi a posteriori, sta lì a dimostrarlo: la sua teoria costruttiva degli insiemi¹⁶ si propone come una fondazione sana dal punto di vista filosofico e nel contempo sufficientemente compiuta per poter sviluppare la matematica al suo interno¹⁷, ed è basata sulla distinzione tra set e category a cui la distinzione qui proposta tra concetti esterni ed interni corrisponde in qualche modo¹⁸. Ogni insieme definito induttivamente, o più in generale ogni concetto

¹⁵Nel suo bellissimo libro *I problemi della scienza*, Zanichelli 1906, ristampa anastatica 1985. Manca purtroppo un'elaborazione sistematica della filosofia della matematica suggerita da Enriques; una lacuna facilmente spiegabile ideologicamente, ma che resta sconcertante.

¹⁶Parzialmente esposta in P. Martin-Löf, *Intuitionistic type theory*, Notes by G. Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980, Bibliopolis 1984.

¹⁷Ad esempio, un approccio alla topologia tutto interno alla teoria di Martin-Löf, e su suo suggerimento, è sviluppato in G. Sambin, *Intuitionistic formal spaces - a first communication*, in: *Mathematical Logic and its Applications*, Plenum 1987, in corso di stampa.

¹⁸Per essere sincero, nutro la speranza di trovare una corrispondenza più fedele, ma non sembra così; pur tenendo conto della maggior genericità della mia proposta, una divergenza tecnica non marginale sembra esserci su $A \rightarrow B$, le funzioni da A verso B , che nella teoria di Martin-Löf è un set, mentre seguendo

generato da regole precise e prefissate, è un concetto esterno, e un set; dall'altra parte, i concetti di insieme in generale, o di proposizione, o anche di sottoinsieme di un insieme dato, sono certamente interni, e categories. Tuttavia, è probabilmente illusorio, proprio per la dinamica dei processi coinvolti (e per i fenomeni di autoriferimento esplicitati nei teoremi di Gödel, vedi paragrafo 7), aspettarsi un criterio generale di distinzione codificato univocamente in regole applicabili senza riflessione; in altri termini, si può ipotizzare che tale criterio sia destinato a rimanere interno, anche se la ricerca su tali argomenti è in pieno svolgimento e molto lavoro resta da fare. Alcune conseguenze specifiche sembrano comunque indicare abbastanza chiaramente la portata della distinzione proposta; ne illustro due per sommi capi.

Alla luce di quanto precede, l'atteggiamento di fronte ai paradossi cambia radicalmente. Infatti, in un modo o nell'altro ogni paradosso sembra nascere dalla indebita considerazione di un concetto come esterno. Frasi come l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi (Russell), l'insieme di tutti gli insiemi (Cantor), o anche io sto mentendo (o qualsiasi altra formulazione del mentitore), ecc., sono paradossali solo se si presume di vedere completato un processo in cui il soggetto è parte integrante. Dal nostro punto di vista, esse sono quindi puri giochi di parole la cui principale funzione è di rendere evidente lo scollamento tra linguaggio e realtà; il vero paradosso, se lo si vuole ad ogni costo, sta proprio nel vederle come paradossi, nel momento in cui si attribuisce alla pura espressione linguistica il potere di creare un'entità inesistente¹⁹.

Dal punto di vista costruttivo, o meglio, dal punto di vista di Martin-Löf, l'operatore di quantificazione universale su una funzione proposizionale $A(x)$ produce una proposizione $(\forall x \in S)A(x)$ solo quando si abbia un metodo per operare le sostituzioni $A(a)$ per $a \in S$, cioè quando S è un set. Altrimenti, e nel caso migliore, la quantificazione è solo un modo abbreviato, e spesso scorretto, per esprimere qualcos'altro²⁰. Un esempio dalla lingua quotidiana mi sembra particolarmente illuminante. Poiché il concetto di cavallo è interno (non abbiamo certo un metodo rigido per generare l'estensione di cavallo, e anzi siamo ben disposti a modificare la nostra immagine di cavallo di fronte ad un cavallo di aspetto insolito), la frase ogni cavallo ha quattro zampe non è interpretabile correttamente come una quantificazione, nonostante la presenza di ogni. Apparentemente, essa è equivalente alla frase il cavallo è un quadrupede, in cui la pseudo-quantificazione su estensioni lascia il posto ad una relazione tra concetti interni. Tuttavia, è del tutto concepibile un cavallo amputato d'una zampa, che falsifica la prima, ma non la seconda formulazione; quindi le due frasi non sono equivalenti, e se il significato inteso è lo stesso, si deve riconoscere che la prima è scorretta.

1.7 La settima rivoluzione

Se pur avendo promesso sette rivoluzioni ho mantenuto solo per sei è perché la settima rivoluzione è comprensibile soltanto ora dopo aver visto su quali (problemi sui) fondamenti poggiasse la matematica dopo i paradossi. Riprendendo allora il cammino lungo la storia, incontriamo subito una grossa novità, nella forma di un articolo pubblicato nel 1931 dal venticinquenne Kurt Gödel. Vi sono contenuti alcuni teoremi inaspettati che da allora

a spanne l'analisi precedente risulta un concetto interno, in quanto coinvolge implicitamente il concetto, certamente interno, di dimostrazione. Ciononostante, questo articolo può essere visto come una illustrazione delle motivazioni generali che io vedo per la ricerca di Martin-Löf.

¹⁹Che Enriques già nel 1906 esprima analogo posizione è inequivocabile, vedi Enriques, op. cit., p. 15.

²⁰Devo a Martin-Löf la comprensione di questo punto su un esempio matematico (le infinite successioni di scelte), da cui ho tratto l'idea più generale.

costringono i matematici (ma non solo loro) a rimeditare sul programma di Hilbert, e in generale sui sistemi formali.

L'idea di Gödel è di esprimere in formule (o aritmetizzare, come si usa dire) la stessa metamatemática di Hilbert; cioè, in un certo senso portando alle estreme conseguenze l'idea hilbertiana, Gödel riesce a rendere in formule, oltre alle dimostrazioni, anche la stessa trattazione delle dimostrazioni, che Hilbert aveva lasciato ad un livello contenutistico-intuitivo. Per aritmetizzare la metamatemática, si comincia associando in modo opportuno un numero naturale (cioè intero positivo) ad ogni formula di un dato linguaggio formale L in modo tale che dal numero si possa risalire senza difficoltà alla formula. In questo modo si può identificare senza danno la formula con il numero ad essa associato. Fatto questo, si procede similmente per le dimostrazioni di una data teoria formale T scritta nel linguaggio L , cioè ad ogni dimostrazione in T (che, ricordiamo, è una sequenza di formule secondo regole fissate) si associa un numero identificabile senza danno con la dimostrazione stessa. In questo modo, ogni enunciato sulle dimostrazioni, prima solo oggetto di considerazione intuitiva, può ora essere espresso da una formula numerica. Perciò, se ad esempio come teoria T si considera l'usuale teoria formale dei numeri PA (per Peano Arithmetic, ma ogni altra ragionevole teoria formale dei numeri andrebbe altrettanto bene), e quindi L è il linguaggio in cui PA è scritta, ci troveremo di fronte ad una teoria che, come si suol dire, parla di se stessa nel senso che le formule corrispondenti ad enunciati sulle dimostrazioni in PA sono proprio formule in PA .

Questa voluta confusione di livelli permette di leggere una stessa formula sia come enunciato su numeri che su dimostrazioni. In particolare, ci sarà una formula $B(n)$, B per *Beweis*, che esprime il fatto che il numero n , cioè la formula a cui il numero n è associato, è dimostrabile in PA . Questo, unitamente ad un cruciale espediente tecnico per esprimere l'autoriferimento (il famoso lemma di diagonalizzazione), permette di trovare una formula G che equivale alla formula che esprime che G stessa non è dimostrabile in PA (si suol dire che G esprime l'enunciato: Io non sono dimostrabile). A questo punto si scopre che

G è una formula vera ma non dimostrabile in PA

Allo stesso risultato, cioè l'esistenza di formule vere ma non dimostrabili, si arriverebbe anche estendendo la teoria PA , ad esempio aggiungendo G stessa agli assiomi, e alla stessa sorte va incontro ogni teoria assiomatica che obbedisca ad alcuni specifici requisiti minimi. Questa è la sostanza del primo teorema di Gödel; esso costituisce la prima limitazione alle ambizioni di Hilbert, in quanto dimostra che la teoria formale non è in grado di dimostrare tutte le formule vere nel dato linguaggio formale in cui è scritta.

Ancora più demoralizzante, e radicale, è tuttavia il secondo teorema di Gödel. La coerenza di PA equivale all'enunciato: la formula $0=1$ non è dimostrabile in PA . Chiamiamo $Con(PA)$ la formula numerica che a tale enunciato è associata. Gödel dimostra che

$Con(PA)$ non è dimostrabile in PA

e, più in generale,

ogni teoria formale che includa PA
non ha mezzi sufficienti per dimostrare la propria coerenza

Tralasciando le interminabili quanto fuorvianti discussioni su uomini e macchine che tale teorema ha suscitato, vediamo l'impatto che esso ha sul programma di Hilbert.

Per il secondo teorema di Gödel, una dimostrazione della coerenza di PA deve necessariamente far ricorso a qualche principio non contenuto in PA stessa; perciò, se si cerca una dimostrazione finitaria, si deve estendere l'ambito della matematica finitaria oltre a ciò che è

esprimibile in PA. Chiarito questo, Gerhard Gentzen trovò nel 1936 una dimostrazione della coerenza di PA in cui come principio esterno a PA si usa l'induzione fino ad un particolare numero ordinale transfinito, usualmente chiamato epsilon-zero. Non è facile descrivere come si possa raggiungere epsilon-zero, e ancora meno spiegare perchè dovrebbe essere incluso nella matematica finitaria, o reale. Una giustificazione plausibile si trova in un libro di Gaisi Takeuti²¹, dove però il lettore troverà parecchie pagine di estrema complessità combinatoria, per quanto elementari concettualmente. Se ricorderà allora che, a voler mantenere inalterato il programma di Hilbert, tutto ciò deve essere considerato a priori, immediatamente intuitivo, ecc. sarà probabilmente colto da dubbi. Ma si può pure supporre di averli risolti, perché comunque altri dubbi più profondi compaiono subito. Infatti, se dall'aritmetica passiamo all'analisi matematica, cioè ad una teoria formale per i numeri reali, la dimostrazione di coerenza deve attendere il 1970 e richiede l'induzione fino ad un ordinale infinitamente più grande di epsilon-zero. Così i dubbi aumentano, ma non sono ancora insormontabili.

Ma non possiamo dimenticare, come si fa spesso, che Hilbert riteneva un obbligo dei matematici una dimostrazione di coerenza per ogni teoria assiomatica usata, in particolare quindi per la teoria assiomatica degli insiemi ZF (per Zermelo-Fraenkel, ma anche qui ogni considerazione si applica indifferentemente a tutte le altre assiomatizzazioni note della teoria degli insiemi). Ma questo per un matematico come Hilbert è proprio impossibile, e il dubbio diventa (o dovrebbe diventare) disillusione. Infatti, per il secondo teorema di Gödel, $Con(ZF)$ non è dimostrabile in ZF. Pertanto, come per PA, per dimostrare la coerenza di ZF avremmo bisogno di un principio non dimostrabile in ZF stessa. Ma è del tutto irragionevole sostenere che la matematica finitaria non sia contenuta nella teoria degli insiemi, nella quale è di fatto contenuta tutta la matematica d'oggi (ad esempio, lo stratagemma usato per la teoria dei numeri naturali e reali qui non è applicabile, perché in ZF è dimostrabile l'induzione transfinita fino a qualsiasi numero ordinale). Così, per quanto si voglia dilatare l'estensione della matematica finitaria, cioè dell'a priori, non è proprio possibile portare a compimento il programma originario di Hilbert. Resta il problema di sapere almeno se possiamo raggiungere la sicurezza matematica sulla coerenza di ZF, a qualunque costo; ma anche qui la realtà diverge completamente dalle aspettative di Hilbert. Infatti, è attualmente del tutto inimmaginabile un principio matematico che trascenda la teoria degli insiemi, come invece una dimostrazione di coerenza richiederebbe per il teorema di Gödel.

Di fronte all'inevitabile alternativa se accettare ZF solo per atto di fede o convinzione filosofica oppure abbandonare ZF, soffrire un po' e poi cercare qualcosa di meglio, tutti o quasi i matematici hanno scelto la prima, ancora e quasi esclusivamente per conservare (ma allora brucia rileggere che per Hilbert nella scelta, nella concezione e nell'uso degli assiomi e delle regole non vogliamo certo far riferimento alla buona fede e alla semplice fiducia (253)). In altri termini, il potenziale esplosivo della rivoluzione di Gödel è da molti matematici semplicemente tenuto in cantina e l'insospettabile edificio della matematica abitato con noncuranza (come con noncuranza è morto di fame Gödel stesso meno di dieci anni fa). Il disagio è invece avvertito tra gli informatici, che non possono ignorare la realtà dei limiti e i limiti della matematica, perché alla realtà devono rendere conto; e se la storia ci ha insegnato qualcosa, sarà probabilmente l'informatica, come la fisica dei secoli scorsi, a far brillare la carica.

1.8 Epilogo

La storia in generale, e i teoremi di Gödel in particolare, ci costringono a tener ben presente un fatto molto semplice: anche la matematica è un prodotto umano, inserito nella storia e

²¹G. Takeuti, *Proof Theory*, North Holland 1975.

soggetto ai limiti della nostra conoscenza. è per questo che nemmeno in matematica (e in logica) ci si può aspettare una base assoluta, cioè l'esenzione da ipotesi e da contraddizioni; pretendere la verità dai matematici (o dai logici) significa considerarli officianti di un rito, e non voler accettare di diventare laici rispetto al mito della matematica come bastione di certezza, come assoluto dei tempi moderni.

Tuttavia, se da una parte il problema dei fondamenti non può più ridursi alla ricerca, rivelatasi illusoria, di un sistema formale onnicomprensivo e privo di contraddizioni, dall'altra non possiamo abdicare a favore di una matematica senza fondamenti, come alcuni recentemente sostengono, in cui di fatto vince chi fa la voce più grossa o chi promette la felicità. Dal punto di vista qui sviluppato, una sana fondazione è nient'altro che la ricerca di un equilibrio tra forma e contenuto, cioè di una adeguata formulazione delle nostre intuizioni e una corretta comprensione delle forme. Certamente uno scopo è l'ampliamento della parte oggettificata della matematica, e per questo alla forma non vogliamo proprio rinunciare. Ma non tutto è riducibile a formule, in quanto la fabbrica dei concetti e delle forme siamo noi stessi, e quindi è al nostro modo di fabbricarli che dobbiamo rivolgere attenzione, piuttosto che ad una giustificazione a posteriori dei risultati.

Come ogni ramo della matematica, anche la teoria assiomatica degli insiemi, nonostante le patologie da cui è afflitta, vive sopra un'intuizione feconda, pur se nascosta o inconsapevole. Compito del vero filosofo della matematica, sia egli matematico o filosofo di professione, è farla emergere, liberandola dagli schemi formali che la ingabbiano, e descrivere direttamente la realtà dei processi di creazione della conoscenza matematica. Abbandonare l'illusoria certezza delle forme non è facile né indolore; ma solo così, e con la tolleranza e il confronto di ipotesi e tentativi diversi, si può sperare in una nuova più profonda comprensione.

Capitolo 2

Per una dinamica nei fondamenti

La volontà dell'uomo di non essere ingannato, tale è appunto l'origine del problema della conoscenza! Si tratta sempre ed unicamente di questo: apprendere e toccare la realtà di mezzo alle mille cause d'errore per cui la nostra osservazione è viziata.

F. Enriques, *Problemi della Scienza*.

Il guaio è che chi crede ad un miracolo si trova costretto a credere a qualunque cosa.

G. e M. C. Bateson, *Dove gli angeli esitano*.

Leggevo con piacere l'invito al congresso di Viareggio della SILFS, quando mi resi conto d'essere stato inaspettatamente inserito nella sezione Fondamenti della Matematica. Poteva essere un'errore, ma istintivamente decisi di raccogliero come un'occasione per cercare di dare una forma sistematica alle mie opinioni sui fondamenti, saltuariamente espresse in un paio d'occasioni¹; fu così che arrivai a vedere lo stesso processo dinamico, che avevo osservato come necessario per la formazione delle astrazioni matematiche², alla base anche di ogni concetto astratto. Allora comparve un'unica struttura molto generale, in cui un po' alla volta hanno preso posto in modo naturale e trovato unità sia i fatti osservati che le opinioni maturate sui fondamenti della matematica nel corso degli anni.

Dopo la mia relazione a Viareggio, il compito di introdurre e giustificare tale struttura in forma scritta mi spinse ad approfondirla ed arricchirla un po' per volta, finché mi resi conto di aver raggiunto una nuova prospettiva generale e autonoma, che anzi ora mi sembra l'unica da cui poter spiegare e collegare tra loro, senza assunzioni a priori, i diversi fatti riguardanti non solo i fondamenti della matematica, ma il processo di astrazione in generale.

Il mio intento ora è di esporre le idee generali nel modo più sistematico possibile, sviluppando i temi più specifici, e le conseguenze per la matematica, quanto basta per mettere

¹Al V Incontro di Logica Matematica di Siena, Aprile 1983 (vedi Alle radici della logica, in: Atti degli Incontri di Logica Matematica, vol. 2, a cura di C. Bernardi e P. Pagli, Scuola di Specializzazione in Logica Matematica, Siena 1985, pp. 377-386), ad un congresso a Padova, Dicembre 1986, e ai seminari del Dipartimento di Filosofia di Firenze, Aprile 1987 (vedi Alla ricerca della certezza perduta (forma e contenuto nei fondamenti della matematica), in: Forma Rappresentazione Struttura, Atti del Convegno di Studio, a cura di O. Longo, Napoli 1989, pp. 17-35).

²Vedi Alla ricerca..., par. 5.

in luce come possano essere la base per una dinamica nei fondamenti, ovvero un atteggiamento globale più flessibile e aperto, e più fedele ai fatti; lo scopo non è proporre una nuova fondazione (e anzi, lascio al lettore anche il compito di un confronto con altri contributi, soprattutto quelli più recenti), ma illustrare come sia possibile affrancarsi da dogmi ideologici, ontologici e metafisici (peraltro ormai in fin di vita) senza precipitare nel vuoto, e anzi creando lo spazio per nuove e più interessanti prospettive.

Ho seguito nell'esposizione l'ordine che ora mi sembra più naturale, cercando di buttare la scala dell'itinerario personale; della mia esperienza restano comunque tracce consistenti. Cercando di dare una ragione ai fatti, più che di soppesare le diverse teorie già confezionate, mi son trovato ben presto ad esplorare territori usualmente tenuti separati dalla matematica, e in cui la mia conoscenza è limitata; si legga allora un potrebbe essere che... anche là dove manchi esplicitamente. Questo è anche uno dei motivi per cui ho scelto di non scrivere in inglese³.

È un grande onore e un piacere per me poter ringraziare in questa sede Per Martin-Löf. In generale, il suo modo di intendere l'intuizionismo e la filosofia della matematica, che ho avuto la possibilità di conoscere direttamente in molte e lunghe conversazioni, ha esercitato su di me un'influenza profonda e duratura, che dovrebbe risultare chiara anche al di là delle apparenze e in mancanza di citazioni esplicite. In particolare, mi hanno molto incoraggiato la sua curiosità e pazienza nell'ascoltare alcune delle opinioni qui contenute. Forse non è usuale, ma sento di dover esprimere anche il mio debito culturale nei confronti di Federigo Enriques. Spesso mi è sembrato di ritrovare, con parole mie, ciò che a entrambi era ben noto da tempo.

Ringrazio sinceramente anche tutti gli altri amici che mi hanno dato attenzione, suggerimenti e fiducia, in particolare Carlo Cellucci, Alberto Peruzzi, Giancarlo Pretto, Agostino Racalbutto, Claudio Sossai, Silvio Valentini, a ciascuno dei quali è legata la storia di questo lavoro.

2.1 Introduzione.

La vivacità del dibattito filosofico sui fondamenti della matematica dell'inizio del secolo era sostanzialmente dovuto a due reali motivi: da un lato si volevano irrobustire le basi comuni di una matematica enormemente sviluppata, e dall'altra contemporaneamente si doveva difenderla, in un modo o nell'altro, dalla minaccia delle contraddizioni.

Lo scontro, talvolta aspro, tra le diverse posizioni, rappresentate dalle tre scuole - logicismo, intuizionismo e formalismo - è andato spegnendosi a partire dagli anni '30, sia per consunzione dei principali contendenti, sia per le scoperte di Gödel; ed è solo apparentemente paradossale che proprio il formalismo, che con i teoremi di incompletezza non ha più alcuna plausibilità teorica, di fatto sia risultato vincente nella pratica matematica.

Infatti logicismo e intuizionismo, troppo riduttivi o normativi, non hanno saputo fornire una cornice alternativa globale in cui inserire la pratica della matematica. Nel formalismo, invece, i matematici hanno trovato non solo un linguaggio di base comune e semplice, ma anche una filosofia in negativo che ha costituito un buon alibi per poter svuotare di rilevanza e delegare ad altri le questioni fondazionali; e le stupefacenti conquiste tecniche di questo secolo, pur cominciato nel segno delle contraddizioni, hanno fatto presto dimenticare ogni bisogno di difesa.

Perduta ogni rilevanza per i matematici, il dibattito si è ristretto a pochi cultori, lo scontro vitale è degenerato in una schermaglia accademica che non scalfisce la sostanza,

³Altri sono il bisogno di non avere intralci linguistici nel tentativo di esprimermi sinteticamente e la possibilità di farmi condurre dalle parole, anche utilizzando le immagini che esse suggeriscono.

la crisi dei fondamenti ha esaurito la sua spinta propulsiva; così di fatto il mondo della matematica oggi assomiglia ad una democrazia sostanzialmente monopartitica, in cui non si fa più politica.

La mancanza di una vera discussione comune, e quindi di flessibilità, si fa sentire in modo particolarmente acuto oggi. Di fronte alla richiesta degli informatici per nuove strutture e strumenti alternativi, l'aver dato per scontate o irrilevanti le questioni di interesse puramente filosofico, ora si dimostra un'imprevedibile mancanza di investimenti per i matematici, che si trovano sprovvisti di esperienza in proposito, e tanto più di una teoria⁴.

Per evitare la stagnazione e l'isolamento, a mio parere prima o poi fatale per la matematica stessa, mi sembra che si debba uscire dalle tre scuole, abbandonare le ideologie che le hanno generate, tornare a porci la domanda di base: che cosa significa fare matematica? e cercare di rispondere direttamente, assumendosene la responsabilità. Con ciò mi sono già posto in un partito: penso che la questione non debba essere posta come qual è la natura degli enti matematici e nemmeno che cos'è la matematica, perché queste formulazioni potrebbero farci ricadere in un inutile rimescolamento di quelle ideologie che si sono rivelate troppo strette e sempre più lontane dalla realtà.

Una debolezza comune alle diverse scuole, dovuta forse al momento storico di difesa in cui sono nate, è infatti il concepire la matematica in modo scisso, come qualcosa che si fa sì liberamente, ma la cui vera identità sta in ciò che dovrebbe essere, e che è sempre qualcosa'altro: matematica da esprimere come giustificabile gioco di formule (secondo i formalisti), da rifondare su principi logici (secondo i logicisti), da purificare da alcuni peccati (le applicazioni, il linguaggio, il dominio sulla realtà) tramite il misticismo e le libere costruzioni del soggetto (secondo gli intuizionisti).

La storia dell'umanità ci ricorda invece che il fare matematica non ha alcun bisogno di essere giustificato o redento o fondato o ridotto ad altro, ma solo compreso, liberato e riportato a ciò che comunque è di fatto: un aspetto essenziale della capacità umana di acquistare conoscenza della realtà.

Per questo mi sembra necessario ripartire dai fatti, cioè da come si è fatta, si fa, si usa o si impara la matematica, e cercare di collegarli e coglierli direttamente come espressione evoluta delle capacità connaturate all'uomo. A me sembra infatti che in generale la strada migliore per comprendere l'uomo e i suoi prodotti, tra cui la matematica, sia di vederli come risultato del cammino dell'evoluzione naturale della specie.

Da questo punto di vista, la precedente osservazione sulla debolezza comune alle tre scuole perde il suo alone etico o psicologico, e acquista semmai quello antropologico o biologico: le fondazioni tradizionali risultano risiedere in qualcosa che, nella scala dell'evoluzione naturale e culturale, sta sopra o viene dopo i fatti che si pretendono fondare. Ritengo invece che una sana fondazione, se proprio non vogliamo rinunciarvi, debba tentare di ricondurre ragionevolmente i fenomeni complessi (come la matematica) alle loro radici più semplici, cioè più vicine alla realtà della natura o precedenti nella storia dell'evoluzione⁵. Ma poiché la matematica è forse la forma di conoscenza più astratta e apparentemente assoluta prodotta dall'umanità, si arriva a dover esaminare molto più in generale il processo di astrazione dal punto di vista naturalistico ed evolutivo; a questo è dedicato il prossimo paragrafo.

⁴Ad esempio, avendo assunto senza alternative la fondazione data dalla teoria assiomatica degli insiemi, ZF o varianti, i matematici si son trovati totalmente impreparati alla richiesta di teoria dei tipi, che per fortuna una minoranza di logici aveva coltivato per interesse puramente filosofico. Lo stesso vale per le logiche non classiche, per l'analisi costruttiva e altri argomenti nati dall'esigenza filosofica di rendere logica e matematica più adeguate alla realtà.

⁵Usando il linguaggio di G. Bateson, *Mind and Nature, a necessary unit*, 1979 (trad. it. *Mente e natura, un'unità necessaria*, Milano 1984) si potrebbe dire che una fondazione della matematica non può essere di tipo logico superiore alla matematica stessa. Ringrazio Giancarlo Pretto per avermi suggerito la lettura di questo libro (e per avermi ceduto la sua copia).

Quando la teoria generale qui sviluppata è applicata alla questione dei fondamenti, ha come conseguenza diretta un'idea di base che si lascia esprimere in poche parole: vedere come principio unificante un processo dinamico⁶ di cui le tre filosofie tradizionali vedono un solo aspetto. Logicismo, intuizionismo, formalismo risultano sostanzialmente compatibili quando riusciamo a vederli come momenti diversi di un unico movimento, come fotogrammi diversi di un unico film. Lo scontro tra le diverse fondazioni, e nello stesso momento il loro fallimento, comincia quando ciascun punto di vista, pur statico, pretende d'essere totale, cioè appunto una fondazione. La matematica, come ogni altra forma di conoscenza umana, si costituisce in un processo sempre in moto, che non si può ricostruire dal frammento di un'unica immagine istantanea, per quanto importante e ampia.

Per poter considerare, ed eventualmente accettare, questa impostazione è necessario abbandonare l'equazione tra stabilità e staticità, che compare implicitamente nella stessa parola fondamenti e che per molti sta alla base della fiducia nella certezza della matematica. Costa fatica sostituire la solida immagine d'un maestoso castello ben piantato sulla roccia con quella sfuggente ed indistinta dei processi elementari su cui è basato ogni organismo vivente; ma è a questo che la realtà dei fatti conduce, come nel seguito cerco di illustrare.

Dico illustrare, non certo dimostrare, perché non c'è modo di dimostrare che l'impostazione stessa appena proposta sia più efficace e coerente, se non vedendola all'opera; comunque, il suo vantaggio sulle altre è che, magari idealmente o nel futuro, ogni asserzione è verificabile empiricamente. Mi auguro che ora la fatica di seguirmi sia minore della mia per aprire la strada, ma tuttavia sia compensata da un analogo senso di liberazione.

2.2 Astrazione come attività biologica, mentale e sociale.

2.2.1

Una continuità evolutiva lega l'uomo agli altri animali; la differenza, pur se vistosa, non è un brusco salto, non c'è nell'uomo una caratteristica macroscopica che, seppure in forma molto rudimentale, non si possa trovare anche presso altre specie. Dal punto di vista anatomico, questa è una banalità (e comunque spesso, sopravvalutando la nostra mente, dimentichiamo che anche nel corpo la nostra specie è molto più evoluta di tante altre); ma lo stesso vale per ogni aspetto umano, incluse capacità e comportamenti. Da una parte, antiche e nuove scoperte sul mondo degli animali ci fanno vedere molte affinità: ad esempio, gli uccelli e i castori costruiscono complesse abitazioni, i pappagalli (o i merli indiani) articolano i suoni delle parole, le balene eseguono canzoni seguendo una moda che cambia anno per anno, i salmoni e ancora gli uccelli memorizzano luoghi e si orientano per tornarci in modo ancora difficile da spiegare, api e formiche hanno un linguaggio e una divisione sociale dei compiti, alcune specie di scimmie sanno tramandare le conoscenze imparare dall'esperienza (hanno cioè una forma di cultura). Dall'altra, l'osservazione della nostra stessa specie da un punto di vista etologico ci porta a riconoscere che molti comportamenti umani, usualmente considerati come frutto dello spirito, hanno la loro radice, spesso non così profonda, in istinti naturali specifici dell'uomo o comuni con altri animali⁷.

Il fatto che molte facoltà umane non siano immediatamente o direttamente riconducibili

⁶Sarei tentato di usare la parola dialettico, se non fosse così compromessa con storia, tradizioni e significati di cui non conosco tutte le implicazioni.

⁷Vedi ad esempio D. Morris, *The naked ape, a zoologists's study of the human animal*, 1967 (trad. it. *La scimmia nuda, studio zoologico sull'animale uomo*, Milano 1981); anche l'osservazione spassionata dei nostri consimili può essere molto istruttiva a proposito.

all'evoluzione, o analizzabili esaurientemente nei termini della fisiologia, non è affatto motivo sufficiente per postularne una provenienza soprannaturale o comunque immateriale. Al contrario, la loro complessità è dovuta proprio alla complessità della loro storia evolutiva, e l'origine biologica⁸ è spesso confermata dalla loro indipendenza dalla volontà, come per ogni funzione fisiologica.

Tipiche in tal senso sono le molteplici capacità concernenti l'organizzazione delle sensazioni in percezioni, talmente naturali da rimanere per la massima parte inconsapevoli, quasi come le funzioni vitali di digerire e respirare. Ad esempio, è inconsapevole, difficile da riprodurre, ma non per questo meno naturale, il lavoro mentale necessario all'organizzazione degli stimoli visivi forniti dai due occhi in un'unica percezione provvista di profondità, che costituisce un innegabile miglioramento evolutivo; tanto che lo smembramento in due immagini non sovrapposte, che talvolta capita per stanchezza, non sempre può essere ottenuto volontariamente, nello stesso modo in cui non si può ottenere volontariamente il blocco prolungato del respiro o della digestione. Lo stesso vale per la cosiddetta visione periferica, quel riflesso che ci fa inavvertitamente girare la testa se ai bordi del nostro campo visivo si muove qualcosa o qualcuno ci guarda.

Anche salendo verso processi più chiaramente mentali, il fatto che restino inconsapevoli ci ricorda la loro origine biologica. Così è per tutto il lavoro necessario a formare e memorizzare precise immagini mentali per oggetti⁹, e di mantenerle accessibili per il riconoscimento in momenti successivi; basta riflettere, ad esempio, sulla prodigiosa inconsapevole capacità, probabilmente già specifica della specie umana, di riconoscere un individuo (della stessa razza) dal volto¹⁰. Anche la costruzione mentale di immagini come un tutto, il principio di base della psicologia della Gestalt, per quanto integrato con aspetti culturali, è un'attività mentale in massima parte inconsapevole e naturale.

Questi esempi riguardanti la visione (per qualche lettore potrebbe essere stato più suggestivo considerare altri sensi, e quindi ad esempio la capacità di associare innumerevoli esperienze mentali ad infinitesime variazioni del gusto, come in un esperto appassionato di vino, o quella di concentrare l'ascolto su una melodia anche in presenza di un rumore molto più forte) ci dimostrano come una notevole quantità di elaborazione mentale, spesso inconsapevole, sia necessaria per passare da impulsi fisici a qualcosa che la mente possa memorizzare e collegare con altri contenuti mentali. Tutto ciò è costantemente in funzione nella nostra mente, e funziona in modo appropriato, anche se inconsapevole per chiari motivi di economia e parzialmente ancora misterioso. Ed è solo un minimo frammento della vasta gamma di caratteristiche della mente umana intermedia tra attività mentali superiori, come le creazioni intellettuali, e i meccanismi fisiologici di sicura base materiale biochimica. Oltre a quelli accennati, infatti, moltissimi altri esempi sono possibili, alcuni più vicini alla natura animale e corporea, come i riflessi motori, la funzione del dolore e dell'ansia, le espressioni

⁸Qui e d'ora in poi uso la parola *biologia* e derivati nel senso più vasto, ma etimologico, di scienza della vita.

⁹Qui e in seguito uso la parola *oggetto* in un senso molto ampio, come qualunque unità che possa essere sentita da un individuo, o soggetto, come distinta da sé stesso, e quindi fuori o davanti; questo è in perfetto accordo con l'etimologia delle due parole, che derivano rispettivamente dalla composizione di *ob*, sopra, innanzi, e *sub*, sotto, dietro, con *jacere*, gettare, porre.

¹⁰Uno studioso imparziale come il matematico Hadamard la descrive così: Davvero, fatti molto comuni illustrano con piena evidenza non solo l'intervento di fenomeni inconsci, ma una delle loro proprietà importanti: alludo al fatto familiare - che non significa semplice - di riconoscere un volto umano. Identificare una persona nota richiede l'aiuto di centinaia di tratti, di cui nemmeno uno si potrebbe esplicitare [...] Non-dimeno, tutti questi caratteri del volto della persona amica devono essere presenti nella mente - la mente inconscia, naturalmente - e tutti nello stesso istante. J. Hadamard, *The psychology of invention in the mathematical field*, New York 1946, p. 23. *** attenzione: é un errore da correggere: anche gli scimpanzé si riconoscono dal volto, e chissà quanti altri animali ***

incontrollate della faccia, altri più vicini alla mente e legati alla cultura, ma comunque con profonde radici negli istinti, come il linguaggio, il pianto e il riso, l'innamoramento, il gioco.

Può sembrare paradossale chiamare in causa le macchine a questo punto; e tuttavia mi sembra che di fatto il paragone dell'uomo con i calcolatori elettronici, purché il più possibile onesto e libero da pregiudizi, contribuisca ad illuminarci su alcuni aspetti poco considerati della mente umana¹¹.

Viene spontaneo paragonare i sensi e gli arti con i vari tipi possibili di periferiche o parti meccaniche, il cervello e il sistema nervoso con l'unità centrale di elaborazione, alias CPU, e altri processori secondari. Tutti gli altri organi, non dimentichiamolo, mancano al calcolatore¹². Resta la mente, nella forma di software di vario genere: gli aspetti fisiologici corrispondono al sistema operativo, l'attività mentale superiore e la conoscenza individuale corrispondono ai programmi applicativi presenti, e naturalmente la memoria corrisponde alla memoria.

Ma anche se restringiamo il paragone a questo terreno a lui più congeniale, e anche se inoltre tralasciamo volutamente istinti, affetti, esperienze, desideri e idee, e tutto ciò che li gestisce (cioè il dettaglio che chiamiamo usualmente vita umana), il cervello elettronico, per quanto veloce ed efficiente, dimostra d'essere di gran lunga meno evoluto e complesso del cervello umano, proprio in quanto manchevole in tutto ciò che connette la mente con l'ambiente, o vari contenuti della mente tra di loro. Supponiamo che la penuria di quella che di solito chiamiamo intelligenza sia imputabile a mancanza di software applicativo adeguato, e prendiamo in esame il funzionamento della macchina in sé, cioè la neurofisiologia-sistema operativo, e in particolare la gestione della memoria. Una caratteristica essenziale della mente umana, che manca ai calcolatori d'oggi, è data dalle diverse modalità di creazione, gestione e accesso alla base di dati in memoria. Ad esempio, il data-base situato nel nostro corpo, principalmente ma non solo nel nostro cervello, è accessibile in una varietà di modi che ai calcolatori d'oggi è preclusa: da un lato, il proprio nome è immediatamente accessibile, all'altro estremo il proprio codice genetico o le istruzioni per riprodurre i fonemi della propria lingua madre sono totalmente inaccessibili. E i termini come conscio, preconscious, inconscio usati in psicologia si possono intendere come riferiti ad alcuni dei modi intermedi di accesso alla memoria. Analoghe osservazioni si applicano a tante altre caratteristiche della memoria umana, come il continuo aggiornamento e ripasso dei dati in memoria, la sintesi operata sui dati in ingresso, la complessità del legame tra le varie aree, la funzione essenziale del dimenticare e del riorganizzare (anche involontariamente, ad esempio tramite i sogni). E similmente, oltre alla memoria, a tante altre funzioni interne della mente, come l'ideazione, l'intuizione, la gestione del paradosso o dell'incoerenza, ecc, per le quali non esiste ancora il corrispondente in una macchina.

Dovrebbe quindi essere chiaro il primo motivo per cui il paragone con le macchine, per certi versi irriverente, è invece illuminante, e anche rassicurante: ci fa intendere che non può esserci intelligenza vera e significativa senza un legame con la realtà dell'ambiente e con la mente di altri individui, e ci porta quindi a rivalutare tutte quelle capacità fisiologiche che

¹¹Questo non è affatto casuale; infatti, come si vedrà nel seguito più in generale, è parte essenziale del processo di conoscenza anche il proiettare all'esterno, su oggetti reali o immaginari capaci di assumerle, le conquiste parziali acquisite. Tipica in questo senso è proprio la storia del rapporto dell'uomo con le macchine da lui stesso prodotte; dalla proiezione di se stesso sulle macchine, l'uomo è stato spesso indotto a modificare l'opinione e la comprensione di se stesso.

¹²Non sa muoversi, quindi non ha l'analogo di scheletro e muscoli, non sa riprodursi, quindi mancano non solo gli organi genitali ma anche tutte le funzioni di riproduzione delle cellule, non sa adattarsi da solo, quindi mancano tutti i complicatissimi sistemi di autoregolazione del corpo umano, e infine soprattutto non sa procurarsi da solo l'energia necessaria per vivere, ma riceve passivamente energia elettrica come un sangue vivo e pronto, e quindi niente bocca, stomaco, fegato, reni, intestino, polmoni, cuore ecc.

ce lo consentono, e che mancano alle macchine¹³. In altre parole, ci fa capire che paragonare la nostra mente con quella di un computer ha circa lo stesso senso che paragonare la nostra capacità di locomozione con quella d'un treno (binari compresi).

D'altra parte, il fatto che il calcolatore, a partire da silicio e programmi, bene o male possa simulare qualche comportamento intelligente, ci porta all'idea che anche per l'intelligenza e in generale per la mente umana far intervenire principi superiori sia solo una copertura della nostra ignoranza dei meccanismi biologici su cui sono basate.

Alla stessa idea siamo condotti sia osservando gli altri animali, sia soprattutto rimettendo in campo tutta la vasta e complessa gerarchia di caratteristiche umane, in particolare quelle che, come i pochi esempi sopra appena abbozzati, proprio per motivi di economia mentale restano inconsapevoli e che quindi molto opportunamente siamo portati a dimenticare. Esse infatti vanno a colmare quella frattura che spesso si pone tra mente e corpo e forniscono gli anelli mancanti della continuità evolutiva, non nella forma di specie la cui esistenza sia postulata da qualche teoria, ma quella di stadi evolutivi diversi, tanto più inconsapevoli quanto più antichi e profondi, che la specie uomo riassume in se stessa.

Siamo così portati a riconoscere la validità di un principio generale: ogni aspetto dell'uomo, incluse tutte le facoltà mentali, è parte della sua natura biologica, e quindi in linea di principio il risultato di meccanismi biochimici¹⁴. Questo non comporta tuttavia dover sottostare all'incubo di un meccanicismo o determinismo ottocentesco. Innanzitutto perché, come abbiamo intravisto analizzando i risultati macroscopici, è tale la complessità coinvolta, dovuta alla complessità della storia evolutiva, che oggi l'ipotesi di una riduzione completa non ha di fatto alcun senso positivo; basta ripensare, conservando i termini del paragone con il calcolatore, a quanto poco si sa già del primo gradino, la fisiologia - sistema operativo, per renderci conto di quanto sia irrealistica oggi l'aspettativa di conoscerne il listato¹⁵. Ma anche assumendo di conoscere tutte le leggi del funzionamento, si può ben immaginare che, ancora, la complessità sia tale che la distinzione tra la previsione e l'attuazione perda ogni significato, se non puramente metafisico¹⁶; nei fatti, solo l'estrapolazione delle leggi della meccanica classica per mancanza di più adeguate conoscenze, ci impedisce di conciliare l'imprevedibilità del comportamento di un essere vivente complesso con la sua struttura materiale. Ed infine, più in generale, non c'è motivo se non psicologico per credere che l'evoluzione stessa segua una storia in qualche modo prestabilita o finalizzata.

Anche la capacità di operare astrazioni è un fenomeno biologico. Qualche forma di astrazione è presente anche negli altri animali, se non altro con la capacità di trasformare sensazioni in percezioni e mantenere immagini nella mente, ma ancor di più con il gioco e i rituali, presenti in molte specie; possiamo così intuire che anche nell'uomo l'enorme sviluppo dell'astrazione sia pur sempre legato ai vantaggi che assicura.

Tuttavia, ciò che negli altri animali sembra un'eccezione, e comunque limitata ai livelli più bassi, nell'uomo diventa una regola generale, un bisogno sempre in funzione, una necessità; in altre parole, l'astrazione compare come risultato manifesto di un istinto, che possiamo chiamare l'istinto di conoscere. E questa mi sembra la strada per arrivare a concepire anche la coscienza, ciò che ci distingue (penuria di pelo a parte) da qualunque animale e macchina,

¹³Non è un caso che la ricerca attuale in intelligenza artificiale, abbandonate alcune aspettative iniziali, si stia scontrando con la difficoltà di analizzare, e quindi riprodurre, capacità per noi scontate come la visione; la difficoltà, mi sembra, sarebbe stata facilmente prevedibile tenendo presenti gli esempi menzionati.

¹⁴Questo modo di vedere è argomentato su basi neurofisiologiche ad esempio in V. Braitenberg, *I veicoli pensanti*, Milano 1984, in modo comprensibile, autorevole e molto piacevole.

¹⁵Vedi anche a questo proposito la fondamentale legge della maggior fatica analitica di Braitenberg, *op. cit.*, pag. 39, ovvero ad esempio la difficoltà a ricostruire le istruzioni di un programma conoscendone solo il comportamento.

¹⁶Vedi ancora Braitenberg, *op. cit.*, per una possibile spiegazione del libero arbitrio nei termini della neurofisiologia.

come risultato naturale: una forma in qualche senso esasperata di astrazione, caratterizzata da una forte capacità di autoriferimento e più in generale da un'estrema facilità di passaggio ad un diverso livello di riferimento.

È esattamente ciò che mi consente ora di pormi, o meglio mi impone, tali questioni. E a voi di cogliere che una frase come questa stampante è difettosa non è parte della mia relazione. E che la frase precedente invece lo è, ecc. È ciò che letteralmente impedisce ad un uomo normale di continuare a ripetere lo stesso pattern senza prima o poi passare ad esaminarlo e, passando ad un livello di riferimento superiore, renderlo cosciente, e quindi se possibile fermarsi. Questo istintivo rifiuto della ripetitività è appunto il motivo per cui si cerca di delegare ad altri, animali o macchine, certi compiti.

In altri termini, quello che ci rende gli animali più preziosi, è il fatto che nella specie umana la natura sembra parzialmente chiudere un ciclo e l'evoluzione riprodurre se stessa; infatti, con la coscienza, e quindi la possibilità di tramandare conoscenza, cioè la cultura e la scienza, l'evoluzione che negli altri casi si manifesta con la comparsa di nuove specie, nell'uomo si manifesta all'interno della stessa specie: ad esempio, per migliorare la difesa dal freddo e dai batteri, l'evoluzione umana ha creato vestiti e antibiotici. Con immagini un po' più poetiche, la natura ci ha dato la parte di sé più preziosa, vitale e complessa, cioè la capacità di creare, oltre che riprodurci e sopravvivere; e per questo all'uomo è concesso il privilegio di sbagliare, ovvero di andare contro natura, perché solo provando anche a caso, come la natura, si ottengono miglioramenti (sbagliando si impara)¹⁷.

Mi imbatto con un certo disagio in queste ed altre domande sempre aperte solo nel tentativo di sviluppare, magari per analogie e suggestioni, il punto di vista da cui intendo affrontare il tema proposto. Vorrei fosse chiaro che lo scopo qui non è confutare o dimostrare che la mente è riducibile a materia, né trovare o negare una distinzione qualitativa tra l'uomo e gli altri animali o le macchine, bensì illustrare come nell'esplorare la capacità di pensiero astratto non sia necessario far intervenire principi al di fuori della natura, e quindi giustificare un atteggiamento tendenzialmente naturalistico-evolutivo anche nell'analisi dei fondamenti della matematica, in particolare del processo di astrazione. In linea di principio, dovrebbe essere possibile collegare tutta la rete di successive astrazioni, senza saltare nemmeno un gradino, dalle più elevate fino ai risultati automatici della fisiologia.

2.2.2

Nelle scienze naturali, il vantaggio del punto di vista evoluzionistico consiste nel passaggio da una rigida classificazione in specie diverse al processo con cui le varie specie si formano. Analogamente, nell'affrontare il tema dell'astrazione conviene considerare non tanto i risultati dell'astrazione, classificati in vario modo con una moltitudine di parole, quanto il processo con cui nuove astrazioni vengono formate. E come accade per le specie animali, in questo modo anche le astrazioni più elevate perdono ogni aspetto magico, immanente o contingente, e vengono inserite in un quadro sì più complesso e magmatico, ma più naturale e fedele ai fatti, in cui ogni astrazione risulta semplicemente impossibile senza una gran varietà di altre astrazioni di livello inferiore, più vicine alla realtà materiale e base della nostra quotidiana interazione con l'ambiente. In altre parole, se nella realtà includiamo non solo le fonti delle sensazioni, ma anche, come sembra più corretto, i risultati che da esse derivano con l'elaborazione mentale¹⁸, allora ogni astrazione, anche i concetti più generali che talvolta

¹⁷Questo corrisponde all'idea religiosa, o almeno cattolica, che Dio ci ha resi partecipi della sua natura divina dandoci l'anima, cioè la possibilità di creare, oltre che figli, anche idee; e con la coscienza anche la possibilità di andare contro la natura, cioè di peccare, e quindi il conflitto.

¹⁸Di questo parere mi sembra F. Enriques, *Problemi della scienza*, Bologna 19092 (ristampa anastatica 1985), vedi ad esempio p. 49.

si considerano punto di partenza di una disciplina, appare direttamente costruita a partire dalla realtà, e quindi piuttosto punto d'arrivo d'una storia evolutiva.

Il vantaggio di tale approccio è evidente e immediato: come si parla di un'unica evoluzione naturale per tutte le specie, così potremo considerare sostanzialmente un unico processo di astrazione, indipendentemente dal tipo di risultato. Per vedere come questo sia possibile, il prossimo compito è allora prendere in considerazione tutte le possibili astrazioni, qualunque sia il tipo di parola usato per indicarle, e cercare di individuare i meccanismi comuni operanti nel processo della loro formazione.

La prima sorpresa è dover constatare quanto lavoro mentale, spesso inconsapevole e quindi fortunatamente dimenticato, sia necessario per giungere a cogliere non solo i casi più elevati e volontari, ciò che appunto comunemente chiamiamo astrazioni, ma anche oggetti, segni, forme, immagini, colori, proprietà, funzioni e tutte le innumerevoli astrazioni usate quotidianamente e poco considerate proprio perché automatiche, perfettamente adeguate allo scopo e quindi non problematiche. È ad esse invece che conviene, contrariamente al solito, rivolgere particolare attenzione, perché ci manifestano in modo più diretto e incontaminato le caratteristiche naturali del processo di astrazione.

Si scopre allora che, in questo senso esteso e più corretto, il processo di astrazione è ovunque e sempre in moto: è la base essenziale sia del rapporto di un individuo con l'ambiente, in quanto consente la percezione e il riconoscimento di situazioni, sia del rapporto di individui diversi tra di loro, in quanto consente la comunicazione di conoscenze ed esperienze. I due aspetti, individuale e sociale, sono inestricabilmente legati uno all'altro, come risulta evidente se si ripensa al modo in cui vengono imparate ed usate da un individuo anche le parole più comuni; in un primo momento, tuttavia, conviene artificiosamente limitare l'attenzione solo al primo.

Consideriamo ad esempio l'oggetto che in questo momento ho tra le mani, o meglio nella mano sinistra (la destra è impegnata). La banale astrazione d'un eventuale osservatore sarebbe: è una pipa. Per me è anche un oggetto specifico totalmente individuato, la mia Stanwell rossastra semicurva (e a questo punto nella mia mente ne compare una figura schematica) comperata nel traghetto per Copenaghen nel 1984. Questo è ciò che mi serve per identificarla tra le mie pipe, ed è già una notevole astrazione, stabile nella mia mente nonostante molte variazioni, sia dell'oggetto in se stesso, come imbrunimento, sporcizia, strisci, spessore del carbone nel fornello, ma anche eventuale sostituzione del bocchino e perfino danni che la rendano infumabile, sia del modo in cui lo percepisco, che dipende dal contesto, ossia luce, luogo, momento, tipo di tabacco, umore. Naturalmente, saprei distinguerla da una qualunque Stanwell dello stesso modello, per non parlare di altre Stanwell o di altre semicurve, o infine altre non specificate pipe; e queste sono solo alcune delle innumerevoli astrazioni intermedie, in cui mi oriento senza alcuna difficoltà, tra l'astratto oggetto ora nella mia sinistra e l'astratto pipa (e tralasciando le ulteriori astrazioni in cui una pipa può cadere, cioè in generale tutti i predicati che ad essa si possono applicare). Mi sembra che in questo esempio si possano vedere dispiegati molti degli aspetti tipici del processo di astrazione, ai vari livelli.

Un primo (primo davvero?) livello d'astrazione è necessario per cogliere l'oggetto (nel nostro esempio, il corpo fisico formato da radica e bachelite) come distinto da ciò che lo circonda, e dotato di un'unità, cioè appunto un oggetto; per arrivare a questa capacità, prerequisito all'uso delle parole, un bambino deve toccare, giocare, rompere, usare l'oggetto fino a rendere compatibili una con l'altra e legate assieme tutte le sensazioni ad esso associate. E per compiere la successiva doppia astrazione che gli permette di passare dall'oggetto concreto qui-ed-ora, allo stesso oggetto come identità che permane indipendentemente dal contesto spaziale e temporale, deve operare ripetutamente le stesse manipolazioni in momenti

e luoghi diversi, fino a formare e conservare nella mente una traccia unica e comune alle varie esperienze, che duri nel tempo abbastanza per essere richiamata e ricollegata ad una occorrenza dello stesso oggetto in un contesto diverso, cioè fino a ricreare nella propria mente un'immagine dell'oggetto in questione (nell'esempio, l'oggetto senza nome, a cui per comodità ora do il nome proprio la mia Stanwell, e i giochi esplorativi del bambino si ritrovano nel piacere dell'adulto di tenerla in mano o in bocca). Parlare di un bambino permette di vedere all'opera più palesemente il gioco-lavoro necessario, ma naturalmente le stesse procedure, pur abbreviate e più indirizzate, sono attive in ciascun adulto, in particolare quando si trova di fronte ad un oggetto nuovo per lui.

L'immagine mentale di un oggetto, o brevemente l'oggetto mentale, non è il semplice riflesso passivo di una realtà esterna, come è una fotografia, ma il risultato dell'attività mentale necessaria per dargli identità ed esistenza soggettiva, cioè sia per dare unità in sé a ciò che altrimenti è solo un insieme di sensazioni (indotte dall'esterno) sia per riconoscere e legare tra loro situazioni esterne come occorrenze dello stesso oggetto in contesti diversi. Una volta che si sia interiorizzato un oggetto, esiste qualcosa nella mente che prima non c'era e che vive autonomamente, tanto da poter essere richiamato alla coscienza volontariamente anche in mancanza degli stimoli che l'hanno creato (ad esempio, nominare la torre di Pisa induce in chi mi ascolta, anche se a Torino, una qualche immagine) e ricombinato con altri contenuti (ad esempio, posso visualizzare mentalmente la mia Stanwell su uno sfondo giallo, o un'arancia blu, o una padella di carta). È il legame tra la realtà esterna e tale oggetto interiorizzato, astratto delle (ed estratto dalle) diverse esperienze delle sensazioni da essa indotte, ciò che produce quello che usualmente chiamiamo un oggetto, e che opportunamente trattiamo come esistente in sé e puramente esterno, lasciando inavvertito tutto il lavoro mentale fisiologico, tanto da con-fondere l'immagine con ciò che la produce, proprio per non appesantire la percezione della realtà, cioè per motivi di economia. E tuttavia, questo legame è sempre attivo, come si può rendere evidente sia osservando un oggetto anche consueto con attenzione diversa dall'usuale (ad esempio, avvicinandolo agli occhi si possono scoprire aspetti o dettagli prima assenti) sia ricordando che l'oggetto interno è continuamente e inavvertitamente aggiornato ai cambiamenti della realtà, come l'usura (ad esempio, di un utensile di legno), il consumo, l'invecchiamento (capita ormai spesso, purtroppo, di incontrare una persona che non si vede da molti anni, e allora il lavoro che la mente deve svolgere, usualmente in pochi attimi, è prodigioso: riconoscere la persona, magari con l'aiuto della voce che cambia molto più lentamente, astraendo da rughe e maschera, quantità, lunghezza e colore dei capelli, ecc. e soprattutto sostituire l'immagine precedente con quella nuova). In conclusione, è certamente possibile utilizzare l'analogia con la fotografia, nel senso però di pensare l'oggetto mentale come una sintesi dinamica di diverse fotografie dello stesso oggetto concreto.

Infine, mi sembra che sostanzialmente gli stessi processi mentali siano attivati, oltre che per oggetti, ogniqualvolta la realtà esterna è costituita da un'unica fonte concreta (come un suono), e comunque quando nella mente si formi un'unica rappresentazione, anche nel caso in cui essa venga associata a vari esemplari concreti (come accade ad esempio nel caso di oggetti prodotti in serie) e che quindi in quanto mentalmente indistinguibili vengono considerati uguali.

Lo scopo di tali osservazioni è illustrare quanto lavoro mentale sia implicito già nella comune capacità di cogliere-concepire oggetti sensibili, anche se usualmente non lo si indica con il termine astrazione. Mi sembra tuttavia che da una parte non sarebbe affatto improprio chiamare astrazione l'attività necessaria a isolare dal contesto ¹⁹ e dall'altra comunque non si

¹⁹Anzi, poiché anche per cogliere l'unità di un oggetto nel suo contesto, e quindi anche prima della formazione di un oggetto mentale permanente, è necessaria una certa attenzione, si potrebbe sostenere

possa tracciare una netta linea di demarcazione tra ciò che si forma per astrazione e ciò che è comune o immediata percezione della realtà. Se riprendiamo in esame il caso in cui un'unica immagine interna si lega a diversi esemplari concreti, come ad esempio per una moneta da cento lire, e riflettiamo sul fatto che se posti di fronte a due esemplari molto probabilmente sapremmo trovare il modo per distinguerli (basandoci su lucentezza, consumo, strisci ecc. e, se siamo fortunati, sulla data), ci rendiamo conto che l'immagine mentale, pur unica e così viva da poterla percepire mentalmente quasi come l'oggetto fosse materialmente presente, è ottenuta per astrazione dalle singolarità degli esemplari sperimentati. E ancora, solo l'addestramento o la consuetudine permettono di identificare ad esempio una singola tigre, cioè distinguere un individuo tigre da un altro senza averli di fronte entrambi; ed infatti nella maggioranza delle persone c'è sostanzialmente un'unica immagine per il concetto tigre, e quindi tutte le tigri sono di fatto trattate mentalmente come uguali, proprio come le cento lire. D'altra parte, indubbiamente il concetto espresso dalla parola cane è astratto, se non altro perché corrisponde a diverse immagini mentali, ma è ben difficile sostenere che il confine tra concreto e astratto passi tra tigre e cane, solo perché conosciamo varie razze di cani e una sola di tigri. In conclusione, vediamo che le diversità tra oggetti individuali concreti e concetti astratti non sono così drastiche da poter fissare una netta distinzione qualitativa, e anzi il passaggio dagli uni agli altri, se analizzato da vicino, sfuma in un continuo di gradazioni diverse ma difficilmente caratterizzabili, in quanto tutte accomunate dalla presenza più o meno massiccia dello stesso processo mentale di astrazione.

Si può comunque, in prima approssimazione, distinguere il caso in cui un'unica immagine mentale è legata ad un unico oggetto individuale o a vari oggetti trattati come uguali, da quello di una prima vera e propria astrazione, cioè un'entità mentale che connette tra loro vari oggetti che pur continuano ad essere considerati diversi. Non essendo un risultato automatico della percezione della realtà per la mancanza di un unico referente sensibile, è probabile che un'astrazione sia inestricabilmente connessa con la parola usata per indicarla. Esaminiamo allora come si forma il concetto astratto legato ad una qualunque parola comune, come pipa o, per coinvolgere più lettori, mela; o equivalentemente, rivediamo come si arriva ad usare correttamente tali parole.

La formazione di un concetto astratto, come mela, necessariamente segue come elaborazione della capacità preliminare di cogliere oggetti individuali, vale a dire singole mele; infatti, solo attraverso il confronto tra ripetute esperienze di mele come oggetti si può arrivare a concepire e intuire un astratto mela come connessione che li lega tra loro prescindendo da alcune caratteristiche, che diventano singolarità o aspetti accidentali (imperfezioni, colore, variazioni nella forma o nel sapore, ...). Il circolo vizioso - per arrivare a mela si devono sperimentare mele - è solo apparente e dovuto all'esposizione, perché di fatto il punto di partenza c'è, ed è comunque dato dagli oggetti che si vanno a connettere nell'astrazione che si sta formando, sia che già se ne conosca (nel nostro esempio, ad un bambino si indicano esplicitamente gli oggetti da associare a mela) sia che ancora non se ne conosca il nome.

Dal momento in cui si intuisce una prima astrazione, mela è la connessione o struttura di cui ogni mela già sperimentata diventa un rappresentante. Tuttavia, l'utilità e la ragione d'essere del concetto astratto sta nella possibilità di confrontarlo con nuove situazioni reali per trarne previsioni e la sua efficacia consiste nel fornire aspettative poi confermate; per

che perfino questo caso comporta quella forma di astrazione che consiste appunto nell'astrarre, nel senso di considerare irrilevanti, le sensazioni non indotte dall'oggetto; questo lavoro mentale da una parte è avvertibile ad esempio quando si concentra l'ascolto su un suono particolare, e si astrae dal rumore circostante, che pure è sensibile, e d'altra parte se ne avverte la mancanza quando la mente è così intensamente assorbita da attività solamente interne da dover rilasciare l'organizzazione delle sensazioni visive, e allora magari per un attimo si vede la realtà esterna come indistinta, o come uno schermo piatto, cioè non si colgono oggetti bensì si subiscono sensazioni.

questo è sempre necessario il lavoro mentale di astrazione, da una parte semplicemente per poter cogliere un oggetto specifico come nuova istanza, dall'altra per modificare il concetto stesso fino ad includere oggetti che non vi cadono direttamente ma che per qualche motivo (tra cui i cambiamenti della realtà) conviene riconoscere come nuovi rappresentanti. Questo significa che in ogni momento un'astrazione come mela è solo il risultato temporaneo di un processo dinamico sempre in moto, in bilico tra aspettativa e verifica, alla ricerca di connessioni più stabili e profonde, e quindi più utili, ottenute sottraendo le caratteristiche meno frequenti, ma soprattutto meno determinanti nel rapporto con la realtà.

Ad esempio, se nella mente di Giovanni tutte le mele sono almeno un po' rosse e poi scopre, o perché l'assaggia o perché sta ancora imparando da altri l'uso della parola, che conviene legare a mela anche questo oggetto tutto giallo, è costretto a sottrarre un'aspetto di mela e a cercare un motivo più generale e profondo per mantenere la connessione.

Talvolta la connessione implicita sottostante una parola è semplice e molto forte, e quindi non è necessario aver sperimentato molti oggetti per imparare ad usarla correttamente anche di fronte ad oggetti di materiali, colori, forme inaspettati; ad esempio, pipa è ogni strumento usabile più volte per fumare tabacco. E tuttavia anche tali concetti in ciascuno di noi continuano ad aggiornarsi e modificarsi; da parte mia, ricordo d'essere rimasto scosso, e il mio concetto di pipa brutalmente modificato, il giorno in cui mi fu chiesta una pipa per fumarci un altro tipo di erba, ma non sarei sorpreso se anche chi mi ha seguito fin qui è stato indotto a modificare la propria pipa, semplicemente per il fatto che continuo a nominare pipe.

Questo processo di formazione di un concetto astratto è molto spesso insostituibile da definizioni verbali, che da sole ci porterebbero a giri viziosi, a meno che non si postulino contro ogni evidenza manifesta l'esistenza nella mente di idee innate, o nella realtà di estensioni assolute, o equivalenti, per tutti i concetti, compresi quelli non ancora attuali (si dovrebbe cioè pensare che anche Platone avesse un'idea innata, o che ai suoi tempi già esistesse l'estensione del concetto di bicicletta). In termini meno teorici, se un bambino chiede che cos'è una mela o che cos'è un numero, o un cerchio, in ultima analisi la risposta più sensata è fornirgli qualche esempio, magari con qualche commento per aiutarlo a distinguere il generale dal particolare; definire un numero (naturale) come un ordinale finito ha lo stesso peso che definire una mela come il frutto del melo (come fa un dizionario).

Le idee platoniche tuttavia, pur con una formulazione estrema, colgono un aspetto effettivo, il fatto che ogni astrazione comporta una certa idealizzazione della realtà, ovvero una semplificazione, anche indebita o appunto ideale (come contrapposto a reale), che segue le immagini interne più facilmente disponibili. Ad esempio, in ogni mela che ho osservato (appoggiandola su di un tavolo con il picciolo verso l'alto) le schiacciature ai due poli determinano piani inaspettatamente non paralleli tra loro; ma, anche se comune a tutte le mele, questa verifica non può indurre a complicare l'immagine astratta di mela sottraendo l'utile e ininfluyente idealizzazione di una simmetria inesistente. Più in generale, la mela astratta non ha alcuna imperfezione, contrariamente a tutte le mele reali, e a questo alludono osservazioni del tipo: quella mela è così perfetta che sembra finta.

In conclusione, un concetto astratto per una classe di oggetti si forma con un processo dinamico molto simile a quello per oggetti specifici, e consiste in entrambi i casi in una connessione. Nel caso di un oggetto singolo, l'immagine o raffigurazione mentale è unica e sono connesse tra loro le percezioni considerate ad essa sovrapponibili; e viceversa, nuove percezioni possono modificare l'immagine mentale. Nel caso di una classe di oggetti diversi, l'immagine mentale non è più unica, anzi possono coesistere varie immagini rappresentanti oggetti diversi, e la connessione è il concetto astratto che li lega, e che spesso si può esplicitare come uguaglianza rispetto ad alcuni aspetti della percezione, o della funzione, o altro. E

viceversa, per tentativi ed errori e confronti tra aspettative e fatti, le esperienze di nuovi oggetti modificano il concetto.

Per rendere l'esposizione un po' meno problematica, ho considerato finora solo oggetti e classi di oggetti, ma l'aver posto l'accento sul processo di formazione, più che sui risultati, permette di osservare che anche i concetti astratti di tipo diverso, come forme, figure, colori, o più elevati, cioè ottenuti con connessioni tra altre connessioni, come proprietà, funzioni, si formano in modo analogo, e che in generale un'astrazione è una connessione che rende alcuni oggetti o concetti come uguali o equivalenti in quanto intersostituibili rispetto ad un certo modo prescelto di metterci in relazione ad essi, e che nello stesso tempo dal rapporto con essi è modificata.

In fondo, a ben vedere, qualunque parola, inclusi i nomi propri, ha un certo contenuto astratto, se non altro per il fatto d'essere usabile in momenti e luoghi diversi, e se ne acquisisce l'uso corretto, se ne comprende il significato profondo, solo attraverso un processo dinamico strutturalmente identico a quello sopra descritto (quante volte ad esempio sembra di cogliere improvvisamente il vero significato di una parola usata da tempo?).

Ad esempio, il concetto rosso connette due oggetti ugualmente rossi tra loro, ed entrambi a qualche rappresentante privilegiato soggettivamente, come il fuoco o il sangue, se il criterio prescelto considera solo l'aspetto della percezione chiamato colore (e non è irrilevante notare che se si specifica quantitativamente rosso nei termini dell'ottica come banda di frequenza, si hanno seri problemi a spiegare cosa significhi per i daltonici).

A complicare il quadro, si deve poi constatare che il criterio di uguaglianza muta con il contesto in cui un soggetto opera; ad esempio, anche se viene danneggiato da una macchia, un libro per me resta un libro a casa, cioè mantiene la propria identità astratta, mentre in una libreria no, perché rispetto al criterio del libraio (e mio quando l'acquisto), che include la commerciabilità, non è più uguale, anche se questo non impedisce che ciascuno dei due possa capire perfettamente l'astrazione dell'altro. In generale, abbiamo tutti noi esseri umani una capacità prodigiosa di operare astrazioni sugli stessi dati a vari livelli, cioè con diversi criteri di uguaglianza, e di passare con estrema disinvoltura, quasi inconsapevolmente, dall'una all'altra come più appropriato, anche in situazioni quotidiane.

Ma che cosa stimola in un individuo il lavoro di creazione di un'immagine mentale o di un concetto astratto, e che cosa si forma, o in termini più brutali, che cos'è materialmente un'astrazione? È difficile separare i vari aspetti, proprio perché la creazione di un'astrazione è un processo sostanzialmente sempre in atto. Solo dalla neurofisiologia possiamo aspettarci una risposta in termini quantitativi, e quindi verificabili in senso positivistico, e non è escluso a priori che in futuro si possa caratterizzare la formazione di un'astrazione con la biochimica²⁰. Comunque anche oggi, pur limitandoci alla semeiotica, possiamo distinguere l'assenza dalla presenza, prima o dopo la creazione di un'astrazione, e quindi sapere che qualche modificazione permanente e su base materiale è avvenuta. Talvolta è addirittura possibile localizzare esattamente un momento, sembra di sentire improvvisamente dentro di noi la presenza di qualcosa prima assente, e queste occasioni di solito vengono espresse con frasi del tipo: Aha, adesso vedo (capisco, riconosco, afferro,...). In matematica le conosciamo bene, ma qualcosa di simile può accadere ad esempio nel capire una melodia come un tutto, o

²⁰Questo non comporterebbe comunque una definitiva soluzione dei problemi della conoscenza: Poniamo che sia pienamente illustrato il meccanismo fisiologico della ideazione musicale: il ritmo trovi corrispondenza in certe variazioni di tonalità nervosa, mutamenti di pressione sanguigna, fenomeni anabolici e catabolici ecc.; forse che la creazione artistica di Beethoven risulterà in tal modo chiarita?, oppure chi non vede quanto sarebbe folle di ritenere che la scienza del linguaggio si riduca un giorno allo studio della circonvoluzione di Broca? (Enriques, op. cit., p. 39). Meno poeticamente, la conoscenza (anche dettagliata) delle modificazioni biochimiche o fisiche indotte in un cervello dalla formazione di una nuova entità non sarebbe comunque sufficiente per apprezzarla o ricostruirla nella propria mente. O ancora, un'analogia risposta quantitativa per un istinto, o un'emozione, un'idea, un desiderio, ce lo farebbe vivere meglio?

vedere una costellazione al di là delle singole stelle. In questi casi, si può sentire una piacevole sensazione di scarica di una tensione, come sempre quando un'istinto è soddisfatto.

Così torniamo all'idea che l'astrazione sia il risultato di un istinto, e anzi sembra concepibile che tale scarica sia dovuta ad un riassetto dei dati all'interno del cervello in una posizione di equilibrio più stabile e meno dispendiosa. Per vedere una costellazione, si aggiunge sì un'immagine non necessaria e prima assente, come ad esempio Orione, ma il bilancio è un risparmio di memoria, perché l'immagine di Orione permette di collegare le stelle che la compongono (e che perdono la loro identità), riducendo così la fatica di riconoscerle e ritrovarle (memorizzandone la mutua posizione). Similmente, capire una melodia, cioè afferrare la connessione che lega le singole note, significa poterla ricordare senza fatica²¹. Un ulteriore esempio curioso è fornito dai solidi impossibili, ovvero quei disegni geometrici che solo ad una prima apparenza raffigurano un corpo solido: è difficile memorizzarli proprio perché è impossibile connettere le singole parti, coerenti solo localmente, in un'unica struttura globale, e quindi non può scattare spontaneamente la formazione mentale di un oggetto. E in fondo, ogni immagine anche di un singolo oggetto (come ad esempio una faccia) viene costruita e ricordata minimizzando tutti i dettagli non necessari per percepirla come unità e per connetterla con gli altri contenuti della mente (ad esempio, si ricorda un neo sulla guancia, ma non si sa quale)²².

Queste osservazioni ci portano a riconoscere il fatto che, molto più in generale, ogni astrazione è tanto più efficace quanto più consente un effettivo risparmio, e non sempre solo mentale, nell'interazione con l'ambiente, e che anzi questo è appunto il suo scopo, la sua ragione d'essere: trasformare una massa disordinata di dati, o di esperienze passate o possibili, in istanze di una regola, o di una forma, così evitando la dispersione (e la noia, e la fatica) in ripetizioni o dettagli e ponendo un limite alla complessità²³.

Allora è naturale postulare che in origine un'astrazione abbia semplicemente la funzione fisiologica di risparmiare energia mentale, in particolare memoria (basta ricordare una sola cosa, la connessione, per ritrovare le singole parti). E con l'introduzione di un principio di minimo, che potremmo chiamare principio di minima memoria, o minimo dispendio mentale, si può ipotizzare che un'astrazione si possa caratterizzare direttamente come soluzione di qualche principio di minimo elettrochimico, e quindi senza dover far intervenire teorie più complesse e mediate, come quella di Freud in cui l'istinto di astrazione, o di conoscere, è derivazione dell'istinto sessuale, per spiegarne l'origine materiale.

Ma non può essere che la formazione di un'astrazione sia necessaria e meccanica come una legge fisica, altrimenti ogni individuo di fronte agli stessi dati giungerebbe alle stesse astrazioni, e sappiamo che non è affatto così. In altre parole, la presenza di un soggetto non è eliminabile, in quanto il criterio di uguaglianza non è nelle cose, e quindi non esiste alcuna astrazione indipendente da chi la crea; usando il solito esempio, mela non è una proprietà delle mele, ma esiste solo per mezzo della mente di ciascuno di noi.

Possiamo allora continuare ad ipotizzare un principio di minimo come motore materiale solo a patto di pensarlo applicato non ad un gruppo di dati trattati come isolati ed esterni,

²¹Pare che nei manoscritti originali di Mozart, solo le prime righe contenenti il tema principale siano scritte a matita, e tutto il resto direttamente a penna, proprio perché nella sua mente la struttura era così chiara da poter ricordare perfettamente tutta l'opera).

²²Un utile esercizio è riflettere qualche minuto sulla quantità e diversa qualità dei dati puramente visivi che ciascuno di noi memorizza. Con una stima approssimata, qualche migliaio di immagini o forme: facce (parenti, amici, colleghi, vicini, negozianti, uomini politici, attori), quadri, forme di oggetti (automobili, mobili, utensili), marchi, testi scritti e film, moltissime mappe di varia scala (la casa, altre case, il quartiere, la città, altre città, ecc.), paesaggi, ambientazioni di episodi della vita, ecc. È difficile immaginare che tutto ciò sia memorizzato per punti come grosso modo ancora oggi fa un calcolatore per le immagini.

²³Un'idea simile è stata resa anche in termini formali in C. Sossai, *Learning abstraction by CET machines*, in corso di stampa.

e quindi approssimativamente uguali per tutti, ma come immersi in una mente individuale, e quindi minimizzando anche il dispendio per tutte le connessioni, conscie e inconscie, che li legano con altri contenuti, istinti ed emozioni compresi.

Dobbiamo quindi concludere che, come abbiamo già osservato per altre funzioni fisiologiche meno elevate e complesse, i processi mentali che conducono alla formazione di una nuova astrazione, o che mantengono in vita aggiornandola un'astrazione data, siano in buona parte inconsapevoli. D'altronde, senza addentrarci in speculazioni generali o impegnarci in ipotesi oggi non verificabili, due diverse osservazioni sulla vita quotidiana ci fanno convergere alla stessa conclusione. Da una parte, molto banalmente, sono rare le situazioni in cui volontariamente ci si appresti a formare nuove astrazioni, che invece spesso si trovano, per così dire, apparentemente già pronte nella propria mente assieme alle nuove esperienze; ne è una prova, per quanto indiretta, la difficoltà incontrata fin qui ad esplorare l'attività mentale sottostante i concetti astratti più comuni. Dall'altra, molto materialmente, poiché talvolta una nuova astrazione su certi dati nasce anche in mancanza di relative nuove esperienze consapevoli, l'aspetto che si scopre comune a quei dati non può che emergere da qualche anfratto della mente per vie inconsapevoli (e ricollegandoci all'idea del minimo dispendio, si può forse persino supporre che la connessione fosse in qualche modo già presente in quanto tale nel cervello, postulando che un organo così evoluto non possa sprecare risorse per ripetere la stessa informazione che accomuna i vari dati nelle diverse zone in cui sono memorizzati²⁴).

Così comunque Freud appena espulso dalla finestra rientra dalla porta; e allora, come vedremo subito, la genesi di un'astrazione risulta seguire percorsi di una tale disarmante complessità e profondità nella mente, con risultati così imprevedibili da confondersi facilmente con prodotti del caso, che un'esplorazione esauriente appare come un compito senza fondo e perciò interminabile. Per il nostro scopo, tuttavia, che è molto più limitato, basta continuare quel tanto da intravedere quegli aspetti della dinamica psichica che sembrano rilevanti e all'opera anche nello sviluppo della matematica e in particolare dei suoi fondamenti, rinunciando a qualunque pretesa di sistematicità.

Limitatamente alla matematica, Poincaré tratta il tema della creazione di nuovi enti con argomentazioni convincenti e immagini felici, tanto che rileggerlo è un'esperienza illuminante²⁵. Una prima fase di lavoro cosciente, che può essere apparentemente sterile, dà impulso alla macchina inconscia, il cui ruolo è riconosciuto come incontestabile²⁶, che caoticamente crea nuove combinazioni tra i dati coinvolti; a far emergere alla coscienza le connessioni utili tra le mille possibili, sostiene Poincaré, è un vero sentimento estetico che tutti i veri matematici conoscono, un istinto naturale dell'eleganza matematica inaccessibile ai profani e sostanzialmente accettato come primitivo. Ma alla naturale domanda, quali sono gli enti matematici [...] capaci di sviluppare in noi una specie di emozione estetica, l'unica risposta, quelli i cui elementi sono armoniosamente disposti, in modo che lo spirito possa senza fatica abbracciare l'insieme pur penetrando i dettagli (corsivo mio), suggerisce una stretta connessione con la precedente ipotesi del minimo dispendio, e quindi che il criterio di eleganza, mutatis verbis, si riduca semplicemente e meno poeticamente al risparmio di fatica mentale. Allora chiamare in causa l'inconscio e per così dire delegargli il compito di scegliere le connessioni meno laboriose, comporta un coinvolgimento anche dei desideri inconsci di semplicità, potenza, ecc.; ma questi non sono bloccati dalla pura verifica di coerenza interna,

²⁴Nell'analogia con il calcolatore, si può immaginare cioè che quando la stessa informazione sta in molti registri, il cervello crei un puntatore che li accomuna senza ripeterne il contenuto; questa idea sembra trovare conferma in neurofisiologia: in generale, possiamo dire che attività correlate [ma in diversi neuroni] vengono associate attraverso un'unificazione dei segnali corrispondenti, Braitenberg, op. cit., pag. 116.

²⁵H. Poincaré, *L'Invention Mathématique*, in *Science et Methode*, Parigi 1908.

²⁶Dello stesso avviso è certamente Enriques, vedi ad esempio op. cit. p. 74-75; forse entrambi non erano condizionati dal contemporaneo o successivo sviluppo della psicoanalisi.

alla mente o alla matematica, e quindi le idealizzazioni necessarie per trovare connessioni si confondono con quelle dovute ad attesa emotiva senza reale fondamento, anche se universali.

Ad esempio, oltre che con simmetrie inesistenti, soggettivamente mela è legata al primo concetto di mela sperimentato che è idealizzato (le mele di una volta sì che erano buone) proprio come si idealizza l'immagine di donna legandola, nel bene o nel male, alla prima donna conosciuta. In matematica, è l'irrealistico ma comune desiderio di uniformità e semplicità che spinge ad esempio a postulare che due rette qualunque, anche parallele, si incontrino in un punto, e quindi a concepire l'esistenza di punti ideali all'infinito; e analogamente, molto più in generale, a introdurre un infinito, potenziale o attuale, per domare la complessità dell'illimitato.

Tuttavia la fissazione su una idealizzazione eccessiva, universale o meno, può portare ad un allontanamento dalla realtà (per questo, ad esempio, la bambola Barbie, pur generalmente apprezzata dalle bambine, secondo alcuni pedagogisti può risultare dannosa). Ma d'altra parte è un rischio inevitabile, perché la via maestra per creare connessioni nuove, e l'unica per quelle insperate, è lasciar libera la machine inconsciente di lavorare senza inibizioni, di mediare tra il caso e l'ordine razionale, e questo è in ultima analisi ciò che di solito si chiama semplicemente intuizione. Tuttavia, proprio perché nel profondo della mente i dati razionali si mescolano con emozioni e istinti, non è facile lasciare andare la mente apparentemente a caso senza paura di cadere nel caos, nel delirio o nelle allucinazioni, e se non si vuole smarrirsi in un sogno vuoto di senso, non si deve dimenticare la condizione suprema di positività, per cui il giudizio conoscitivo deve affermare o negare, in ultima analisi, dei fatti particolari o generali²⁷. La fatica maggiore, il compito più difficile è allora saper lasciare spazio all'intuizione, pur tenendo a mente la verifica dei fatti, e viceversa cercare sì un ordine razionale ma tuttavia non così rigidamente da sacrificarvi la libertà creatrice, e questo significa tenere sempre in moto un processo dinamico, un'oscillazione continua che nello stesso tempo lega e distingue tra loro intuizione e verifica, immagini ideali e fatti reali, interno ed esterno, soggettivo e oggettivo. E naturalmente, quanto più un concetto è astratto, tanto più tale processo dinamico, che per oggetti o classi di oggetti ha luogo nel legame tra mente e realtà, risulta interno alla mente, dove astrazioni precedenti e associate prendono il posto della realtà esterna, e l'intuizione rispetto ad esse risulta il lavoro più interno.

Per quanto possa apparire paradossale o provocare disagio, è comunque questo faticoso lavoro interno, che non ha nulla di razionale, ciò che porta a dar forma razionale e consapevole, e quindi comunicabile. E anzi, paradossalmente, quanto più si sono toccati i più complessi e profondi anfratti della mente, quanto più caos e distruzione si è affrontata, quanto più si è spesa fatica mentale, tanto più il risultato risulta efficace e semplice, creativo e costruttivo, e fonte di risparmio.

Infatti, ciò che rende un'astrazione utile ed efficace, e quindi reale e oggettiva, è la possibilità di legarla e applicarla in ogni momento alla realtà, anche mentale, da cui proviene; ma per poter mantenere la fedeltà ai fatti precedenti, è necessaria la consapevolezza di quale idealizzazione si è imposta per connetterli, cioè di quanto l'astrazione non esiste nella realtà, cioè di quanto è ideale e soggettiva. Ne consegue che una buona astrazione non è data soltanto dalla connessione in sé, ma anche dalla consapevolezza della connessione stessa (inversamente, basta pensare che non si chiama vera astrazione, o vero pensiero, una connessione solamente intuita, cioè non esprimibile coscientemente) e per questo spesso la sua formazione comporta un cambiamento della prospettiva, ovvero la capacità di vedere gli stessi dati da un nuovo (più elevato o più profondo) punto di vista, o livello di riferimento.

Solo attraverso il continuo passaggio che allarga, solidifica e tiene sempre aperta la strada

²⁷Enriques, op. cit. p. 10.

tra realtà e idealizzazione, un'astrazione può diventare stabile, cioè utilizzabile con l'efficacia di uno strumento a cui si può affidare il compito di mantenere il contatto con i fatti, e allora può perdere il suo contenuto ideale e venire a far parte della conoscenza come una nuova realtà. Quindi il criterio a posteriori per distinguere una buona astrazione da una idealizzazione infondata sta nella sua capacità di inserirsi proficuamente, cioè di portare ad una migliore conoscenza di fatti e astrazioni precedenti.

Riflettere sul legame necessario con le conoscenze preesistenti, porta a riconoscere come la creazione di un'astrazione paradossalmente si associ alla distruzione. Infatti, per poter connettere in modo nuovo anche oggetti o concetti comuni, è necessario smembrare la loro identità, in modo da poter sottrarre alcuni aspetti, e scindere la coesione data da astrazioni precedenti, cioè distruggere. Ma più che dalle connessioni tra le percezioni, è faticoso separarsi dall'unità fornita dalle idealizzazioni consuete, rinunciare al loro potere di semplificazione e di conforto, accettare l'impotenza sulla complessità del caos e dell'ignoto. D'altra parte, se inventare è scegliere²⁸ tra tutte le combinazioni possibili, allora il caos, il delirio, le allucinazioni, più o meno affioranti alla coscienza, sono il passaggio obbligato per produrre quelle che escono dagli schemi e arrivare al nuovo; esattamente come per riordinare un archivio in modo nuovo è necessario disfare, poco o tanto, quello vecchio, questa è l'unica via per giungere ad un discernimento più fine e più adeguato alla realtà, e spesso anche a maggior semplicità e potenza. Il senso di vuoto o di catastrofe nella distruzione del vecchio può essere colmato solo se contemporaneamente si intuisce in qualche modo di poterlo sostituire con il nuovo, ed è per questo che distruzione e costruzione sono compresenti e legate così strettamente (anche nell'etimologia)²⁹.

Tutto ciò naturalmente costa una notevole fatica psichica, e non solo intellettuale³⁰. Se il contenuto costruttivo di un concetto astratto, anche in matematica, risiede nella sua capacità di aderire e di aiutarci a vedere senza eccessive deformazioni la realtà da cui proviene, allora il modo più autentico e profondo di coglierlo, più che con rigide analisi formali, è apprezzare il lavoro psichico necessario a formare il concetto astratto e a rendere consapevoli, e quindi sotto controllo, le distruzioni operate sulla realtà dei fatti dalle idealizzazioni che esso comunque contiene.

Infine, l'aspetto più paradossale della conoscenza (e forse della vita), il paradosso di tutti i paradossi, mi sembra risiedere nel fatto che i paradossi sopra accennati, che pure certamente possono essere evocati con parole più suggestive delle mie, restano sostanzialmente indicibili, e quindi ineliminabili. Negandoli, ne siamo sottomessi; l'unico modo di risolverli è constatarli e accettarli, nel silenzio³¹.

Mi azzardo a riassumere alcuni aspetti essenziali di quanto visto finora proponendo una descrizione sintetica del processo di astrazione, come quel lavoro mentale anche inconsapevole che, da alcuni dati a disposizione, sottraendo alcune caratteristiche della percezione sensoriale o mentale ed operando un cambiamento nel livello di riferimento, costruisce un unico ente mentale, la struttura unificante astratta, di cui i dati di partenza ed altri vengono

²⁸Poincaré, op. cit., pag. 48.

²⁹In quest'ambito si situa ad esempio il binomio cut/connect introdotto nella relazione di J-Y. Girard al congresso, forse con involontario autoriferimento; ma in tutta la storia della matematica le fasi più feconde, ad esempio quelle legate ai nomi di Pitagora, Bolyai e Lobatshevski, Cantor, Brouwer, Gödel, manifestano la compresenza di costruzione e distruzione.

³⁰From the psychological point of view, it can be considered as certain that [...] fatigue corresponds to the effort for synthesis, to the fact of giving the research its unity and, therefore, at least in my case, to the constitution of a proper schema è l'opinione di Hadamard, op. cit., p. 78-79, che condivido pienamente.

³¹Alcuni tra i padri saggi, ad esempio Enriques, ce l'avevano detto con altre parole: Il circolo vizioso della Scienza [ovvero la mancanza di un principio] si risolve nella constatazione che lo sviluppo di questa non ha un principio, ma si estende indefinitamente all'indietro come in avanti: che l'acquisto delle conoscenze non cade per intero nel dominio della coscienza chiara e della volontà, ma si prolunga nelle associazioni inconscie ed istintive, op. cit. p.145; purtroppo non basta capire le parole per comprenderlo.

ad essere rappresentanti, casi particolari, parti o aspetti. Di nuovo, l'etimologia delle parole in qualche modo coinvolte conferma questa definizione sommaria: la parola astrazione deriva immediatamente dal latino *abstractio*, e *abstrahere* è composto di *abs*, da, e *trahere*, trarre, tirare; struttura deriva da *structura*, e *structus* è il participio passato di *struere*, porre accanto o a strati, connettere; e connessione deriva da *cum-nectere*, unire, intrecciare assieme.

2.2.3

L'uomo è un animale che vive in società: di questo fatto biologico essenziale e ineliminabile si è tenuto conto fin qui solo in minima parte. Se l'analisi si concludesse qui, si dovrebbe anche concludere che ogni individuo ha un'idea alquanto soggettiva delle parole quanto più astratte, e quindi risulterebbe molto problematico, se non impossibile, spiegare la comunicazione tra individui. Infatti, poiché si forma con l'esperienza di oggetti specifici, un concetto astratto resta in una mente in qualche modo indissolubilmente legato al modo in cui si apprende, e la sua definizione resta soggettivamente intensiva, nel senso che comprende tutto ciò che ha contribuito alla formazione del concetto³²; nella mente di ciascuno c'è una mela diversa, come certamente la sedia di van Gogh è diversa dalla mia.

Un istinto naturale ci spinge a comunicare, e nella natura umana troviamo i mezzi per farlo. Nel caso di un oggetto materiale, allo scopo di comunicare non è difficile sottrarre dal legame tra immagine mentale e realtà che la induce tutto ciò che non sia direttamente frutto degli organi di senso e del lavoro mentale fisiologico di percezione, e in caso di dubbio usualmente basta riprodurre volontariamente la situazione in cui si percepisce; in altre parole, per giungere ad un accordo ci si basa sostanzialmente sull'uguaglianza degli organi di percezione in ogni individuo (salvo eccezioni o minoranze che non cambiano la sostanza), e questa procedura è così profondamente connaturata alla comunicazione che vi si ricorre spesso automaticamente.

L'accordo sull'uso di una parola per un concetto astratto non è altrettanto semplice; in tal caso, infatti, per poter comunicare si deve accettare che altri individui possono avere contenuti mentali diversi, e saper distinguere gli aspetti, le associazioni e i rappresentanti preferiti soggettivi da quelli condivisi da altre menti, oltre che dalle percezioni. Questo comporta il dialogo, un complesso processo dialettico di mutuo adattamento e scambio, che consiste nel sottrarre aspetti particolari (le mie idee) per poter trovare una connessione (con le tue), ovvero, esattamente ciò che abbiamo chiamato processo di astrazione, purché tra i dati a disposizione si includano, come giusto e usuale, anche quelli che ci giungono indirettamente dalla realtà attraverso l'elaborazione di altre menti.

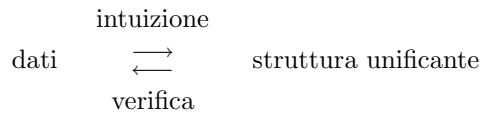
Così il concetto sociale o universale sembra ottenuto da quello individuale, sacrificando ed astraendo dalle associazioni puramente soggettive nello stesso modo in cui si sacrificano, all'interno di una singola mente, le emozioni o sensazioni irrilevanti nella percezione di un oggetto individuale, in un modo che ricorda il passaggio dalla definizione intensiva di un oggetto all'oggetto in sé, in extenso. Ad esempio, mela risulta invariante e dissociabile dai rappresentanti preferiti di ciascuno, e questo permette di comunicare con una certa affidabilità (ordinando ad esempio un chilo di mele al telefono), proprio come si può cogliere un oggetto individuale, come la mia Stanwell, come indipendente dall'umore, cioè appunto come un oggetto reale.

Ma per quanto si cerchi di sottrarre soggettività ad un concetto per poterlo trattare oggettivamente, ovvero a liberarlo dalle associazioni personali e inconsapevoli, un concetto

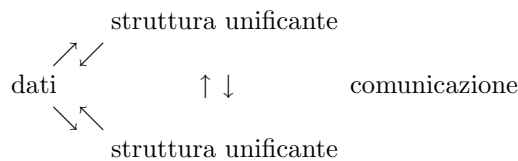
³²Negli animali, il caso limite di questa associazione di un oggetto al primo momento in cui è percepito è ciò che K. Lorenz chiama imprinting.

puramente oggettivo non si avrà mai; l'importante è arrivare ad un'idea sufficientemente precisa e affidabile per comunicare, ed essere consapevoli che è migliorabile³³.

La formazione delle astrazioni e l'acquisizione di conoscenze ora comincia ad apparire nella sua vera complessità, non soltanto come un processo dinamico ma chiuso nel rapporto tra soggetto e realtà, bensì come il risultato dello scambio tra tali singoli processi; se molto schematicamente si raffigura il processo di astrazione relativo ad un individuo con una coppia di frecce



ora tutte le coppie si collegano tra loro in un unico grafo illimitato, di cui un frammento è un triangolo



ed è compito della comunicazione tener vivo il processo dinamico sociale, distillare le conoscenze individuali e soggettive attraverso il dialogo e il confronto, o lo scontro, e fondere in uno i processi dinamici di conoscenza individuale con l'intento di raggiungere l'intesa e l'accordo armonico, per quanto possibile universale.

Mi sembra che così si arriva a scoprire come gran parte delle comunicazioni, inclusa la comune conversazione umana, si inserisca in questo quadro, trovando la motivazione originaria in uno scambio di esperienze soggettive (come li cucino io i piselli vengono gustosissimi), proprio nel tentativo spontaneo di arrivare a conoscenza condivisa.

Affinché l'accordo sia reale conoscenza, e non si inaridisca fino a perdere la sua ragione d'essere che è il legame con la realtà, anche questo processo di fusione non può avere un unico verso, non può essere costituito solo dal consenso, in cui il soggetto si perde nell'accettazione passiva e nel sacrificio delle proprie vedute, ma richiede che ogni individuo responsabile lo tenga in vita attivamente partecipando alla costruzione della conoscenza comune (e del comune buon senso), cioè svolgendo il proprio ruolo di tramite tra realtà e astrazioni collettive.

Questo processo dinamico è meglio riconoscibile dove è ben visibile una forma di movimento, cioè nella fase di apprendimento (che tuttavia a ben vedere non ha mai fine, ed è proprio questa la partecipazione attiva), in un bambino o comunque in un individuo che si confronta con conoscenze nuove per lui. Da una parte, ogni individuo deve adeguarsi al concetto universale e riceverlo passivamente come una realtà oggettiva, ma dall'altra deve farlo

³³[...] si può riconoscere che l'elemento subiettivo e l'obiettivo non sono due termini irriducibili della conoscenza, ma piuttosto due aspetti di questa, risultanti dal confronto di essa con altre conoscenze di una medesima persona o di persone diverse, in rapporto ad una sola cosa o a cose differenti. Riscontriamo l'elemento obiettivo ove c'è un accordo di previsioni, comunque queste sieno ottenute (da una stessa persona o da più persone) in modi diversi. Riscontriamo nella pluralità di questi modi possibili l'elemento subiettivo. Ma comunque, coll'allargarsi della conoscenza, i due elementi suddetti riescano sempre più distinti, distinti assolutamente non lo saranno mai. Imperocché il concetto dell'obiettivo e del subiettivo risulteranno in ogni momento, per astrazione, da un confronto di conoscenza, che resteranno sempre suscettibili di estensione. Per conseguenza nell'aspetto subiettivo delle conoscenze sarà sempre contenuto qualche elemento obiettivo, e così nell'aspetto obiettivo qualche elemento subiettivo. Enriques, op. cit., p. 21-22.

proprio e ricrearlo dentro di sé, interiorizzando le esperienze e ricapitolando il processo che lo ha prodotto, per poterlo usare nel vedere la realtà con i propri occhi; il vero apprendimento quindi è un passaggio di istruzioni per un itinerario che deve comunque essere percorso camminando da sé, e non solo studiato sulla mappa. La differenza tra apprendimento e creazione è che nel primo la meta è nota, e quindi manca l'ansia di perdersi o cadere³⁴; lo stimolo ad intraprendere il delicato e faticoso processo di ricreazione è la naturale tendenza alla coerenza e unità interna, ovvero, negativamente, il disagio e il malessere provocato dall'eventuale contrasto o divario tra le proprie credenze e quelle di altri in cui si crede o a cui si è legati. Quando la frattura è troppo profonda, lo stimolo può essere ignorato, negando l'uno o l'altro corno del dilemma, ma in ogni caso assopendo la propria coscienza e cadendo nell'incoerenza interna; accettarlo significa affrontare un conflitto aperto, il cui esito è comunque una separazione, più spesso dalle proprie illusioni, talvolta dal legame con altri, e in tal caso assumendo la responsabilità di dissentire. Così si comprendono facilmente le ragioni per cui sia tanto importante il rapporto che si instaura tra chi sa e chi impara; ma per le stesse ragioni, poiché lo scambio alla pari tra adulti è un continuo fluttuare delle parti di docente e discente, attiva e passiva, si comprende come ai fini della conoscenza siano importanti i rapporti individuali, anche tra scienziati di professione (resta tuttavia sempre una sorpresa osservare come gli stessi meccanismi della comunicazione, le stesse microdinamiche interpersonali siano influenti in ogni situazione sociale, che si parli di piselli, bosoni o cardinalità).

Mi soffermo su questi aspetti psicologici per il semplice motivo che nient'altro può indurre un cambiamento nella conoscenza comune se non la tensione e il movimento dovuti a questi conflitti individuali (nello stesso modo in cui il contrasto rispetto allo sfondo o il movimento sono necessari per la percezione di un oggetto); in questo senso paradossalmente è bene non sforzarsi troppo a capire tutto, se si vuol contribuire a comprendere, e lasciar bruciare il disaccordo piuttosto che soffocarlo sul nascere, se si vuol davvero partecipare e condividere.

Con diverse sfumature, alcune più vicine all'intelletto, altre al cuore, tutte le parole che si riferiscono alla conoscenza conservano la traccia di questo processo plurale e singolare, manifestato dalla presenza di cum, assieme, nell'etimologia: conoscenza deriva da cum-nosco, consapevolezza da cum-sapio, coscienza da cum-scio. La scienza stessa si può caratterizzare come la conoscenza più comunicabile (e condivisa) e quindi consapevole. E forse, mi si perdoni il giudizio etico implicito ma non so resistere all'intreccio di parole, le difficoltà nascono proprio nel momento in cui si fa cadere il prefisso, e si considera la scienza non accompagnata da co-scienza (e quindi irresponsabile). Si arriva a conoscere davvero, e non solo a sapere, ciò che si riesce a comunicare ad altri, e quindi a rendere consapevole a se stessi, e cioè a sapere di sapere, e quindi ciò che si può comunicare ripetutamente: la coscienza è il riflesso interno di questo processo, la traccia del dialogo avvenuto all'interno della mente³⁵.

Devo a questo punto ricordare esplicitamente di aver tenuti separati artificialmente i vari aspetti della formazione di un'astrazione solo per rendere possibile l'esposizione; in natura, cioè nella realtà, tutti i processi fin qui esaminati si presentano così strettamente connessi tra loro da risultare come fusi in uno; e anzi, scomporre l'unità manifesta e distinguere i vari aspetti, è stato per me il compito più coinvolgente e faticoso, reso ancor più difficile dal desiderio di comunicare, e quindi trovare un principio e una gerarchia, anche se fittizia, trascurando soprattutto l'influenza dei processi mentali più elevati (esposti dopo) su quelli di ordine inferiore (esposti prima).

³⁴Una differenza non secondaria, tanto che in matematica sapere la risposta, anche solo un sì o un no, ad una domanda aperta è spesso considerato un passo non meno importante del trovarne una dimostrazione.

³⁵Questa, secondo alcuni antropologi, è l'origine della coscienza nell'evoluzione della specie umana; e d'altra parte la priorità della comunicazione, e del linguaggio, sulla coscienza sembra ripetersi nello sviluppo psichico individuale.

Ora per ricomporre un quadro unico è necessario un certo impegno dell'immaginazione, un unico atto mentale che, in mancanza di parole adeguate, chiedo anche al lettore; infatti, anche per le astrazioni più comuni si devono concepire almeno tre ordini di processi - tra individuo e realtà (inclusi i risultati di altre astrazioni), tra individuo e società nell'apprendimento, tra società e realtà tramite gli individui - connessi e amalgamati tra loro, immersi uno nell'altro fino a formare un unico complesso vortice il cui ombelico è la mente di ogni individuo.

È la massa brulicante di tutta questa attività mentale che determina la creazione, che mantiene in vita e modifica ciò che usualmente percepiamo ed usiamo come semplici parole, tanto più affidabili e apparentemente invarianti e necessarie quanto più legate ad astrazioni in armonia con la realtà, ripetutamente confermate dai fatti e quindi utili per orientarsi nella caotica complessità del mondo; mi sembra che solo l'aver esaminato singolarmente i processi dinamici coinvolti (e non ancora tutti), giù fino al confine tra mente e materia, su verso la dinamica storica, ci permetta ora di tenerli presenti e apprezzare l'effettiva complessità del processo globale di conoscenza senza cadere nel generico.

Così dopo un lungo percorso siamo tornati al principio generale, che tuttavia abbiamo tenuto sempre come guida, soprattutto quando il pericolo di perdersi era più grave: ogni aspetto dell'uomo, anche la capacità di pensiero astratto, è parte della sua natura biologica. Ora si può cominciare a trarne le conseguenze.

2.2.4

Come risultato di questa lunga esplorazione, a me ora sembra che ci sia lo spazio per una nuova teoria generale ed unitaria dell'astrazione, e della conoscenza; anzi, mi sembra sia questa l'unica via percorribile per una spiegazione completa della formazione, funzione e cambiamento del significato delle parole, e in generale degli enti astratti, anche scientifici, che non neghi il ruolo della storia, della società, degli individui o della realtà, e che non faccia ricorso a principi estranei alla natura.

Questo comunque è sì lo scopo, ma limitatamente alla matematica; e proprio perché le astrazioni matematiche sono così stabili e affidabili da apparire necessarie e assolute, così refrattarie ad una vera analisi, era indispensabile fornirci di strumenti più raffinati, adatti a far breccia sulla compattezza per esplicitare la genesi, e quindi riportare alla luce alcuni dei processi mentali più profondi alla base del pensiero astratto in generale per trovare le radici in comune con quello specifico della matematica. Come vedremo in dettaglio nel paragrafo 4, con il lavoro di analisi già svolto è assolutamente superfluo postulare una natura specifica per le astrazioni matematiche; anzi, gli stessi processi dinamici di formazione delle astrazioni in generale fin qui esaminati sono sufficienti a spiegare la genesi degli enti matematici, la cui esattezza, certezza e oggettività appare soltanto come risultato di quantità e intensità diverse.

A posteriori, una delle principali motivazioni del cammino all'indietro che dai fondamenti della matematica porta fino ai processi di percezione degli oggetti, è la ricerca di una soluzione non ideologica o artificiosa ad una questione molto dibattuta in tutta la storia della matematica, l'esistenza degli enti matematici. Infatti, partendo dal presupposto che gli oggetti della matematica sono comunque creazioni mentali senza alcun immediato riferimento sensibile, si arriva a vedere la questione della loro esistenza come caso specifico della questione più generale per gli enti astratti, che a sua volta, se non si ha la fede in ontologie metafisiche e si cerca invece il contenuto costruttivo e il legame con la realtà, ci fa cadere nell'antica disputa sull'esistenza del mondo sensibile; ma se queste ultime questioni hanno interesse puramente filosofico e la loro soluzione poco influisce sul modo quotidiano di operare con le astrazioni, in matematica la questione ha sempre più assunto notevole rilevanza

pratica, in quanto, come molti matematici sanno sulla propria pelle, la risposta determina direttamente il modo di operare.

E tuttavia, solo affrontando la questione proprio a partire dagli oggetti sensibili, cioè da ciò che usualmente si chiama il mondo reale, o realmente esistente, si può dare un senso positivo anche all'esistenza delle astrazioni pure, e quindi a quelle della matematica. Il punto di vista fin qui sviluppato porta con sé una posizione ben definita, e anzi il tema dell'esistenza è talmente connesso con quanto precede, in particolare con le dinamiche sociali, che spesso non mi è stato facile trattenermi, cercando di evitare confusione, dal parlarne prima.

Infatti, se, come abbiamo visto, la percezione di un oggetto concreto consiste in un legame dinamico tra la mente e la fonte delle sensazioni, la conseguenza naturale è che un'asserzione di esistenza ha un senso positivo solo nel momento in cui un soggetto l'attribuisce a qualche oggetto. È il lavoro mentale di astrazione, la ripetuta conferma di esperienze soggettive e l'accordo, basato sull'uguaglianza degli organi sensoriali, con quelle di altri individui, ciò che permette di selezionare in un oggetto le proprietà invarianti, quelle usualmente chiamate appunto oggettive, e quindi considerarlo realmente esistente e distinguerlo da un'allucinazione: la nostra credenza a qualcosa di reale, suppone un insieme di sensazioni che invariabilmente susseguano a certe condizioni volontariamente disposte³⁶ e, dobbiamo aggiungere, si associa ad una traccia che può essere più o meno invariante, ma che comunque permane nella mente (ciò che permette di vedere un oggetto reale anche ad occhi chiusi).

L'esistenza attribuita alla realtà è quindi una costruzione soggettiva, e l'esistenza in sé è un'idealizzazione praticamente priva di senso positivo³⁷. Questa concezione è collegabile alla concezione intuizionistica della verità di una proposizione, in particolare come elaborata da P. Martin-Löf³⁸; e si noti che, come nella teoria intuizionistica della verità la mancata verifica di una proposizione non comporta la sua falsità, così la mancata attribuzione di esistenza ad un oggetto non comporta la sua non-esistenza. Anche quest'ultima è in ultima analisi un'asserzione positiva, spiegabile solamente se le si lascia lo spazio nel gioco dei rapporti tra contenuti interni alla mente e mondo esterno; la rosa blu non esiste si riferisce ad un'immagine interna ben conosciuta dai floricultori che cercano di realizzarla.

Per intendere il senso in cui si attribuisce esistenza ad idee astratte, è importante riconoscere ed apprezzare la quantità e l'intensità dell'attività mentale di elaborazione delle sensazioni che permette di giungere ad una traccia permanente, o oggetto mentale, e che sta alla base dell'attribuzione di esistenza agli oggetti concreti; infatti, è la continuazione della parte interna di tale lavoro, anche in mancanza di nuovi dati sensoriali, che permette alla mente di produrre attivamente un ente astratto, ovvero un'analogia traccia permanente, come combinazione o connessione non più tra sensazioni, ma tra contenuti mentali precedenti.

³⁶Enriques, op. cit., p. 49.

³⁷Non mi sarei mai deciso, forse, ad assumere un atteggiamento così radicale se non l'avessi poi ritrovato ad esempio in Enriques, ed espresso in modo così inequivocabile da non lasciar spazio a dubbi: usualmente si concepisce il reale, come qualcosa che sia fuori di noi, indipendentemente da ogni esperienza, e l'accordo tra certe condizioni subietive e le sensazioni che ne conseguono, come una prova della realtà, la quale tuttavia non cesserebbe di esistere di per sé stessa, se pur fosse rotta ogni comunicazione del nostro spirito col mondo esteriore. Riflettendo però, come possa comprendersi un'esistenza di per sé stessa ci si avverte che l'espressione è vuota di senso, a meno che non si voglia significare l'impotenza della volontà a modificare le sensazioni che riferiamo al reale, senza mutare le condizioni a cui queste si riattaccano. (op. cit. p. 50); il tema è discusso in tutto il capitolo II, e particolarmente interessanti mi sembrano i primi dieci paragrafi. Anche P. Martin-Löf sembra giungere, per altra via e con altre parole, ad analoghe conclusioni, nel suo contributo a questo volume.

³⁸Vedi il suo *On the meanings of logical constants and the justifications of the logical laws*, in: Atti degli Incontri di Logica Matematica, vol. 2, a cura di C. Bernardi e P. Pagli, Scuola di Specializzazione in Logica Matematica, Siena 1985, pp. 203-281. Questo collegamento suggerisce la possibilità di sviluppare una teoria formale del giudizio l'oggetto a esiste analoga alla teoria intuizionistica del giudizio la proposizione A è vera, e in cui la percezione di un oggetto prenderebbe il posto della verifica di una proposizione.

E allora si scopre che, come la fiducia nella realtà di un oggetto risiede nella costruzione di invarianti rispetto ai modi di percepirlo, così ora la credenza nell'esistenza di un'astrazione, anche senza un preciso referente percepibile con i sensi, è dovuta alla stabilità rispetto a tutta la rimanente attività mentale con cui è in relazione, ovvero all'invarianza del modo di percepirlo mentalmente.

Mentre per il mondo reale il criterio di invarianza come concordanza delle sensazioni e percezioni dei diversi individui facilmente diventa così interno e automatico da manifestarsi a rovescio in ciascuno come rassicurante certezza sugli oggetti (ogni cosa reale è invariante), non è così per i concetti astratti, che devono essere attivamente e consapevolmente ricreati in ciascun individuo e perciò restano molto più legati alla sua soggettività. Per questo il ruolo del processo dinamico collettivo, più che per gli oggetti materiali, rimane tanto rilevante nel criterio di invarianza che l'esistenza di un'astrazione si identifica sostanzialmente col suo essere patrimonio stabile e comune nel gruppo sociale in cui è utilizzata (ogni concetto socialmente invariante è reale).

Il nostro mondo è popolato delle più varie astrazioni che esistono solo in quanto prodotto e patrimonio sociale; ad esempio, ci sono forme artificiali, come i marchi delle aziende, personaggi immaginari, come unicorni o Linus, astrazioni commerciali, come la taglia 48, ecc., che, pur non corrispondendo ad alcuna estensione reale, svolgono benissimo la funzione per cui sono create. La capacità di crearle, di usarle e di trasmetterle, inducendole in altri per pura evocazione, è forse l'aspetto più tipico della natura umana. Ma come nel passaggio tra concreto e astratto, c'è una continuità nel passaggio tra ciò che esiste universalmente perchè di generale interesse o utilità, e ciò che non esiste, ovvero esiste solo all'interno di una singola mente: ad esempio, posso indurre artificialmente una combinazione di immagini in chi mi legge descrivendo i falipi come draghi viola e blu che mangiano petrolio, ma certamente i falipi non esistono in alcun senso rilevante (o almeno fino ad un attimo fa)³⁹. Una comunicazione quotidiana, come potrebbe essere la taglia 48 mi va a pennello per le giacche, ma non per i pantaloni, che mi restano sempre un po' larghi; ci vorrebbe il 47, che però non esiste, esemplifica concretamente il modo in cui ciascuno di noi si confronta con l'esistenza di astrazioni sociali, ma risulterebbe vuota di senso in una concezione dell'esistenza priva di gradi intermedi o dei soggetti; infatti, solo in quanto il 47 esiste potenzialmente nella mente (si potrebbe chiederlo su misura ad un sarto), si può constatare che non esiste, socialmente o realmente. Anche l'esistenza del 48, inteso come taglia, è istruttiva: come ogni astrazione, è ottenuta per sottrazione delle caratteristiche soggettive, in modo da poter connettere tra loro con un'unico concetto vari rappresentanti, e così risparmiare (nel caso specifico, il risparmio non è solo mentale).

Il processo dinamico collettivo che attribuisce esistenza o meno è particolarmente ben visibile nel caso di personaggi immaginari: un personaggio inventato da uno scrittore, comincia sì ad esistere nella mente del suo creatore, ma se le caratteristiche non sono ben scelte, non ha successo e resta solo un nome senza corpo. Un personaggio è ben riuscito, quando il lettore, pur in mancanza di impressioni reali, è indotto a completare nella propria mente la descrizione, necessariamente parziale e indeterminata, con associazioni soggettive e in generale con tutta l'attività mentale di costruzione di un'immagine interna: esattamente come quando viene descritta da altri una persona realmente esistente e viva ma non conosciuta. Quanto più nei lettori questo lavoro risulta spontaneo e con risultati invarianti, tanto più un personaggio è chiamato all'esistenza. Ad esempio, Nero Wolfe di Rex Stout, per quanto indeterminato e forse anche poco plausibile, si impone come molto vivo e invariante; è tal-

³⁹La difficoltà a valutare l'esistenza sociale emerge anche come problema pratico, ad esempio nel momento in cui si vende il brevetto di un marchio; vedi anche, più in generale, la difficoltà a dare un valore monetario alle creazioni puramente intellettuali, la cui riproduzione ha costi materiali trascurabili.

mente inconcepibile immaginarlo diverso da quello che è, che le espressioni Nero Wolfe pesa più di un quintale (vera) e Nero Wolfe coltiva tulipani (falsa) risultano proposizioni perfettamente sensate, in quanto si riferiscono agli aspetti invarianti, e quindi esistenti socialmente, mentre Nero Wolfe ha una cicatrice sulla spalla lo è molto meno, perché (a quanto ne so) Rex Stout non ne parla. Per questi motivi, anche se certamente Nero Wolfe non esiste come persona in carne ed ossa (in particolare non sa di esistere, non possiamo fargli visita, la sua nascita non è registrata in qualche municipio), in tutti i sensi non materiali esiste sì, nella mente dei lettori, e in un modo che di fatto non si distingue così facilmente da quello in cui esistono Omero, Mata Hari, Marilyn Monroe, Bush o Zenone d'Elea.

Uno dei normali meccanismi alla base della creazione o ricreazione mentale interna di un concetto astratto è il proiettare esternamente la comprensione o l'intuizione, anche se parziale, su qualunque oggetto o espressione percepibile con i sensi, che si presti a raccogliere il significato e così ne diventa un simbolo. Le parole stesse sono naturalmente l'esempio di base, ma ogni mezzo sensibile è utilizzabile a questo scopo. Quando il duplice processo sociale di astrazione dalle associazioni soggettive e di accordo si è sostanzialmente stabilizzato, lo spazio per la variazioni individuali si restringe e la mancanza dell'uguaglianza rispetto agli organi di senso è compensata dalla sostanziale uguaglianza delle procedure mentali interne di comprensione; allora il concetto stesso si sovrappone al suo simbolo, che ne raccoglie completamente il significato e viene a far parte della realtà come un oggetto, per così dire, di ordine superiore; tipicamente, in matematica, dall'uso di p come simbolo del rapporto tra circonferenza e diametro, si passa a p come oggetto in sé. Ecco perché oggettività è sinonimo di verità indiscutibile: un'idea astratta risulta oggettiva quando, letteralmente, è trattata alla maniera di un oggetto, cioè quando induce universalmente la stessa attività mentale, di connessioni, deduzioni, emozioni, ecc., nello stesso modo in cui un oggetto induce le stesse sensazioni.

L'oggettificare un concetto astratto identificandolo con un suo simbolo, espressione sensibile o immagine interna, oltre a facilitare o addirittura permettere la comunicazione, ha individualmente la funzione di minimizzare il lavoro mentale, in quanto libera la mente dal compito di connettere e permette invece di mettere in moto i meccanismi più automatici, e quindi meno faticosi, della percezione, come per oggetti concreti (ma si ricordi che, esattamente come per il lavoro di elaborazione delle sensazioni in percezioni, automatico non vuol dire più semplice, ché anzi la liberazione consiste nel delegare la complessità all'inconscio). Per questo spesso si tratta, fittiziamente, un concetto astratto come se fosse un oggetto prima ancora che lo sia davvero, cioè prima che il processo dinamico sociale lo abbia stabilizzato. Possiamo ben immaginare, come d'altra parte testimoniato da molti romanzieri, Rex Stout in un simile stato emotivo nel momento in cui comincia la stesura del primo romanzo con Nero Wolfe: ben prima che Nero Wolfe risulti invariante, forse anche prima di dargli il nome, nella sua mente è come se lo fosse, e gli sembra solo di doverlo descrivere.

Da questo punto di vista, l'introduzione di idee platoniche o estensioni assolute risponde solo al bisogno psicologico di giustificare l'esistenza di universali: postulare l'esistenza di enti esterni attualmente dati, permette di leggere a rovescio le proiezioni fittizie come percezioni, anche se mentali, appunto come per un oggetto anche se soprannaturale, e quindi dare un fine al processo dinamico di conoscenza, evitando l'ansia derivante dalla consapevolezza di esserne gli artefici.

D'altra parte, la riduzione del contenuto di una parola al suo uso nel linguaggio, purché non concepito rigidamente come l'insieme delle occorrenze corrette, corrisponde certamente ad un atteggiamento più maturo, se non altro in quanto richiama l'attenzione dai mondi iperuranici a quello attuale, ma non dà molto spazio al processo di apprendimento e al contributo dei singoli soggetti alla formazione degli universali.

Legare l'esistenza dei concetti astratti all'accordo sociale, come sopra proposto, presta il fianco ad una critica apparentemente insuperabile, e cioè che l'esistenza, e quindi anche la verità, abbia puro valore statistico, e quindi risulti omologabile ad una moda. Fa soffrire vedere quanto spesso i meccanismi sociali, anche all'interno dell'ambiente scientifico, distorgano la realtà e la verità con idee precostituite, e quindi sprechino risorse intellettuali; tuttavia è un dato di fatto, parte della complessità della specie umana, che tutte le dinamiche sociali, dalle relazioni interpersonali alle grandi scelte politiche o ideologiche, influenzano anche le teorie più astratte e quindi determinano l'esistenza o meno di concetti (si pensi, ad esempio, a quanto i finanziamenti possano modificare i percorsi della ricerca di frontiera; o più in piccolo, a quanto il modo in cui viene diffuso determini il successo di un risultato). E allora una soluzione più rigida appare come un comodo rifugio ideologico di fronte al conflitto tra la coscienza individuale e i canoni sociali; ma, come abbiamo già visto per l'apprendimento, proprio a partire da questi conflitti si può innescare un processo di cambiamento, che è la fonte e l'anima della conoscenza.

Tutti i processi dinamici coinvolti nella formazione delle astrazioni sono rilevanti anche in matematica, e ben visibili quando il movimento è avvertibile, in particolare nelle fasi di creazione individuale e di apprendimento e nell'evoluzione storica. Ad esempio, ogni working mathematician ha certamente sperimentato più volte il continuo passaggio tra intuizione e verifica, in particolare nel cercare una nuova definizione più adeguata ad unificare diversi risultati noti. Tuttavia un matematico standard generalmente, e opportunamente, tende a dimenticare o anche a lasciare inesperto (o addirittura, per eccesso di zelo, a svalutare e quindi ad avversare chi cerchi di far emergere) tutto il lavoro interno a partire dalla realtà, anche se costituita da risultati precedenti, proprio perché così, come abbiamo visto in generale, trattando gli enti matematici come dati esternamente o oggettivamente, può assumere un atteggiamento che lascia la mente più libera di procedere; per questo, come più volte osservato e verificato, se spinto ad aprire il proprio riserbo sulla questione dei fondamenti, pur con qualche riluttanza egli si dichiara formalista con la mente, ma resta platonista nel cuore.

Questa constatazione invece usualmente è lasciata come una irrisolvibile curiosità, acquistando allora il sapore di incoerenza o scissione, non tanto per il matematico che sa come operare con gli oggetti (con il cuore, appunto), quanto per il filosofo della matematica che non dovrebbe arrendersi di fronte alla difficoltà di conciliare i due atteggiamenti in una teoria realistica sull'esistenza degli oggetti matematici. Teorizzare, seguendo la mente formalista, che l'esistenza è semplicemente la mancanza di contraddizioni (come dire che caratteristiche arbitrarie purché non impossibili creano un personaggio) significa svilire, ignorandoli, tutti i complessi processi dinamici di elaborazione della realtà attraverso la partecipazione degli individui, e comporta poi non saper motivare l'utilità della matematica nelle applicazioni (come non saper spiegare il successo dei personaggi riusciti). D'altra parte, seguire il cuore platonista significa semplicemente dover ricorrere a forti principi metafisici, poco giustificabili e poco di moda.

Un modo per rendere più concreta e istruttiva la questione dell'esistenza, è trasformare il come in quando, e chiedersi ad esempio da quando esistono i grandi numeri cardinali. Oppure, per un esempio più vicino nel tempo, da quando esiste la logica lineare, o, se si vuole esplicitare un oggetto, il connettivo times di congiunzione moltiplicativa. La risposta dipende dalla tendenza di ciascuno a valutare l'importanza del coinvolgimento del soggetto e della società. Da sempre, dal tempo di Gentzen (nel senso che era implicito con le regole strutturali), dall'articolo di Grishin del 1974, da un mio appunto del 1983, da quando Girard ha coniato il nome, dall'articolo Linear Logic di Girard, da quando se ne parla nell'ambiente, da quando si sa usare correttamente, da quando qualcuno la capisce intuitivamente, da

quando tutti possono capirla e in tal caso debbono avere le stesse intuizioni, non esisterà mai: sono tutte risposte possibili, e sostenibili, che si risolvono nella pratica di tutti i processi, fino a quello storico.

Infine, il punto di vista qui proposto offre una soluzione alla questione se la matematica sia sempre cumulativa, in realtà abbastanza secondaria ma molto dibattuta e talvolta considerata addirittura come la sua caratteristica essenziale. Si sostiene che una contraddizione porti alla morte di una teoria, e quindi degli oggetti e concetti su cui è basata; ma si dovrebbe piuttosto osservare che tali morti premature, possibilmente romantiche, eroiche, cruente, danno luogo ad una metamorfosi, ad una rivoluzione della prospettiva, che distrugge la teoria contraddittoria semplicemente togliendola alla vista. Ma non sempre c'è questa fortuna, e in matematica la morte più diffusa è quella naturale per vecchiaia; l'incoerenza è molto più sottilmente riposta in una idealizzazione inefficace, che lentamente induce il disinteresse da parte dei singoli matematici, l'affievolirsi dell'accordo, e infine l'oblio, cioè la non-esistenza. Per fortuna, nemmeno la matematica è strettamente cumulativa.

Non si può concludere senza accennare, almeno, alla presenza di altri processi dinamici anche a livelli più elevati e indiretti. In particolare, lo scambio tra individui si ritrova, ad un gradino superiore, nel rapporto di scambio e mutua influenza tra teorie e discipline diverse, nel processo di unificazione delle conoscenze. Avrebbe ben poca forza dinamica la coerenza di una teoria, pur se incrollabile da un punto di vista interno, se risultasse fondata soltanto su principi totalmente estranei o addirittura in contrasto con principi associati di altre discipline. In questo stesso lavoro, il tentativo di tener conto di tutti gli strumenti culturali rilevanti per affrontare un problema è la conseguenza di questo atteggiamento, assunto senza discussione; ora è chiaro, mi auguro, che mi son concesso di superare i confini della mia competenza professionale solo perché alla ricerca di idee suggestive e principi unificanti, allo scopo di avvicinare, anziché separare, la conoscenza matematica alla conoscenza in generale.

Ma se ora anche solo mentalmente si cercano di visualizzare tutti assieme i processi dinamici emersi, dalla percezione di un oggetto concreto per successive astrazioni fino al cammino della scienza, la mente si smarrisce e, di fronte alla complessità altrimenti inavvicinabile, ha bisogno di un'unica idea in cui chiudere tutti i processi; ma se ci si lascia andare, e ci si arrischia a volare così in alto da vedere tutte le astrazioni come esempi di un'unica idea generale, una meta-astrazione, essa risulta proprio questa: ogni astrazione è prodotta dall'evoluzione, sempre con gli stessi processi, come una nuova entità più semplice, ma appunto più astratta, per governare situazioni di eccessiva complessità. E allora con questa idea il vortice di tutti i processi si coagula in un'unica immagine, quella di un frattale: con qualunque cambiamento di scala lo si osservi, qualunque frammento si consideri, ripresenta lo stesso andamento, lo stesso pattern, che è identico a tutto il frattale stesso.

Questa immagine è così suggestiva che non solo ritroviamo come conseguenza molti dei fatti visti in particolare, e riusciamo a concepirne l'unità, ma anche, se proviamo a lasciarci guidare, ci aspettiamo di scoprire nuovi processi dinamici a qualunque livello. E infatti, se proviamo ad andare più giù, vediamo che l'evoluzione astrae nel concreto, creando gli organismi complessi come entità che connettono le singole cellule, in perfetta analogia ad esempio con l'esistenza di un concetto astratto come legame tra i concetti in tutti i singoli individui; un fegato ad esempio è ben di più dell'unione di tutte le sue cellule, sostanzialmente una uguale all'altra, ma consiste nella connessione tra di esse, del loro mutuo scambio e rapporto, e una mela, come organismo, è identificabile con la connessione astratta che lega le singole parti e ne regola lo sviluppo. Se proviamo a salire, vediamo subito, oltre alla dinamica tra teorie, anche quella tra nazioni, l'evoluzione storica ecc.

Mente allora risulta ogni organismo capace di creare nuove astrazioni, e la mente umana quella capace anche di esplorarle, cioè pensare (ovvero astrarre sulla complessità della propria

realtà interna, e non solo sui dati sensibili).

E se osiamo ancora di più, e supponiamo anche il viceversa, ovvero concepiamo ogni organismo prodotto con un salto evolutivo come un'astrazione sui predecessori, allora diamo un senso unitario e nuovo anche ad un principio ben noto in biologia, per cui ogni passo dell'evoluzione riassume in sé tutti i precedenti. Non ci sorprende più, allora, la complessità della mente umana che, in quanto l'organismo più elevato nella scala evolutiva, riassume e racchiude in sé tutta la complessità della natura; ritroviamo inoltre la caratteristica umana, la coscienza di poter astrarre, come la riproduzione all'interno di un unico essere vivente dei vari processi dell'evoluzione, e dell'evoluzione stessa. E allora non ci può sorprendere nemmeno che una gran parte della nostra mente sia ignota a noi stessi, come lo è la natura, e che anzi, come per l'evoluzione naturale, sia il caso il motore del pensiero creativo, e quindi l'inconscio l'intermediario fisiologico tra caos e ordine, tra corpo e mente, tra pulsione e ragione. E ancora, non sorprende che le prime categorie adottate da un bambino per far fronte al caos siano molto schematiche ma molto forti, come benessere-malessere, pro-contro, ecc. e che, anche in un adulto, le emozioni e gli istinti restino il mezzo più veloce, e quindi efficace, per prendere decisioni quando un calcolo razionale risulterebbe di complessità proibitiva.

Infine arriviamo anche a intravedere, non per rivelazione o intuizione mistica, ma dopo un lungo cammino, che l'armonia dell'universo è il fatto che le stesse leggi evolutive hanno regolato la costituzione del mondo vivente, con tutto quello che vi è compreso dentro, inclusa la nostra mente con tutti i suoi contenuti. Ed essendo il risultato più complesso, che compendia e riflette tutti i precedenti, non sorprendono più gli inviti a guardare dentro di sé per vedere meglio il mondo. E infine non sorprende che ci possano essere dentro di noi intuizioni o istinti incompatibili, e quindi conflitto e non solo irenica sinfonia, perché nella natura solo lo scontro e l'incoerenza generano novità.

Torniamo con i piedi a terra, al nostro tema, cercando anzi di delimitarlo meglio.

2.3 Intermezzo: definizione antropologica della matematica come scienza stabile.

Prima di passare ad esaminare, nel prossimo paragrafo, come si possa da un punto di vista analitico caratterizzare l'astrazione in matematica, rispetto all'astrazione in generale, conviene cercare di chiarire che cos'è la matematica da un punto di vista globale o antropologico; questo ci permetterà di isolare il campo delle astrazioni da considerare. Per raggiungere questo scopo senza troppo dilungarmi, abbandono ogni tentativo di giustificazione e propongo alcune considerazioni sotto forma di regole di un gioco semiserio, o di principi di base di una metateoria scherzosa.

Il campo di gioco è costituito dall'insieme di tutte le teorie o campi di conoscenza umana, non necessariamente scientifica (d'ora in poi, semplicemente teorie); si assume che ogni teoria abbia una sua specifica potenza P , che misura la capacità di spiegarci fatti. Il concetto di potenza è meglio definito, e il valore di P determinato, dalla seguente formula:

$$P = A \cdot \left(\frac{E}{C}\right) \text{ (legge fondamentale delle teorie perfette)}$$

dove l'affidabilità A , l'estensione E e la complessità interna C della teoria in questione sono definite come segue. L'estensione è la quantità e complessità dei fenomeni che la teoria spiega, ovvero il suo campo di applicabilità. La complessità interna è la misura della quantità e difficoltà delle istruzioni o assunzioni di cui la teoria è composta, ovvero il lavoro mentale necessario per comprenderla (più matematicamente, se I è l'insieme di istruzioni e d_i la

difficoltà dell'istruzione i -esima, risulta $C = \sum_{i \in I} d_i$). L'affidabilità, o stabilità, esprime il grado di certezza delle previsioni e di verità della teoria, ovvero quanto ci si può contare; a sua volta, l'affidabilità è scomponibile in diversi fattori: universalità (capacità di produrre accordo), precisione (inverso dell'approssimazione), rigore (inverso della complessità dei principi assunti senza esplicita menzione e/o nel corso dello sviluppo), durata (resistenza agli attacchi nel (o del) tempo), generalità (risparmio di dispendio mentale, livello di astrazione), assolutezza (inverso del legame con altre teorie), ripetibilità (indipendenza dal caso), ecc.

Per acquistare qualche intuizione sulla validità della legge fondamentale, suggerisco di provare ad applicarla per gioco ad alcune specifiche teorie; ma affinché il gioco risulti almeno un po' divertente, si devono assumere due principi (forse unificabili in un'unico principio di conservazione della potenza):

Principio di equipotenza (o di equanimità): in ogni momento, tutte le teorie hanno circa la stessa potenza (pur se determinata da valori diversi dei parametri A, C, E).⁴⁰

Principio di continuità: per ogni teoria, la potenza può variare nel tempo solo senza bruschi salti.

Per esempio, se tra le assunzioni di una teoria compare l'esistenza di enti soprannaturali, allora certamente E sale fino a tendere all'infinito (la teoria riesce a spiegare ogni fatto), ma di pari passo C anche tende all'infinito (le istruzioni per arrivare a comprenderne l'esistenza hanno difficoltà infinita, e non tutti sono così fortunati da averne la fede), e allora il rapporto E/C è in generale indeterminato, e P potrebbe assumere qualunque valore. Oppure, se si applica la legge fondamentale alla psicologia, si scopre che essa inevitabilmente è costretta a perdere in affidabilità, data l'enorme complessità dei fenomeni psichici che costituiscono il suo campo di applicazione.

È utile che il lettore acquisti una certa familiarità con il gioco-metateoria per poter apprezzare la seguente definizione antropologica della matematica, che usa la legge fondamentale a rovescio: in ogni momento storico, matematica è tutta quella parte delle conoscenze umane che, in quel momento, ha il massimo grado concepibile di affidabilità.

Questa definizione, per quanto semiseria, ci permette di invertire i termini in cui usualmente la matematica è concepita, cioè come paradigma di ogni esattezza e certezza, e di inserirla invece assieme alle altre scienze nel generale processo di acquisizione di conoscenze, mettendone in risalto gli aspetti umani e contingenti; infatti, la sua assolutezza risulta essere semplicemente il fondo-scala degli strumenti culturali per misurare l'affidabilità in un dato momento storico, e quindi cade ogni buon motivo per leggere l'innegabile evoluzione storica solo come successione di lemmi necessari al teorema della concezione attuale.

Di conseguenza, si inverte anche la concezione delle dimostrazioni come fonte di affidabilità assoluta, e dimostrazione risulta essere tutto ciò che garantisce la conservazione del massimo di affidabilità relativo al momento storico (e questa è l'unica via per comprendere come potessero essere considerate dimostrazioni certe argomentazioni, come quelle relative alle serie nel '700, ora considerate nonsense).

Più in generale, la metateoria sopra abbozzata consente di interpretare sotto una nuova luce, forse meno drammatica, alcune fasi storiche della matematica. Un paradigma che sembra ripetersi è il seguente: quando nella sua evoluzione storica la matematica, per qualche motivo interno o esterno, ha perso affidabilità, ovvero quando si è cominciato a concepirne un livello superiore, per poterla riportare al massimo, ovvero per rendere la matematica di nuovo vera matematica, senza contravvenire al principio di continuità, si è dovuto restringerle l'estensione. Vediamone alcuni esempi. La visione pitagorica di un mondo in cui tutto

⁴⁰Questo principio ricorda la seconda legge fondamentale di C. M. Cipolla, *Le leggi fondamentali della stupidità umana*, in: *Allegro ma non troppo*, Bologna 1988.

è numero è contraddetta dalla scoperta degli irrazionali in modo così conturbante da indurre i Greci antichi a negare per secoli ogni applicabilità pratica. Con la nascita delle geometrie non-euclidee, crolla l'affidabilità della geometria di Euclide e in generale dell'intuizione geometrica; per riacquistare certezza, la geometria diventa una teoria assiomatica astratta, e il compito di indagare sulle leggi dello spazio è delegato alla fisica. Analogo è l'esito dei paradossi in teoria degli insiemi; gli insiemi, che all'inizio erano da alcuni quasi identificati con i concetti stessi, si svuotano di ogni contenuto intuitivo non matematico e finiscono col diventare, ufficialmente almeno, gli elementi di un modello di una teoria assiomatica come ZF.

Infine, il punto di vista proposto permette di darci una ragione per un apparente paradosso della matematica: in ogni periodo storico, è stata considerata come assoluta, eppure continua a cambiare (e continuerà a farlo, non c'è alcun motivo per dubitarne). Come in fisica ogni certezza dipende dalla fiducia negli strumenti di misura a disposizione, così nel nostro caso basta tenere in considerazione gli strumenti culturali rispetto ai quali è misurata l'affidabilità. Da un punto di vista locale, per la definizione antropologica la matematica è e deve essere il massimo concepibile dell'affidabilità, ma non appena si considera la prospettiva storica, l'assoluto risulta relativo agli strumenti culturali disponibili. I cambiamenti avvengono quando, per motivi interni come i paradossi o esterni come la mancanza di consenso e la disarmonia con altre conoscenze e con nuovi fatti reali, il processo dinamico di formazione degli enti matematici astratti si rimette in moto.

2.4 Il processo dinamico di creazione delle astrazioni matematiche.

Dal nostro punto di vista, si vede facilmente come i vari modi in cui si spiega la peculiarità della matematica, che per convenzione abbiamo riassunto nella parola stabilità, colgono solo qualche aspetto del processo dinamico di formazione. Per sommi capi, ad esempio, il platonismo coglie l'aspetto universale delle idee matematiche, ma postulandone un'esistenza statica nega che esse siano create da un processo; il formalismo dichiara che il contenuto della matematica si riduce a ciò che è esprimibile in formule e l'intuizionismo, all'opposto, a ciò che si costruisce con l'intuizione, ed entrambi sottolineano una metà del processo negando o ignorando l'altra; il logicismo coglie la necessità dei concetti matematici, ma vedendoli come un prolungamento delle leggi assolute della logica, nega che possano provenire da una necessità inerente la realtà. Tutti questi atteggiamenti sono di fatto psicologicamente necessari per poter creare oggetti stabili, e quindi tutti sono accettabili, o almeno non refutabili; la difficoltà maggiore è appunto accettare che siamo proprio noi stessi a creare, con il processo dinamico individuale e sociale, quegli enti che vogliamo vedere come assoluti, e per questo ciascuno di tali atteggiamenti risulta incompleto e, in tal senso più sottile, incoerente.

Ma per quanto si scruti la matematica, se ci si limita alla sua forma attuale, tipicamente quella dei manuali specialmente se elementari, è praticamente impossibile non vederla come assoluta e necessaria, nello stesso modo in cui è inconcepibile la teoria dell'evoluzione naturale se ci si limita ad osservare l'ultima specie prodotta, cioè l'uomo, senza considerare le specie che l'hanno preceduta. Per ricostruire la genesi degli oggetti della matematica, l'unico modo è allora rivolgere attenzione là dove si può scorgere il movimento dell'evoluzione, la storia innanzitutto. Purtroppo però, le matematiche più antiche, soprattutto delle civiltà arcaiche, sono, come le specie estinte, ricostruibili solo per indizi; è più facile allora analizzare il processo di evoluzione individuale, sia nell'apprendimento dei bambini (che pre-

sumibilmente ripercorre le tappe dell'evoluzione storica) sia nella fase creativa (che sembra presentare gli stessi meccanismi, se non lo stesso percorso). Inoltre, se la stabilità della matematica è risultato di un processo, non possiamo aspettarci, come d'altronde abbiamo sperimentato per l'esistenza delle astrazioni in generale, di caratterizzarla con un criterio rigido, formulabile preventivamente una volta per tutte; dobbiamo pazientemente esaminare un caso alla volta, cominciando dagli oggetti che si presentano per primi, numeri e figure. Si arriva a vedere allora che alcuni aspetti altrimenti difficili da spiegare non destano particolari problemi, e anzi costituiscono un ulteriore esempio, e quindi una conferma, di quanto già visto in generale.

Mi sembra che la semplice osservazione dei bambini dimostri che i numeri naturali non compaiono improvvisamente nella mente nel modo in cui li conosce un adulto oggi, ma che sono formati molto lentamente per successive astrazioni. In prima approssimazione, sembra di vedere uno stadio iniziale in cui un numero è solo una configurazione immediata, tanto che tre arance non sono più tre se invece che a triangolo sono messe in fila. Poi c'è la scoperta di un rappresentante privilegiato, di solito le dita, e allora il numero tre è un predicato immediato verbalizzabile con se faccio corrispondere un dito ad ogni oggetto, cominciando dal pollice e procedendo in ordine, arrivo al medio (che è, si noti, una definizione comprensibile ad ogni essere umano, totalmente priva di circoli viziosi, cioè predicativa, e costruttiva nel senso che non si deriva da nozioni più complesse). Solo dopo un lungo processo, con tentativi ed errori, e successive approssimazioni, si sviluppa la capacità di tenere a mente senza bisogno manifesto né di intuizioni geometriche né rappresentanti, usualmente raggiunta con una certa consapevolezza solo dopo l'istruzione scolastica.

Non possiamo tuttavia imputare questa lentezza alla inadeguatezza del pensiero dei bambini, che dovrebbe miracolosamente svanire con la maturità. Infatti, l'evoluzione storica del concetto di numero sembra seguire tappe analoghe, e non così remote nel tempo: dall'aritmo-geometria di Pitagora, il cammino è così faticoso che solo dopo oltre due millenni, nel '600, si arriva ad una chiara e consapevole formulazione del principio di induzione⁴¹.

Questo non è sorprendente se si apprezza fino in fondo la quantità di lavoro mentale, la complessità dei processi di astrazione dalla realtà e di idealizzazione necessari per giungere a concepire i numeri in modo talmente semplice, invariante e adeguato alla realtà da poterli considerare mentalmente come oggetti esistenti ad ogni effetto pratico, e anzi, a rovescio, per poterne sentire l'esistenza, che pure è frutto di tali processi, come così scontata e interiorizzata, e tutta raccolta nella attuale definizione, da far parte integrante e apparentemente necessaria della realtà quotidiana (tanto che la visione di un mondo senza numeri è ricostruibile solo fittiziamente, per immedesimazione nella mente di un bambino o di un animale).

Eppure, nello stesso momento, nemmeno i numeri naturali possono esistere in un senso più assoluto di quello di una astrazione mentale: ad esempio, anche una bambina di dieci anni, messa di fronte alla possibilità di denotare in molto meno di una riga un numero più grande del numero degli atomi di tutto il sistema solare, è in grado di dedurre che l'esistenza di tale numero non può essere che il risultato di una costruzione mentale, e ideale. Ma certamente è molto più semplice e rilassante per la mente umana concepire e dar senso all'infinita successione dei numeri, come risultato ideale della inesauribile ripetibilità della semplice operazione di passaggio al successore, piuttosto che cercare di cogliere l'illimitata e vertiginosa complessità del mondo reale, con i suoi numeri finiti ma inaccessibili⁴²; e allora si

⁴¹Sono rilevanti a proposito alcune osservazioni nella relazione di G. Longo sulla iniziale dipendenza della numerazione dal contesto di applicazione; vedi anche ad esempio il primo capitolo di C. Boyer, *A history of mathematics*, 1968 (trad. it. Storia della matematica, Milano 1980).

⁴²A un matematico può sfuggire, per assuefazione all'idealizzazione, la differenza tra finito e controllabile; confesso d'averla compresa fino in fondo solo quando, dovendo scrivere un programma, fui posto di fronte

vede che i numeri naturali, come tutte le astrazioni, provengono sì dalla realtà, ma attraverso la semplificazione di una idealizzazione senza riscontro reale eppure così vicina e disponibile da farli diventare più stabili e invarianti, cioè più reali della realtà stessa, e incredibilmente efficaci.

Non è possibile rappresentare in un'unica teoria dei fondamenti, comunque chiusa in sé, la varietà, sopra appena accennata, dei processi dinamici necessari alla formazione del concetto dei numeri naturali; e allora, per dare comunque un inizio, si può ben accettare ad esempio l'infinita ripetibilità come base di partenza, purché non la si veda, come invece ad esempio sostengono Brouwer e Poincaré, come risultato necessario di una intuizione primaria. Infatti, solo la consapevolezza dell'idealizzazione è un buon vaccino contro le distorsioni della realtà che essa induce, e consente di vedere lo spazio per eventuali distinzioni più adeguate (ad esempio tenendo in considerazione, come suggerito dai problemi di definibilità o calcolabilità nei fatti, il diverso grado di accessibilità dei vari numeri naturali).

A questo punto sembra chiaro che anche le figure geometriche, o più in generale le forme, sono ottenute dalla realtà con un processo di astrazione, e anzi, più che per i numeri, è visibile come una certa idealizzazione sia necessaria⁴³. Ma se si accetta davvero l'idealizzazione insita nella definizione di punti, rette, piani ecc. e il fatto che il legame con la realtà è sempre da essa mediata, allora si può abbandonare senza fatica l'illusione di una verità geometrica assoluta ed assumere nella questione delle diverse geometrie possibili un atteggiamento più sensato e coerente, che ora mi sembra molto semplice: se l'esistenza ed unicità della parallela è inserita nell'ambito delle idealizzazioni che la precedono, allora da una parte si può capire che idealizzazioni diverse sono possibili⁴⁴, e quindi non sorprendono le geometrie non-euclidee, ma dall'altra si può tranquillamente rivalutare la stabilità della geometria euclidea, rimettere al posto giusto la sua comprovata applicabilità, e lasciare di nuovo libera l'antica intuizione geometrica.

Similmente, anche i numeri reali sembrano provenire per astrazione dall'attività del misurare; conviene tuttavia esplicitare la doppia idealizzazione che essi contengono: in primo luogo, si postula come convergente ad un valore ben definito la successione illimitata delle successive approssimazioni di una misura (risparmiando così di tener conto del possibile errore nei singoli passi di calcolo), e in secondo luogo, si chiude preventivamente la generazione di ogni possibile successione in un dominio concepito come dato attualmente.

Per numeri e figure, facilmente si vede che la funzione del processo di generazione è raggiungere per successive approssimazioni il giusto equilibrio - tra aderenza alla realtà, generalità tramite l'astrazione e semplicità con l'indispensabile quota di idealizzazione - per far sì che la manipolazione dei concetti astratti possa sostituire una certa quantità di lavoro mentale e materiale, come contare, sommare, misurare, ecc., con l'aspettativa che il risultato sia esattamente quello che avremmo ottenuto anche senza di essi, ma più concretamente, più faticosamente e con maggior probabilità di sbagliare o di perdere precisione; in altre parole, essi devono diventare buoni strumenti, così essenziali da poter essere adoperati senza difficoltà e così affidabili da poter delegare ad essi lo svolgimento d'un compito originariamente nostro.

A ben guardare, le stesse considerazioni si applicano in generale a tutte le buone definizioni della matematica, non appena nella realtà da cui provengono si includa la matematica

ad un problema che mi illudevo di risolvere valutando le 100! possibili combinazioni, fino a quando mi resi conto che, un secondo per combinazione, questo avrebbe richiesto un tempo maggiore della età presunta della terra!

⁴³Rimando ad Enriques, op. cit., cap. IV-B, per una trattazione dettagliata di questo tema; Enriques giunge acutamente a vedere l'origine delle diverse geometrie, proiettiva, metrica, ..., nella invarianza rispetto ai diversi organi di senso.

⁴⁴Si può pensare ad esempio che, come avviene per altri aspetti nella meccanica quantistica, una differenza sia legata al cambiamento di scala.

stessa. Ma se si può dire che il compito più tipico e creativo della matematica è la produzione di strumenti così assoluti e stabili da poter essere adoperati con certezza e senza sorprese, si deve subito aggiungere che il mezzo più efficace per raggiungere questo scopo non è bloccare fittiziamente il processo dinamico di astrazione, ma piuttosto lasciarlo fluire fino a che si chiuda in se stesso e si stabilizzi in un movimento circolare. Per quanto possa apparire paradossale, infatti, solo il lavoro di confronto e adattamento reciproco tra realtà ed astrazione, tra contenuti interni ed espressione esterna, tra intuizione e verifica, tra soggettivo ed oggettivo, permette di mantenere sotto controllo l'idealizzazione, di raggiungere ragionevolmente l'aspettativa che il processo si ripeterà sempre uguale e con ciò la possibilità di interiorizzarlo e infine dimenticarlo⁴⁵.

Proprio perché dimenticare la genesi è lo scopo finale, cercare di ricostruirla ora comporta inevitabilmente una rivoluzione nella prospettiva; una volta che la si sia fatta propria, la presenza del processo appare ovunque. Ad esempio, è avvertibile internamente quando si cerca di comprendere un concetto nuovo individualmente, anche se ben noto socialmente, o di crearne uno nuovo in assoluto. La comprensione, o la creazione, è raggiunta quando tutto va a posto, ovvero il passaggio da intuizione a verifica, e viceversa, è possibile in ogni momento senza incongruenze o risultati inaspettati, e cioè il processo si è stabilizzato, ma certo non bloccato. Al livello sociale, lo stesso movimento è addirittura materialmente visibile, nell'area più propriamente di ricerca, ad esempio nella pubblicazione di articoli con risultati parziali presto superati da altri.

A questo punto è facile, almeno a parole, legare la certezza e absolutezza dei risultati alla stabilizzazione del processo che li genera; anche nell'etimologia di alcuni degli aggettivi usualmente riferiti alla matematica, sembra di trovare qualche allusione al chiudersi di un movimento: duraturo sembra risalire alla radice sanscrita darh, fermo; preciso deriva da pre e caedere, tagliare; stabile da stare, essere o rendere fermo; assoluto da ab-solvere, sciogliere da, che rimanda al suo contrario relativo, cioè che sta in relazione. Tuttavia non basta che un concetto sia definito precisamente; per renderlo matematico, è necessario che con esso e su di esso si possa operare con la certezza delle dimostrazioni.

Le dimostrazioni sono quei procedimenti del pensiero che senza l'apporto di nuove informazioni consentono di acquisire nuove certezze: ciò che usualmente, in senso lato, si chiama logica. Ad una prima analisi, è quindi un gioco a bocce ferme (dimostrare si identifica spesso con operare con rigore, che deriva da rigere, essere fermo o duro dal freddo, come in rigor mortis e in rigido) che consente di produrre e mantenere stabilità senza fatica, cioè senza ricorso ad alcun processo. L'ovvia etimologia di dimostrazione (de-monstrare è un intensivo di mostrare) ci aiuta a vedere quanto il lavoro mentale di idealizzare e oggettificare, pur presente nel processo di astrazione in generale, sia necessario in matematica e applicato in modo massiccio virtualmente ad ogni concetto, anche se non perfettamente determinato. Banalmente, non si può mostrare ciò che resta solo interno; per comprendere una dimostrazione, cioè per riuscire a vedere ciò che altri ci vogliono mostrare, non solo ogni termine dev'essere espresso (da ex-primere, far uscire) e reso esterno, ma anche essere percepito mentalmente ed esistere socialmente come un oggetto a sé stante, in modo che la certezza sia analoga all'oggettività dei risultati di percezione.

La storia della matematica ci offre innumerevoli esempi della trasformazione di idee in oggetti; tipico è lo sviluppo della nozione di funzione, ma altri esempi sono anche più palpabili. Per ogni sezione dei numeri razionali, secondo Dedekind *creiamo* un nuovo numero⁴⁶

⁴⁵L'analogia con gli strumenti, anche se materiali come gli utensili, non è troppo fuorviante, e anzi può essere d'aiuto: in fondo, anche la forma di un martello ci appare semplicemente necessaria, proprio perché è il risultato di una evoluzione fino a trovare l'equilibrio ottimale di pesi, dimensioni, leve, materiali, ecc.

⁴⁶Vedi R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872 (trad. it. in: Scritti sui fondamenti della matematica, Napoli 1982, p. 71).

come elemento separatore; pochi anni dopo, pur conservando la stessa intuizione, i numeri reali così creati vengono identificati con le sezioni stesse, cioè resi oggetti (per quanto infiniti) che si possono mostrare. Analogamente, mentre Cauchy intuisce che ogni successione che soddisfi il suo criterio deve convergere ad un valore, Cantor identifica quel valore con la successione stessa. Più recentemente, il linguaggio della teoria delle categorie deve la sua potenza alla possibilità di trattare come oggetti, chiamati funtori, alcune costruzioni altrimenti difficili da esprimere e, a fortiori, da dimostrare.

La logica matematica basa la sua stessa esistenza su un gran numero di passaggi di questo tipo: ad esempio, dalle asserzioni linguistiche alle formule, dalle parole che connettono asserzioni a segni che costruiscono formule, ovvero connettivi e quantificatori, o anche da formule ad elementi di un'algebra⁴⁷. Accettare davvero la necessità di questo passaggio, consente di evitare perdite di tempo alla ricerca di autoevidenza: il connettivo & e il quantificatore \forall , qualunque sia il modo di definirli formalmente, raccolgono comunque ciò che si riesce ad oggettificare del concetto naturale, rispettivamente, di congiunzione e di quantificazione universale. Quindi, tutt'altro che un circolo vizioso, è inevitabile che nella loro definizione i concetti naturali compaiano più o meno esplicitamente⁴⁸.

Ovviamente, un alto grado di idealizzazione è necessario assieme all'astrazione nel processo di definizione dei concetti matematici, per liberarli dal contesto, dalle rappresentazioni soggettive e da ogni altra possibile fonte di ambiguità. Ma un'idealizzazione anche più forte è indispensabile per poter dimostrare qualche proprietà per tutte le infinite istanze di un concetto astratto: per avere la certezza di aver considerato esaustivamente tutte le possibilità, o si fissano una volta per tutte le regole della loro produzione, o si trattano non solo come oggetti, ma anche dati attualmente, cioè presenti in una totalità completata, e in ogni caso si ipotizza lo sviluppo futuro (è molto istruttivo a questo proposito confrontare l'estrema cautela di Euclide con la disinvoltura d'oggi nel trattare l'infinità della retta e del dominio dei numeri reali). Questi sono i meccanismi mentali che rendono la matematica così asettica e ferma nel tempo.

Anche se gli enti della matematica sono equiparabili ad oggetti, resta da spiegare più analiticamente da dove proviene il potere quasi magico delle dimostrazioni di rendere evidenti, ovvero portare alla visione, aspetti o proprietà prima nascoste. Se con logica si intende molto in generale l'insieme delle regole più o meno esplicitamente osservate nelle dimostrazioni⁴⁹, per ottenere una risposta esauriente e ben fondata si dovrebbe a questo punto cercare di ricostruire le origini biologiche e mentali della logica, con un lavoro analogo a quello svolto per l'astrazione.

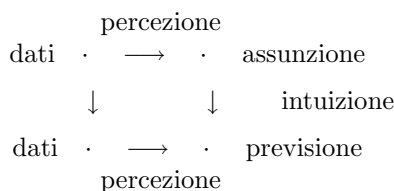
Non sembra un compito facile; dobbiamo aspettarci infatti che, come per la matematica, i calcoli logici formalizzabili siano solo i gradini più elevati di una lunga evoluzione, e che perciò il senso della parola logica si debba allargare fino ad includere tutte le leggi con cui il pensiero passa da assunzioni a conclusioni, e quindi da collegare con i movimenti della mente in generale. Con questa prospettiva, tuttavia, non è difficile situare il luogo d'origine della logica all'interno del processo dinamico di conoscenza. Infatti, ad una analisi più attenta, facilmente si scopre il limite della rappresentazione grafica dati \leftrightarrow struttura unificante: essa sembra suggerire un movimento circolare, una ripetizione senza cambiamenti, cioè la negazione del processo stesso. Affinché il gioco tra interno ed esterno, tra dati e mente non

⁴⁷Si capisce allora come mai il lavoro di Boole, in cui si propone un'unico passaggio dal linguaggio all'algebra, fosse prematuro rispetto al suo tempo.

⁴⁸Il circolo vizioso da evitare, semmai, è il gioco di specchi tra e per ogni con cui si ritiene di aver automaticamente chiarito il significato di entrambi, come nella definizione di Tarski di verità per linguaggi formalizzati.

⁴⁹Conviene pensare ovviamente ad un sistema di regole di inferenza come la deduzione naturale, piuttosto che ad un calcolo assiomatico.

sia un circuito chiuso, deve esserci invece un lasso di tempo tra i due passaggi, che lasci lo spazio per l'elaborazione mentale (interna) e per l'esperienza e la manipolazione dei dati o il fluire degli eventi (esterni). Lo schema allora si trasforma in un diagramma con più frecce, in cui i termini usuali sembrano trovare naturale collocazione:



La percezione (da *per* e *capere*, prendere), l'atto del prendere dà luogo ad uno stato mentale interno, l'assunzione (da *ad-sumere*, prendere su di sè, fare proprio). L'intuizione (da *in-tueri*, guardare dentro) è l'elaborazione mentale, il movimento puramente interno, al buio (e forse generato in ultima analisi da scambi di informazioni tra neuroni), che fa passare ad un nuovo stato mentale, la previsione (da *pre-videre*), in cui si vede ciò che non è ancora accaduto. La verifica consiste naturalmente nella coincidenza dei due percorsi⁵⁰, mentale e reale, ovvero, in accordo con la tradizione scolastica, nella *adaequatio rei et intellectus*, dove la presenza di *ad* è la traccia del movimento sottostante. Un'intuizione verificata è quindi una doppia conferma, dell'aver guardato bene sia all'interno che all'esterno, e produce stabilità; al contrario, il cambiamento nasce per colmare la frattura di un'aspettativa disattesa dai fatti, per sciogliere l'incoerenza tra realtà e previsione, aggiustando una all'altra.

Come la ripetizione di sensazioni si trasforma nella percezione di un oggetto permanente, così le ripetute verifiche delle aspettative confermano i movimenti del pensiero che hanno generato le aspettative confermate, fino a trasformarli in regole tanto affidabili da rendere superfluo il confronto con i dati e tanto interiorizzate da essere applicate nel modo e nell'ambito corretto anche inconsapevolmente. Questo sembra essere il modo in cui si stabilizzano le leggi del pensiero, e infine le regole di deduzione logica. La loro origine sembra quindi legata in modo indissolubile al processo dinamico di astrazione; infatti, se un'astrazione ha la funzione di strumento nel rapporto con la realtà, nel processo stesso della sua formazione debbono essere selezionate anche le regole del pensiero con cui adoperarla per ottenere previsioni, in un gioco dinamico tra la sottrazione delle proprietà non conservate dalle regole, e viceversa l'espulsione delle regole che non conservano l'adeguamento alla realtà desiderato.

Tutt'altro che un unico sistema statico di tautologie a priori, la logica risulta quindi nascere ed evolversi assieme alla conoscenza, e costituirsi in vari sistemi di regole, spesso non esplicitate, che governano il modo di operare con le astrazioni, e che dipendono dall'ambito di applicazione, dal livello di astrazione, dal tipo di certezza e di informazione che si vuole conservare. Questo concorda con l'uso quotidiano della parola logica e derivati, come in è logico che..., e con la comune esperienza: la realtà e i modi di conoscerla, e quindi le leggi del pensiero, anche se ci si limita ad argomentazioni esatte, sono di gran lunga più complessi e articolati di quanto si possa esprimere con le sole categorie vero e falso, a fortiori se idealizzate in modo così rigido, come nella logica classica, da perdere il contatto con la realtà e quindi anche l'originaria funzione di orientamento. Questo inoltre sembra l'atteggiamento più naturale e ragionevole per dare un significato costruttivo alla moltitudine di sistemi di logica - classica, intuizionistica, lineare, modale, temporale, induttiva,... - che di fatto sono studiati formalmente, senza dover cadere in un *laissez faire* qualunque.

Il legame tra la definizione delle astrazioni e il modo di adoperarle, cioè le regole con cui

⁵⁰Cioè, con il linguaggio della teoria delle categorie, nella commutatività del diagramma.

metterle in opera e quindi in senso lato la loro logica, è ben visibile in matematica, e anzi così stretto che i due aspetti si confondono. Senza cercare molto lontano, due buoni esempi sono le strutture forse più basilari di tutta la matematica, i numeri naturali e reali. Per entrambi, la definizione è chiarita esattamente quando si riesce a formulare il principio di base con cui operare: i numeri naturali nel momento in cui si caratterizzano come la struttura in cui vale il principio di induzione, e i numeri reali come quella chiusa rispetto al principio di continuità o di completezza (ogni insieme limitato ha estremo superiore). I successivi teoremi di unicità a meno di isomorfismi - della successione dei naturali e del campo ordinato completo - sono il sigillo che stabilizza il processo di formazione e che permette di trattarli come oggetti senza esitazione, con la coscienza che ogni loro proprietà una volta vista può essere dimostrata. E il fatto che le caratterizzazioni di tali strutture non siano esprimibili nell'usuale logica al primo ordine giustamente non turba la fiducia che in esse ripone il matematico; al contrario, è il logico che, di fronte alla palese inadeguatezza del suo strumento di base, dovrebbe vedere un buon motivo per scuotersi e cercare di superarla, per quanto ardua appaia la questione.

In generale, nel momento in cui le astrazioni matematiche si stabilizzano fino ad essere equiparate ad oggetti esterni, le deduzioni logiche si trasformano in regole codificate per la loro manipolazione; così diventa possibile mostrare i movimenti del pensiero, e nascono le dimostrazioni. Le dimostrazioni allora prendono il posto degli esperimenti sugli oggetti reali, e il processo dinamico tra intuizione e realtà si interiorizza e si trasforma nel ben noto rapporto tra intuizione e dimostrazione. La distinzione tra queste due modalità di procedere, anche se entrambi mentali, resta comunque la fonte dell'avanzamento della conoscenza, e la verifica continua ad essere la loro adaequatio.

Comunicare un'intuizione soggettiva, o anche la comprensione di un risultato, significa riuscire ad esprimerla nel linguaggio matematico delle dimostrazioni, ovvero far corrispondere al percorso interno, e libero, dell'intuizione un percorso tutto esterno con la stessa conclusione, ma in cui ogni passo sia l'applicazione di una regola. Questo non è affatto un lavoro automatico; tuttavia la fatica di far cadere l'intuizione entro le regole socialmente codificate in un dato ambito, forse maggiore che in altre discipline, è compensata dalla certezza che l'interlocutore, in quanto accetta e comprende le stesse regole del gioco, potrà ricostruire nella propria mente un percorso con la stessa conclusione, e anzi in un certo senso sarà costretto a farlo⁵¹. Una dimostrazione deve quindi essere compresa (da cum-prehendere) e fatta propria, in qualche modo ritrasformata in una intuizione, più veloce e sintetica; seguire una dimostrazione comporta anche questo movimento del pensiero più interno, rispetto al quale il controllo della correttezza formale è solo un aspetto superficiale (e l'unico che può essere svolto da una macchina). La presenza del percorso e contenuto intuitivo si manifesta, ad esempio, nel modo di comunicare di due matematici affiatati: il loro linguaggio è spesso colorito e pieno di immagini, ma comunque ben lontano dal costituire una dimostrazione formale.

Proprio perchè le regole dimostrative sono sostanzialmente prefissate, lo stesso processo di scambio ha luogo anche nella mente di uno stesso individuo; la certezza di aver trovato la dimostrazione allora è il risultato del dialogo con un fantomatico interlocutore interno⁵², cioè è la coscienza di poter esprimere l'intuizione in una dimostrazione (infatti l'errore più frequente in matematica non è una dimostrazione sbagliata, ma un risultato insignificante). E per questo, infine, i due aspetti si mescolano nel processo dinamico interno tipico del matematico, un continuo passaggio tra intuizione e dimostrazione, in cui anche argomentazioni puramente formali possono indurre nuove comprensioni intuitive, oltre che il viceversa.

⁵¹Il senso di sicurezza e di potere che ne segue mi sembra una delle motivazioni più comuni e più profonde per cui una persona sceglie di fare il matematico.

⁵²Sarebbe interessante esaminare, a questo proposito, fino a che punto carta e penna, o gesso e lavagna, siano caricate di questo ruolo.

Mi sembra che nella prospettiva abbozzata molte questioni relative alle dimostrazioni possano trovare risposta; vediamone molto sinteticamente alcune. Innanzitutto, il luogo comune, in cui purtroppo cadono anche personaggi autorevoli, per cui la matematica è costituita solo da catene di tautologie: anche se si trascura la creatività del processo di definizione delle astrazioni e si assume che siano date ed immutabili, e anche se ci si limita ad un solo sistema assiomatico formalizzato (in cui quindi davvero le dimostrazioni sono catene di tautologie), resta il fatto che una dimostrazione porta alla coscienza ciò che prima è solo implicito, e quindi di fatto aumenta l'informazione (altrimenti, tanto varrebbe identificare l'informazione che può dare l'esecuzione di un programma con il suo listato, o addirittura un individuo in carne e ossa con l'uovo fecondato). Legare anche le dimostrazioni ad un processo dinamico permette di sciogliere l'incoerenza altrimenti insanabile (e infatti spesso sottaciuta) tra la cieca fiducia nelle dimostrazioni attuali e la loro innegabile evoluzione storica (lo stesso Hilbert, che più tardi teorizza il paradigma del formalismo, deve i suoi primi successi come matematico a dimostrazioni considerate pura teologia). Infine si capisce come il tenere presenti i processi mentali più interni eviti di confondere una dimostrazione con la sua espressione in un calcolo formalizzato, e quindi consenta un atteggiamento più articolato e flessibile ad esempio nelle questioni in cui è coinvolta la meccanizzazione delle dimostrazioni.

In conclusione, la base profonda della certezza e oggettività della matematica è la riduzione ideale ai meccanismi di massima fiducia come quelli della percezione e manipolazione di oggetti; un concetto è correttamente equiparabile ad un oggetto, e i ragionamenti a dimostrazioni, quando con il lavoro di astrazione si sono portati alla stabilizzazione tutti i diversi processi dinamici fin qui descritti. Solo allora ciò che si può esprimere esternamente aderisce perfettamente all'intuizione interna; e viceversa, ogni elaborazione interna può essere espressa formalmente (da questo punto di vista, la matematica è la scienza di ciò che è totalmente comunicabile). Solo allora la quantità di idealizzazione è sotto controllo e l'intuizione può passare in secondo piano, perché anche il puro gioco sulle formule non fa perdere il contatto con il contenuto reale e anzi può produrre nuova comprensione, portando alla coscienza aspetti impliciti nella definizione. Questa infine diventa davvero usabile e utile come uno strumento, applicabile alla realtà con la certezza che le previsioni siano adeguate (nei limiti dell'idealizzazione adottata).

Raggiungere questa situazione ottimale (e forse descritta troppo idealmente) è una conquista che richiede tempo e una grande mole di lavoro mentale, in quanto l'evoluzione del processo dinamico è lenta e faticosa (la grande varietà degli strumenti attualmente a disposizione non deve fuorviare: come per le specie attualmente viventi prodotte dall'evoluzione, sono rimasti solo i più adatti). Proprio per questo, è un lavoro creativo e un merito che solo un insano e spesso inspiegabile masochismo induce a svalorizzare o ad attribuire ad altri, nel momento in cui si riduce alla meccanica manipolazione di un dispositivo esterno (quando si concepisce l'esistenza come non-contraddizione formale) o alla scoperta di enti eterni (quando si postula un qualunque a priori). Solo se si realizza il fatto che l'esistenza degli enti matematici non è affatto gratuita o meccanica, si può apprezzare davvero il loro contenuto costruttivo e quali conquiste per tutta l'umanità essi siano.

E infine, per gli stessi motivi, si può sciogliere quella che talvolta è vista come *unreasonable effectiveness* della matematica. L'applicabilità, oltre che sorprendere, diventa irragionevole e incomprensibile solo se si dimentica tutto ciò che la precede e si vede soltanto il momento finale della deduzione, che allora si può apparire miracolosa come un raccolto o un guadagno gratuito. Al contrario, è prerogativa caratteristica del pensiero esatto (da *ex-igere*, cioè pretendere il dovuto), in particolare logico e matematico, svolgere pazientemente il lavoro di un processo dinamico (di tipo induttivo) per arrivare ad astrazioni tanto

stabili e adeguate, da poter poi riscuotere la ricompensa di previsioni affidabili con pure deduzioni; è la previdenza del lavoro di semina nelle definizioni che permette poi il raccolto delle applicazioni.

Ora è relativamente facile caratterizzare e analizzare i limiti delle tre scuole sui fondamenti della matematica in modo sintetico: come accennato all'inizio del paragrafo, del processo di formazione ciascuna teorizza un solo aspetto, che ora compare come una scorciatoia illusoria di cui sono evidenti gli inconvenienti e le conseguenze. Sarebbe inutile aggiungere altro; conviene tuttavia esplicitare alcune osservazioni generali, anche per mettere in luce ulteriormente, per contrasto, il punto di vista qui sviluppato⁵³.

L'intento del formalismo è di fondare la certezza della matematica soltanto su ciò che ha la stessa oggettività degli oggetti materiali; l'errore che mi sembra fatale, per quanto sottile (perché il non vedere la necessaria idealizzazione impedisce di poterla tenere sotto controllo), è concepire l'oggettività in sé, come parte delle cose stesse, che va colta senza alcuna partecipazione dell'individuo e della sua mente (vista per lo più come fonte di ambiguità), e che anzi va intesa come risultato della sottrazione di tutto ciò che non sia sensibile.

Il formalismo si può caratterizzare allora come il rifiuto sistematico a considerare come rilevante per la fondazione della matematica ogni riferimento all'intuizione, ovvero il tentativo di basare la certezza sulla soppressione di ogni momento del processo dinamico che avvenga solo all'interno della mente; da questo principio generale, più o meno esplicitamente enunciato, le varie tesi sostenute seguono comunque come corollario necessario.

Innanzitutto, volendo evitare di prendere in considerazione ogni processo interiore di comprensione, non resta che spogliare la matematica di ogni contenuto intuitivo e ridurla al solo aspetto che si può cogliere con i sensi, l'espressione formale (da cui il nome): ecco perché il primo atto della fondazione formalista è la riduzione a formule, intese come successioni di puri segni. Allora anche l'attività del matematico può emergere solo come manipolazione di formule seguendo regole di deduzione prefissate a partire da assunzioni date: ecco perché la matematica si deve ridurre a sistemi assiomatici formalizzati. Infine, senza poter far riferimento alla rielaborazione interna individuale, nemmeno il processo sociale di creazione può comparire, e quindi anche il criterio di esistenza non può che essere prefissato, puramente formale ed esterno: ecco perché nel formalismo l'esistenza è ridotta alla non-contraddittorietà sintattica di un sistema assiomatico.

Nel formalismo, in generale, di tutti gli aspetti del processo di astrazione viene considerata come rilevante solo la parvenza esterna: così gli oggetti matematici sono identificati con l'espressione che li indica (cioè le cose con i nomi), l'adeguamento alla realtà sostituito dalla consistenza formale del linguaggio, le dimostrazioni ridotte a derivazioni formalizzate. È chiaro che nemmeno il più radicale tra i formalisti potrebbe davvero operare in questo modo; ma anche abbracciando un atteggiamento solo genericamente formalista, un matematico finisce per trovarsi esposto a vari inconvenienti e a cadere ancor più pesantemente proprio in ciò che desidera evitare. Infatti, ritenendo che il rapporto con la realtà contenuto negli assiomi sia inesorabilmente conservato dalle dimostrazioni e che la corrispondenza tra intuizione e dimostrazione sia garantita una volta per tutte, nel caso di contrasto sarà indotto a sconfessare la propria intuizione a favore della conclusione di una deduzione logica; e allora inevitabilmente il divario tra le due si allarga sempre più. Infatti, da una parte, per poter dare comunque una presenza interna e sintetica alle dimostrazioni, l'intuizione è costretta a percorsi sempre meno visualizzabili e sempre più interni, dall'altra le deduzioni e il linguaggio formali assumono sempre maggior peso e quindi sempre più il potere di sostituire la realtà, invece che mostrarla.

⁵³Comunque rimando al mio *Alla ricerca...* per altre osservazioni e un'analisi più dettagliata, in particolare del programma di Hilbert.

L'esempio principale, è chiaro, è la ripetizione automatica e illimitata delle idealizzazioni della teoria degli insiemi classica, inizialmente almeno in parte motivate, senza più il freno delle immagini interne o l'adeguamento alla realtà; più in particolare, ad esempio, di fronte alla deduzione degli equivalenti formali più bizzarri⁵⁴ dell'assioma di scelta, che pure ha un chiaro contenuto intuitivo, invece che riflettere sulla combinazione di assunti che li genera, ci si forza a modificare l'intuizione.

A quel punto, l'ordine naturale - dal processo di astrazione alla creazione di oggetti e infine alla loro assiomatizzazione - può essere rovesciato, presumendo che comunque la pura non-contraddittorietà formale garantisca all'intuizione la possibilità di riempire i passi mancanti. Ma così il processo dinamico sociale, lasciando ciascuno libero delle proprie intuizioni in un modo che appare come tolleranza, in realtà facilmente può ridursi all'assopimento della coscienza e all'acquiescenza, piuttosto che portare alla crescita della conoscenza condivisa, avendo l'individuo perduto con la rilevanza della propria intuizione anche il proprio ruolo attivo, di tramite con la realtà e di rielaborazione individuale, nella costruzione degli universali.

Così inoltre, e paradossalmente, non si raggiunge l'efficacia dei meccanismi automatici di percezione interna degli oggetti e si finisce col cadere, anche senza saperlo o volerlo ammettere, nelle braccia della logica pura⁵⁵.

Infine è così che, un iniziale eccesso di realismo (per negare l'idealizzazione), basandosi sul miracolo dell'oggettività in sé, in realtà si propaga e si ingrandisce fino a degenerare in forti idealizzazioni senza più alcun controllo e può indurre a credere che davvero il linguaggio possa creare la realtà dal nulla⁵⁶.

Hilbert stesso in qualche modo avverte il pericolo e la debolezza intrinseca in questa posizione; ma invece che affrontare la questione, si propone di congelarla definitivamente. Infatti, pur avendo fiducia genuina solo nella concretezza di oggetti manipolabili (quella che Hilbert chiama matematica reale o finitaria, di gran lunga più restrittiva di ogni scuola costruttivista, proprio perché rifiuta ogni forma di idealizzazione, e quindi di vera astrazione) e negando ogni senso reale a gran parte della matematica (quella che chiama appunto ideale), programma di dimostrare all'interno della matematica reale che quella ideale non è irrealista, ovvero che la sua trasposizione nel linguaggio dei segni non è contraddittoria. Anche se questo programma fosse portato a termine (ma sappiamo che non lo sarà, per i teoremi di Gödel), non ci sarebbe alcun motivo per dover credere in blocco nella matematica ideale, non più comunque che nel coraggio di uno che solo a parole dimostra di non aver paura. Nonostante le prove dei teoremi di Gödel siano sotto gli occhi da oltre 60 anni, non è stato facile prima smascherare il tentativo di bloccare il processo dinamico, poi sbloccare l'ideologia del tutto o niente: non essendoci altro criterio di rilevanza che la non-contraddizione, o ci si salva nel Paradiso in cui ogni idealizzazione è possibile e diventa reale, o ci si dannava nell'Inferno delle mutilazioni di Brouwer. Ora almeno sappiamo che non è così.

In realtà anche Brouwer per altre strade cerca un paradiso; ma il fatto che egli abbia esplicitato chiaramente le proprie motivazioni filosofiche, ha permesso ai seguaci di prenderne distanza, di individuare più facilmente gli errori iniziali dell'intuizionismo, e quindi di prendere i provvedimenti per porvi rimedio. Per questo, e per altri motivi (tra cui il

⁵⁴Di cui qualche forma contrasta talmente con l'intuizione da essere addirittura chiamata paradosso, come quello di Banach-Tarski.

⁵⁵Questo di fatto è già accaduto in modo manifesto, ad esempio per alcune branche dell'algebra.

⁵⁶Il monito anticipatore di Enriques è durissimo: Ma l'uso di questo potente strumento [il linguaggio], che viene in aiuto alla debolezza del nostro intelletto, non è esente da pericoli. Prendendo il volo verso le alte regioni del pensiero, si corre il rischio di dimenticare il significato delle parole, che diventano vuote di senso appena che cessino di rappresentare le cose. Giunti a questo punto, nulla è più facile che operare formalmente sui simboli, mentre lo sviluppo del pensiero tendente alla generalità non trova più alcun freno nel mondo concreto a cui resta estraneo op. cit., p. 10.

fatto d'essere rimasto a lungo sostanzialmente solo una proposta minoritaria), non è possibile individuare un'unica visione dell'intuizionismo. Consideriamo quindi solo l'originaria impostazione di Brouwer, e solo per schemi sommari.

La vera conoscenza, secondo Brouwer, sta nell'introspezione; il rapporto con la realtà è visto tendenzialmente come un peccato di dominazione, sulla natura e sugli altri individui, da cui astenersi. Rifiutando un ruolo positivo a tutto ciò che è esterno all'individuo, il principio generale risulta la fiducia soltanto nelle libere costruzioni dell'intuizione; l'intuizionismo di Brouwer si lascia facilmente caratterizzare allora come la parte del processo dinamico che avviene all'interno di una mente individuale e quindi, in questo senso, il complementare del formalismo. Negando valore alla comunicazione, la matematica intuizionista rifugge dal linguaggio, visto come la fonte di deformazione, e si costituisce in costruzioni mentali del soggetto; ma negando valore anche alle applicazioni, l'adeguamento con la realtà può avvenire solo tramite un contatto diretto e mistico con la divinità. Non resta allora che concepire la matematica come elaborazione interna di un'intuizione primaria.

La storia e i fatti mostrano la fallacia delle tesi principali di Brouwer. Innanzitutto, la confutazione più chiara del suo solipsismo è il fatto che, bene o male, le sue proposte sono state capite e seguite; anzi, paradossalmente, l'approccio costruttivo alla matematica, certo non identificabile con, ma largamente influenzato dall'intuizionismo, si può pensare come basato sulla totale comunicabilità degli oggetti e dei metodi⁵⁷.

Nello stesso tempo, è proprio questa la chiusura troppo rigida in cui può cadere la matematica intuizionistica di fatto comunicata: pretendendo un'aderenza troppo stretta con l'intuizione, si ignora l'espressione di comprensioni parziali con il linguaggio e quindi si chiude lo spazio per il dialogo e la rielaborazione individuale. Anche nel chiuso di un individuo, infatti, lungi dall'essere solo un promemoria, l'espressione è una componente essenziale del gioco dinamico tra intuizione e dimostrazione, e rende libera la mente di seguire intuizioni più soggettive, e quindi creative. Per questi motivi Heyting ha fatto bene ad esprimere la logica intuizionistica in un sistema formale; e per gli stessi motivi, più in generale, ogni matematico, anche se intuizionista dichiarato, di fatto conosce e si ispira anche alla matematica classica (se non altro per sapere cosa può aspettarsi e cosa no).

La fondazione intuizionista, non essendo, contrariamente al formalismo, basata su alcun programma predeterminato, si è dimostrata più flessibile, tanto da trovare negli ultimi anni nuove e inaspettate motivazioni. Forse per questo ora lo scontro tra le due scuole sui fondamenti non è più frontale, e anzi il processo dinamico sembra nuovamente in moto. Rimane tuttavia il dubbio che, se Brouwer e Hilbert, intesi proprio come persone, fossero stati educati ad essere più tolleranti, si sarebbe forse risparmiato lo spreco di qualche decennio di inutile guerra fredda.

La terza scuola, il logicismo, da tempo non ha alcun seguito tra i matematici; ma è naturale che sia così, dato che semplicemente ignora il lavoro di definizione reale delle astrazioni matematiche, riducendole a definizioni nominali interne alla logica, e senza offrire come controparte un'ambito in cui operare facilmente. In altre parole, nel processo dinamico il logicismo confonde il fine, la creazione di strumenti affidabili, con uno dei mezzi, la logica, che inoltre considera come data a priori senza alcuna reale giustificazione.

Oltre alle tre scuole, anche la proposta più interessante degli ultimi anni, cioè il tentativo di fondare la matematica sulla teoria delle categorie, sembra una scorciatoia, o una strada non ancora agevole per tutti. Infatti, qualunque siano le motivazioni filosofiche del principale ispiratore W. Lawvere, il risultato è un linguaggio certamente ricco ed espressivo, ma che

⁵⁷Constructive objects derive their importance from the fact that they are the only objects which we can communicate to each other in complete detail. In particular, if we are to be sure that two mathematicians who consider a certain mathematical object have the same object in mind, then this object must have been defined constructively. P. Martin-Löf, *Notes on constructive mathematics*, Stockholm 1970, p.17.

per la complessità tecnica resta ancora slegato sia da contenuti più direttamente intuitivi sia dalla pratica della matematica (dove infatti le categorie sono entrate per lo più solo come strumento aggiuntivo).

2.5 Verso un'ecologia della conoscenza matematica.

La conclusione principale di questo lavoro si esprime sinteticamente in un'osservazione fin troppo semplice: è l'umanità stessa che produce, in un processo dinamico, tutte le astrazioni che usa per conoscere la realtà. In particolare, siamo noi stessi che creiamo anche le astrazioni e gli strumenti della matematica, che poi consideriamo così certi e affidabili; in questo senso, il vero fondamento, la fonte ultima della certezza sta in noi stessi. Non ci si può aspettare allora una definitiva quarta via ai fondamenti della matematica, né altre verità a priori o certezze assolute; l'unica certezza mi sembra semmai, paradossalmente, l'assenza di verità assolute e l'ineluttabilità del processo dinamico nella natura, quindi nella conoscenza umana, e quindi infine nei fondamenti della matematica.

Tuttavia lo scopo non è fermarsi a meditare passivamente su questo dato di fatto, lasciando così che le cose accadano come capita; al contrario, il punto di vista qui sviluppato può fornire la base per un atteggiamento globalmente nuovo nei confronti della matematica, in cui la perdita della certezza assoluta non sia vissuta come un dramma da scongiurare ma una liberazione da gabbie ideologiche che rilassa e apre il campo a prospettive più aperte e flessibili, e il punto di partenza per la conquista di certezze umane. Più che conclusioni, quindi, in questo paragrafo cerco di illustrare, in modo molto schematico e frammentario, cosa mi sembra di intravedere come continuazione e come l'esame del processo dinamico di astrazione possa fornire qualche suggerimento, anche di lavoro specifico.

Innanzitutto, accettare la presenza stessa del processo dinamico in ogni forma di conoscenza è rilassante anche in un senso scientifico, in quanto può evitare tensioni e perdite di tempo inutili, indicando quali strade sono chiuse; infatti, mi sembra che spesso l'origine di un insuccesso sia il tentativo di trascendere o bloccare il processo stesso, considerando il soggetto che conosce come estraneo o superiore. Così è ad esempio per molti paradossi. Usualmente, essi danno luogo a vere contraddizioni sole se in un modo o nell'altro si idealizzano a tal punto le astrazioni coinvolte da attribuire loro un'esistenza assoluta, e alle parole la facoltà di creare o individuare comunque una nuova realtà. Anche la presenza di un paradosso, quindi, più che un dramma è una fortuna: ha la funzione di indicarci, come un risultato di impossibilità, un limite da porre alle idealizzazioni coinvolte. Per questo può essere controproducente cercare di estirparlo o espellerlo ad ogni costo e subito, perché il prezzo può diventare allora una idealizzazione ulteriore, più che una vera comprensione. Non possiamo illuderci di evitare la circolarità, che è ovunque; la soluzione più adeguata passa comunque attraverso la coscienza.

È da questa prospettiva che la meta di una fondazione definitiva si rivela come un miraggio illusorio. Se il processo non può essere trasceso, non può esserci nemmeno un punto fisso di cui bearsi e da cui godersi compiaciuti il panorama; ovvero non può esistere una teoria chiusa così comprensiva da formare un'unica piattaforma galleggiante nel mare del dubbio e del movimento e su cui poggiare tutta la conoscenza espressa dalla matematica. E se non si condividono queste considerazioni in generale, e si ignora l'evoluzione della storia, non si può tuttavia dimenticare che agli stessi problemi, connessi con l'autologia, nel caso di teorie formalizzate Gödel ha dato la forma di teoremi. La stessa ricerca sui fondamenti si inserisce quindi in un processo dinamico senza fine, in cui ogni teoria è solo uno stadio parziale, e deve comunque lasciare spazio all'evoluzione. In questo senso anche come matematici, e in particolare studiosi dei fondamenti, siamo più liberi: non c'è alcuna delega, né alla

matematica in generale, né ai fondamenti al suo interno, del compito di fornire la fonte ultima di ogni certezza.

L'assenza di un criterio o di una meta prefissati, nel momento stesso in cui ci rende più liberi, ci rende anche più responsabili. Infatti, quando si realizza che anche la matematica è una creazione esclusivamente umana, ci si rende conto come essa sia frutto di scelte e non di necessità eterne o di un progresso inarrestabile verso una meta; di queste scelte siamo noi stessi gli unici responsabili, e quindi liberi di mantenerle o modificarle. L'esame dei meccanismi alla base del processo dinamico ci mostra come la matematica non sia costituita da un'unica sostanza incorruttibile, ma da diversi ingredienti umani, più o meno degradabili, da mescolare in modo opportuno; e inoltre che i risultati non hanno un'esistenza eterna, ma che dipendono dalla nostra volontà di tenerli in vita. Uno degli ingredienti indispensabili per la formazione delle astrazioni è l'idealizzazione; ma una idealizzazione non consapevole può trasformarsi in verità assoluta, che si sovrappone alla realtà più che aiutarci a conoscerla, che ci fa seguire strade obbligate più che orientarci. In altre parole, un'idealizzazione può facilmente risultare un fattore inquinante, più che un aiuto alla conoscenza. Se si equipara la produzione di strumenti matematici all'intervento dell'uomo, e l'ambiente culturale all'ambiente naturale, la proposta positiva è allora di acquistare maggior coscienza e sensibilità per i problemi di ecologia epistemologica.

Come per l'ecologia umana in generale, l'attenzione al problema è un passo necessario, ma non basta per riuscire a vedere quale possa essere una soluzione globale, e anzi dà luogo a diverse posizioni; anche su casi più specifici non sempre è facile trovare l'atteggiamento più ragionevole ed equilibrato. Ad un estremo, è ovvio ad esempio che l'idealizzazione dei numeri naturali è così utile, adeguata, innocua e ormai connaturata all'uomo che, come per i vestiti, è insensato proporre di astenersene. Ma l'altro estremo non è altrettanto facile da identificare, perché ben poco si conosce dell'impatto che le varie teorie ed astrazioni matematiche, anche quelle oggi ormai più comuni, possono avere sull'ambiente culturale.

La proposta diventa allora in primo luogo di sospendere la delega incondizionata alla logica classica e ai principi di base dell'usuale teoria degli insiemi e dedicare maggiori risorse allo studio di quali siano le idealizzazioni e i principi implicitamente assunti e quali tra essi siano davvero necessari per gli scopi perseguiti, in modo da poter valutare in ogni momento fino a che punto i risultati specifici siano adeguati e in armonia con la realtà e l'intuizione e quanto invece siano una forzatura artificiale e inutile. In altre parole, mi sembra che si dovrebbe arrivare a conoscere più a fondo in che misura sono affidabili gli strumenti che adoperiamo, cercare di tenere il più possibile collegate tra loro intuizione e dimostrazione formale, e far emergere il contenuto costruttivo e intuitivo delle astrazioni coinvolte, che è comunque presente; in sintesi, essere il più possibile consapevoli di volta in volta di cosa stiamo facendo.

Buona parte della ricerca sui fondamenti della matematica si può rileggere in questo senso, più che nella ricerca di fondazioni ultime; si vede allora quanti metodi e teorie siano stati già sviluppati e impiegati a questo scopo e, come per il risparmio energetico, quante idealizzazioni siano evitabili senza perdita di efficacia semplicemente con un po' di attenzione alla costruibilità. Mi sembra tuttavia che anche lo spartiacque tra cosa debba intendersi come costruttivo e cosa no non possa essere prefissato da un criterio esterno, da un sistema a sua volta formale, e che anzi cogliere il contenuto costruttivo di un'astrazione comporti comunque un coinvolgimento della coscienza individuale. Questo si osserva ad esempio nel fatto che ciascuna delle tre scuole sui fondamenti mentre da una parte analizza in dettaglio il concetto di numero naturale, dall'altra assume come primitiva, e senza nemmeno menzionarla, la capacità di riconoscere un segno, che non è meno elevata e complessa della capacità di contare. Si può pensare allora di estendere il concetto di costruttivo fino ad includere anche

quelle astrazioni che, come le figure geometriche, pur se basate su una forte idealizzazione, hanno un contenuto intuitivo che di fatto risulta totalmente comunicabile, anche se non si riesce ad esplicitare fino in fondo il perché.

In altri termini, mi sembra che non ci si debba porre come scopo di limitare al massimo le idealizzazioni, ma piuttosto di renderle consapevoli, e quindi mantenerle sotto controllo e conoscere fino a che punto possono essere adoperate con la sicurezza che non tradiscano le intuizioni iniziali; metaforicamente, non si tratta di abolire ogni forma di inquinamento, dalle automobili alle centrali nucleari, ma di ciascuna saper controllare la potenziale pericolosità.

Ad esempio, se da un lato è del massimo interesse conoscere quali teoremi dell'analisi matematica sono derivabili in un dato approccio costruttivista, dall'altro non ha senso chiedere che si abbandoni l'usuale definizione classica dei numeri reali; infatti, pur se basata su una forte idealizzazione, equivalente al passaggio dall'insieme dei numeri naturali N all'insieme potenza PN , essa risulta uno strumento affidabile e con un contenuto intuitivo abbastanza chiaro, confermato dalla categoricità rispetto alla logica del secondo ordine.

Questo non significa tuttavia che la stessa idealizzazione, il passaggio da un insieme X all'insieme potenza PX , possa essere astratta dal contesto e ripetuta senza limite; anzi, già la seconda ripetizione porta ad un'astrazione, l'insieme degli insiemi di numeri reali, così poco controllabile che l'esistenza di insiemi di numeri reali con certe proprietà equivale classicamente ad assunzioni che coinvolgono tutta la gerarchia cumulativa degli insiemi. A fortiori, se tale idealizzazione viene ripetutamente combinata con altre. In generale, se nella valutazione della teoria classica degli insiemi si include anche il prezzo dell'inquinamento dovuto a idealizzazioni incontrollate (appiattimento della gerarchia delle astrazioni, mancanza di immagini univoche e di connessione con la realtà, accordo puramente formale,...), mi sembra che il costo non risulta ripagato dal guadagno di applicazioni e di conoscenza pulita.

Più che cercare di sostenere ad ogni costo le teorie e le idealizzazioni introdotte, si dovrebbero allora impiegare maggiori risorse e sostegno anche alla ricerca di fonti di conoscenza alternative (intuizionismo, teoria dei tipi, logica a molti valori, teoria dei topoi,...). L'esame del processo dinamico di astrazione indica alcune incrinature nell'apparente compattezza di alcune idealizzazioni di base, e suggerisce alcune possibili linee di sviluppo futuro.

Il postulato di esistenza dell'insieme potenza sembra basato su un'idealizzazione eccessiva della seguente osservazione positiva: non c'è limite alla libertà umana di operare astrazioni, cioè di concepire connessioni e proprietà per raccogliere e isolare un gruppo di individui. Ma abbiamo visto che un'astrazione nasce per poter governare una situazione più complessa; un'idea allora è concepire PX come formato soltanto da quei sottoinsiemi U che siano identificabili in un modo più semplice (in un senso da definire opportunamente) rispetto ad una lista di tutti gli elementi. È mia impressione che con un simile criterio sarebbero esclusi sostanzialmente solo quei sottoinsiemi patologici utilizzati per studiare l'usuale idealizzazione di PX stesso.

Nemmeno in matematica sarà mai possibile verificare realmente un numero infinito di casi; considerata dall'esterno, quindi, ogni quantificazione universale non può essere che una deduzione o un'aspettativa. Questo d'altra parte concorda con l'uso naturale di per ogni e tutti; dicendo tutte le mele sono buone si intende di fatto ogni oggetto a cui associa il concetto mela risulterà buono e quest'ultima, all'interno della mente, non può che essere una deduzione basata sul concetto interno di mela. È l'astrazione quindi che permette di trasformare induttivamente un certo numero di esperienze in un concetto, e poi di esprimere con una quantificazione universale un'aspettativa come deduzione⁵⁸. In matematica, se un

⁵⁸Questo sembra trovare conferma in neurofisiologia sperimentale; vedi la relazione di V. Braitenberg al congresso.

concetto è generato dalla ripetizione di regole fissate, come i numeri naturali o le formule di un linguaggio formalizzato, la quantificazione si riduce semplicemente ad una proprietà delle regole; anche negli altri casi è una simile deduzione? Forse è questa una strada per affrontare i problemi fondazionali ancora aperti sulla quantificazione universale.

Comunque, mi sembra questa, piuttosto che la ricerca di una forma computazionale coerente di un calcolo logico non-monotono, la strada più sensata per affrontare un problema ben noto nel campo dell'intelligenza artificiale. Infatti, se si trova una mela cattiva, semplicemente si dovrà cambiare il concetto di mela, non quello di logica; al contrario, è proprio l'applicazione della solita logica che permette di esplicitare la contraddizione, e spinge a modificare il concetto. Così la soluzione cercata sembra non tanto una nuova logica, quanto un formalismo in cui l'interpretazione dei predicati sia dinamica, e modificata dall'aumento di informazione, ottenuta per acquisizione di nuovi dati o per la realizzazione di nuove deduzioni.

Forse la teoria matematica per affrontare quest'ultimo problema è già disponibile; infatti, una delle idee ispiratrici della teoria dei topoi è proprio quella di insieme, e quindi anche di predicato, variabile. Più in generale, allora, mi sembra aperta e molto interessante la possibilità di collegare la teoria dei topoi più direttamente con i risultati di questo lavoro sul processo dinamico di astrazione.

Una maggior attenzione all'equilibrio ecologico mi sembra auspicabile non solo all'interno, nel modo di concepire la matematica, ma anche nel modo di produrla, di insegnarla e nei suoi rapporti con altre discipline. Come supporre di poter misurare ogni cosa esclusivamente in termini monetari impedisce di tener conto dello sfruttamento dell'ambiente naturale, così in matematica la valutazione solo nei termini rigidi e quantitativi di produzione di nuovi teoremi, rende problematico valorizzare il lavoro di confronto, connessione e unificazione delle conoscenze tra loro e con la realtà. A maggior ragione si dovrebbe usare più cautela nel produrre nuove strutture, perché come abbiamo visto i metodi di produzione della matematica danno risultati più stabili e duraturi, cioè più difficilmente degradabili culturalmente, soprattutto se contengono idealizzazioni che, come la plastica, sono più facili da produrre che da digerire. Per questo, e per la gran quantità di energia richiesta per digerire anche individualmente un prodotto matematico, per comprendere e separare l'utile dalle scorie, è importante il lavoro di unificazione, di rassegna, di collegamento tra campi diversi: infatti, una struttura inglobata in altre davvero più stabili e più adeguate, è come riciclata, e si può subito dimenticare.

Ma ancora maggiore è la responsabilità della matematica verso le altre discipline e la cultura in generale; infatti, gli eventuali inquinamenti dovuti alle idealizzazioni nate in matematica, di fatto considerata spesso il paradigma della certezza, il cuore della scienza, si propagano alle altre scienze e a tutto il sapere. La liberazione dall'incubo della certezza assoluta può risultare allora conveniente per tutti; non conviene più concepire la matematica come un organismo provvisto di corazza esterna per difendere un interno molle, come in un crostaceo, o inesistente, come in Agilulfo, ma piuttosto come provvista di un solido scheletro interno, formato dalla coscienza di un arsenale di metodi costruttivi. Liberati dal compito di difendersi, o specularmente di dominare matematizzando le altre discipline, si può vedere a rovescio come proprio le esperienze nate nel laboratorio apparentemente isolato della matematica, e in particolare nello studio dei fondamenti - ad esempio la compresenza di logiche diverse ma collegate tra loro, la distinzione di vari gradi di costruttività e di infinito, i risultati di impossibilità - possano essere esportate come idee che contribuiscono alla comprensione dell'uomo, della sua mente e del suo mondo.

Capitolo 3

Matematica, logica e verità, verso un risanamento

È importante dedicare energia alla riflessione sui fondamenti della logica e della matematica, in quanto logica e matematica sono utilizzate come costruttrici di verità in tutta la scienza, e concezioni diverse possono avere conseguenze concrete molto diverse.¹ Tuttavia oggi discutere di matematica, logica e verità significa usualmente presentare una variazione sui temi fissi della filosofia della matematica del nostro secolo, e molto spesso rimanendo all'interno della concezione classica. Naturalmente, anche all'interno della concezione classica molti problemi restano da discutere; ma se non si conserva un atteggiamento critico e si mantiene la base come indiscutibile, nel momento in cui semplicemente la si tace, non si può che rimanere alla superficie, e si finisce per celebrare un rito, o ripetere un cliché, per quanto difficile da eseguire o da spiegare.

Non è questo che intendo fare. Non appena si lasci aperta la possibilità di discutere davvero anche le assunzioni di base, subito si vede come il dibattito acquisti un senso davvero nuovo. È un po' come in economia per i concetti di libera iniziativa, produzione e benessere non appena si veda oltre le leggi del mercato; così per matematica, logica e verità c'è ancora molto da comprendere e da discutere non appena si superino i confini della concezione classica, e si veda la possibilità di concepirle in modo diverso.

In sintesi, voglio illustrare in che modo la concezione classica si è ormai trasformata in una gabbia e sostenere l'opportunità di creare lo spazio per una visione "post-classica" in matematica e in logica; voglio anche ricordare come questo sia possibile molto in concreto, più facilmente di quanto comunemente ci si aspetti. Una riflessione così aperta forse risulta contraria alla tendenza di oggi, che sembra rinunciare, per l'economia come per logica e matematica, alla discussione sulle concezioni di base. Questa è comunque la prospettiva che assumo.

Nella concezione classica la matematica è intesa come riconducibile - sia come fondazione concettuale e tecnica, sia come spirito - alla teoria assiomatica degli insiemi. La formulazione di Zermelo e di Fraenkel, con l'aggiunta dell'assioma di scelta, è quella adottata come base standard dalla massima parte dei matematici; d'ora in poi, come usuale, la indicherò con ZFC. Lo spirito di ZFC è di considerare come esistente ogni ente matematico che non sia impossibile, cioè che non porti a contraddizioni; in particolare, l'infinito è concepito come attuale. In uno slogan: tutto quello che non è vietato concepire, non solo è costruibile,

¹Ringrazio Giancarlo Pretto, Paolo Sambin e Francesco Valfré per l'aiuto che mi hanno dato, in varie forme, nella stesura di questo scritto.

ma è già costruito, esiste già. Questo è quindi anche lo spirito alla base della matematica moderna, nella sua veste ufficiale.

E infine la verità. Quando se ne parla, è intesa come mancanza di contraddizioni e completamente descritta dalla definizione di Tarski di verità delle interpretazioni per linguaggi formalizzati. L'esempio standard è: "la neve è bianca" è un enunciato vero se e soltanto se la neve è bianca. Un esempio così frequentato che ormai la neve risulta un po' ingrignata...

Una descrizione così breve non può essere esauriente; è comunque sufficiente per identificare le concezioni di matematica, logica e verità a cui intendo riferirmi. Il legame tra di esse è così stretto che l'una è quasi necessaria per sostenere le altre due, e quindi d'ora in poi mi riferirò ad esse globalmente come "la concezione classica".

La massima parte della matematica prodotta nel nostro secolo è basata sulla concezione classica, e una parte considerevole lo è in modo ineliminabile. La concezione classica, ancora oggi accettata senza discussione dalla stragrande maggioranza dei matematici, trova consenso principalmente per la sua semplicità concettuale e la sua apparente "potenza". La si considera una verità scontata. Quindi si considera vero ed esistente, senza ripensamenti, anche tutto quello che da essa si deduce, in particolare tutte le conseguenze ottenute dagli assiomi di base per mezzo della logica classica.

Semplicità e "potenza" hanno tuttavia un prezzo. Non sempre l'intuizione segue la verità ufficiale, prodotta per deduzione dagli assiomi di ZFC, e si arriva a risultati paradossali, ovvero a vere e proprie assurdità rispetto al comune buon senso. Un esempio significativo, ma assolutamente non l'unico, è il paradosso-teorema di Banach e Tarski. Consideriamo due regioni finite dello spazio, ad esempio una pallina da golf e il pianeta Terra. Il teorema di Banach-Tarski dice che è possibile dividere la palla da golf in un numero finito di parti, e poi spostare queste solo con rotazioni e traslazioni, quindi senza alcuna deformazione, fino a rimetterle assieme per formare il pianeta Terra.² Un paradosso, o meglio: una follia. Ma è un teorema dimostrabile, come tutti gli altri teoremi della matematica, nella teoria assiomatica ZFC!

È imbarazzante. Così imbarazzante che ho ritenuto doveroso dissociarmi apertamente da almeno vent'anni e considerare la ricerca di un fondamento ancora sostanzialmente aperta. Mi sembra inaccettabile mantenere come non ricomponibile un simile distacco tra intuizione e deduzione. Quale diventa la fonte ultima della certezza se il legame con la realtà viene meno? Usualmente si accettano questi risultati paradossali pur di non dover ripensare alle assunzioni di base e mantenere logica classica e ZFC, con gli apparenti vantaggi. Ma l'imbarazzo è solo soffocato, non risolto. Ricompare nell'ambiguità della stessa dizione comune, paradosso - piuttosto che teorema - di Banach-Tarski, o individualmente nelle risposte, talvolta più emotive che razionali e pertinenti, suscitate quando si ricordano queste difficoltà. Peccato. Anche io vorrei non avere dubbi sui fondamenti; anzi, è proprio questa la motivazione che mi spinge a riflettere, e che cerco di seguire come principio.

Come è possibile che nella matematica d'oggi risultino dimostrabili 'follie' così in contrasto con la realtà? Come è diventato possibile un simile prolungato divario tra intuizione e certezza scientifica ufficiale? E soprattutto, quale può essere una via d'uscita? Le risposte che mi sembra possibile vedere non sono solo interne alla matematica, come oggi è intesa. La frattura da sanare non è solo un problema di coerenza individuale dei matematici. Il problema vero è che lo stesso fenomeno di distacco dall'intuizione si propaga dalla matematica a tutte le scienze e alla cultura in generale. Si assume senza esitazione che la matematica goda di rigore scientifico assoluto, e che anzi costituisca la fonte stessa della certezza. È molto rara la consapevolezza, ad esempio anche nello studio dei fondamenti della fisica, di quale significato concreto sia prodotto dalle assunzioni metafisiche implicite nella matematica e

²Vedi S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge U. P., 1985.

nella logica classica. Ma questo è comprensibile: se la matematica sta al cuore della scienza, è compito dei matematici renderla sana e affidabile quanto possibile, e mettere in guardia sulle assunzioni, implicazioni e controindicazioni, o effetti indesiderati.

Questo è il motivo profondo per cui penso sia doveroso riflettere a cuore aperto sui fondamenti della matematica. Dopo circa un secolo di dominio della concezione classica, penso sia tornato il momento di chiederci: che cos'è la matematica? E che cos'è la logica? E infine anche: che cos'è la verità? Naturalmente, per poterlo fare senza ricadere in risposte precostituite, si deve essere disposti ad abbandonare i convincimenti che non hanno vero fondamento. Ad esempio, è da abbandonare l'idea diffusa, anche tra i matematici e nonostante lo sviluppo storico mostri tutt'altro, che la matematica debba essere una sola, un tutt'uno inscindibile da prendere o lasciare, tutto o nulla, uno o zero. Sostenere che la concezione classica non è un assoluto, ad esempio rifiutando la logica classica e qualche assioma di ZFC per evitare i paradossi, non significa rifiutare anche che $2 + 2$ è uguale a 4 (o che $7 + 5$ è uguale a 12 , come preferiva Kant).

Non è la matematica in sé da respingere, se non altro perché, per coerenza, questo dovrebbe legarsi ad un rifiuto dei vantaggi della tecnologia, che proviene dalla scienza occidentale basata sulla matematica. La disciplina dei "conti" (ovvero calcoli e deduzioni nel lessico familiare dei matematici) fa bene, soprattutto se presa con moderazione. Quello che può far male, e diventare distruttivo, è arrivare a considerarla come una droga, ovvero come un apparato ideologico rigido che si assume senza più discutere, e che di fatto non si lascia discutere ad altri, con l'alibi di complessità tecniche diventate inevitabili. Lo scopo ultimo è una visione più aperta e dinamica, che non soffochi l'emergere di nuove strutture, e di cui la concezione classica potrebbe risultare un caso limite, statico.

Matematica e logica dovrebbero essere pensate come disciplina per l'organizzazione coerente dei concetti, e quindi anche come strumento flessibile per le applicazioni, piuttosto che come braccio secolare di una verità istituzionalizzata.

Matematica e logica restano due strade maestre nella ricerca di verità (due strade così legate tra loro che secondo alcuni, in realtà, la strada è una sola): ricerca di verità intesa come spiegazione del mondo, e di che cosa siamo noi, e infine anche del perché in questo mondo siamo. Non possiamo farne a meno.

Per spiegare ogni cosa, all'inizio c'erano i miti, e molti dei. Dai miti si è passati al monoteismo; da tante verità, ad una sola verità. Tanti miti, tanti dei, tante verità; un Dio, una verità, *la* verità. Una verità unica, soprattutto se in nome di una verità o di una ragione d'ordine superiore, lenisce il senso di impotenza, e la sofferenza, di fronte alle molte verità, i capricci degli dei. Ed offre inoltre un grande vantaggio pratico per la comunicazione, svolgendo un ruolo in qualche modo analogo al diritto per l'organizzazione sociale e alla moneta unica per l'economia.

Così anche nella scienza *una* verità, quella della matematica. Anche all'interno della matematica, per poter comunicare con la certezza di intendersi, ci deve essere una verità, cioè si debbono adottare dei principi di base. Alcuni principi logici o insiemistici, come il principio del terzo escluso o l'assioma per cui tutti i sottoinsiemi di un dato insieme formano ancora un insieme, sembrano tanto semplici, intuitivi e affidabili da poterli assumere senza preoccupazioni. Con il crescere del consenso su di essi, si arriva a considerarli in modo rigido, fino a farli diventare una verità "oggettiva". Ma paradossalmente, proprio nel momento in cui si cerca di astrarre la verità dalla partecipazione dei soggetti per renderla oggettiva, succede che la verità si riduce letteralmente ad un oggetto, che esiste di per sé ed esterno a noi. A quel punto la verità invece che una corretta spiegazione delle cose, diventa essa stessa una cosa, non è più una verità, è morta come un oggetto.

Ad una verità morta si arriva abdicando all'intuizione, delegando senza revoca ai principi

il compito di costruire la verità al posto nostro. Qualunque cosa i principi restituiscano, nella forma di conseguenze formali o “oggettive”, deve essere considerata vera, indipendentemente dalla realtà. Ma una volta fatto un tradimento a se stessi abdicando, è molto difficile tornare indietro e riconoscerlo; anzi, la tendenza diffusa è di ripeterlo in continuazione, allargando il divario al punto da renderlo non ricomponibile.³ Anche se passo dopo passo le singole incoerenze sono quasi impercettibili, lunghe catene di deduzioni producono un allontanamento vistoso dall’intuizione. Ed è così che si arriva a giustificare le “assurdità”: la massa delle piccole incoerenze locali e abdicazioni individuali produce le aberrazioni di verità oggettive in un mondo artificiale e staccato dalla vita, vero come una rosa di plastica.

In poche parole, si blocca il continuo processo dinamico che istituisce il legame tra principi e realtà, e che rivede i principi man mano che le loro conseguenze si dimostrano inadeguate alla realtà. L’ordine concettuale è rovesciato: non più principi assunti fintanto che riconosciuti come veri, ma verità come tutto ciò che segue dai principi. La necessità dei principi per organizzare la conoscenza, diventa una necessità *tout court*, una ideologia immobile che sostituisce la realtà.

Quando i principi non si discutono più, cominciano i problemi. È come star fermi ad un semaforo rotto sul rosso. Oppure è come un medico che dica: “quel paziente è refrattario alla mia terapia”; invece che: “non ho la terapia giusta per quel paziente”. Oppure, nell’analogia con l’economia, è come arrivare alla folle conclusione che lo spreco dell’acqua è inevitabile, dato che l’acqua costa così poco. Ma perché costa poco? Non sempre si riesce ad assumere la prospettiva adatta per poter osservare un semplice dato di fatto: sono le leggi del mercato che non riescono a dare il giusto prezzo al valore dell’acqua. La fissazione nell’errore dal punto di vista della logica è una perversione: per mantenere comunque la verità delle assunzioni (nel caso specifico, il fatto che prezzo di mercato e valore debbano coincidere) ci si costringe a seguire il legame logico nel verso sbagliato. È una scelta; se proprio deve essere qualificata, è una scelta politica, e non logica. Similmente per la matematica: quando ci si trova in una situazione di attrito, come nel caso del paradosso di Banach-Tarski, conviene riflettere a fondo prima di concludere che inevitabilmente è la nostra intuizione che deve piegarsi alle deduzioni della matematica classica.

Tutta la questione sui fondamenti, che serpeggia da quasi un secolo, si riduce alla fin fine proprio a questo, una alternativa molto semplice: o si abbandona l’intuizione, o si abbandona ZFC e la logica classica. La stragrande maggioranza dei matematici non trova il coraggio di abbandonare ZFC e finge di non vedere. Ma allora è costretta ad abbandonare l’intuizione; e così è, infatti.

Il fatto che questo atteggiamento dia luogo ad una serie illimitata di vere e proprie assurdità non è considerato motivo sufficiente per rinunciare ai vantaggi della stabilità forzata e rivedere i principi. A mio parere,⁴ il motivo storico per cui ci si trova in una fase di tale rigidità, che solo ora comincia ad allentarsi, è che la fase creativa ma turbolenta della “crisi dei fondamenti” (come ormai si chiama il periodo seguito all’emergere dei paradossi della teoria degli insiemi all’inizio del secolo) ha dato luogo ad una reazione dettata principalmente dalla paura. Ora tale reazione non ha più motivo, è in gran parte solo inerzia ideologica (e infatti, tecnicamente basterebbe rivedere solo alcuni principi). Penso che oggi sia possibile affrontare la questione dei fondamenti con più serenità e raddrizzare la prospettiva. Piuttosto che concludere affrettatamente: “povera realtà, non si adegua docilmente a ZFC, che peccato”,

³Vedi A. Gruen, *Der Verrat am Selbst. Die Angst vor Autonomie bei Mann und Frau*, Deutscher Taschenbuch, 1986, trad. it. *Il tradimento del sé. La paura dell’autonomia nell’uomo e nella donna*, Milano, Feltrinelli, 1992.

⁴Come ho sostenuto, con più dettagli, in *Alla ricerca della certezza perduta (forma contenuto nei fondamenti della matematica)*, Seminari di scienze n. 9, Istituto italiano per gli studi filosofici, Napoli, s.d.

come sembrano di fatto affermare molti matematici, dopo averci riflettuto molto a lungo, preferisco dire: “povera ZFC e povera concezione classica, sembravano ben congegnate all’inizio, e invece in fondo sono così rigidamente idealizzate da produrre errori come lo spreco dell’acqua, ovvero come il paradosso di Banach- Tarski, che stride così macroscopicamente con la realtà e con l’intuizione. Che peccato.”

Chiaramente, l’alternativa non è semplice, ma possibile. Si tratta di identificare e modificare i punti che sono responsabili delle conseguenze indesiderate, conservando quanto più possibile i successi. Questo è un compito in parte ancora da svolgere. Ma il fatto di non trovare subito un’alternativa completa non significa che la concezione attuale sia giusta e che si debbano mantenere le cose come stanno. Per poter andare oltre, è indispensabile attraversare un po’ di ignoto. Per l’economia, non so come si possano superare le leggi attuali, ad esempio per poter assegnare il giusto valore all’acqua. Ma per logica e matematica un’alternativa in realtà è già chiaramente visibile, e anzi in parte già sviluppata. Il cambiamento è concettuale, oltre che tecnico.

C’è un solo modo, a mio parere, per andare oltre la concezione classica e sviluppare un’alternativa: dato che la verità nel senso classico è stata bloccata, si tratta di sciogliere il blocco, cioè rimettere in moto il processo dinamico, il movimento di adattamento tra l’intuizione della realtà e la verità dedotta dai principi. Affinché ci possa essere un movimento, ci deve essere lo spazio che lo consenta. Dato che nella concezione classica si presume che lo spazio sia tutto occupato, da una parte il vero, dall’altra il falso e nulla in mezzo, qualcosa si deve demolire. Il rifiuto della concezione puramente bivalente della verità è quindi l’unico modo per creare lo spazio che rende possibile il cambiamento.

Questo significa accettare che certe proposizioni non sono né vere né false. In termini psicologici, l’aspettativa che ogni cosa debba essere comunque classificata o come vera o come falsa, è una idealizzazione del senso di onnipotenza della prima infanzia, che proietta sul mondo la dualità bene-male, o utile-nocivo, e tutto deve essere deciso e sotto controllo. L’unico modo per crescere, è accettare la realtà, e la prima realtà dei fatti è la perdita dell’onnipotenza. Quindi accettare l’impotenza è l’unico modo per crescere, e quindi infine accettare l’impotenza è l’unico modo per accettare l’impotenza. La difficoltà sta appunto nel fatto che non c’è via di mezzo: una soluzione puramente intellettuale, pensare di accettare l’impotenza, non ha alcun effetto positivo, anzi, rende il compito ancora più complesso. Questo è un esempio rilevante di una situazione in cui il passaggio ad un punto di vista o livello di riferimento superiore non porta alcun cambiamento. Dato che nella concezione classica si teorizza una verità prestabilita, a qualunque livello di riferimento, finché si creda nella logica classica non si può vedere il modo di uscirne.

Poiché di fatto il mondo non è sotto controllo, né diviso in due, per poter mantenere la corrispondenza con un senso di onnipotenza interno a cui non si sa rinunciare, si deve svuotare il concetto di verità. Invece che armonia tra intuizione interna e realtà esterna, si deve trasformare la verità in mancanza di contraddizione, a livello puramente formale ed esterno. Ma se la verità è oggettiva, immobile come un oggetto e già lì prima di noi, a noi non resta alcun movimento o alcuna scelta possibile, se non quella di indicarla. Quindi paradossalmente è proprio il desiderio di potenza che ci fa perdere ogni ruolo positivo e di fatto rende il potere davvero un’illusione. Così, solo se davvero ci si astiene e si accetta di non sapere, o meglio che nessuno sa, si può creare lo spazio necessario per il cambiamento e, mantenendo il legame con l’intuizione, tornare padroni di una verità, umana. Solo se si contiene l’ansia della complessità e dell’ignoto, e si rinuncia ad una illusoria potenza sovrumana, si può far emergere una nuova più profonda comprensione umana.

Queste conclusioni sono in sintonia con una nuova visione naturalistica del mondo. Dal tempo dei miti, molta strada è stata percorsa. Negli anni più recenti, in particolare, molte

delle assunzioni della filosofia tradizionale sono rese superflue dalle risposte che comincia a fornire la scienza, la biologia in particolare, alle domande di base. Ora è seriamente fondata l'aspettativa di poter spiegare la specie uomo, e i suoi prodotti culturali, senza invocare alcun principio meta-fisico o sovra-naturale. È una strada che deve essere esplorata fino in fondo, per conoscere noi stessi, indipendentemente dalla risposta che ciascuno dà al problema religioso, e che comunque non sembra in contrasto con una interpretazione profonda del divino.

Se si mantiene con coerenza un atteggiamento naturalistico, senza infiltrazioni metafisiche, nulla può esistere al di fuori della natura. Si arriva allora a cogliere come semplice dato di fatto che non può esistere nemmeno una verità oggettiva, o comunque una verità precedente la verità prodotta dagli uomini. La verità oggettiva è un concetto umano indispensabile solo a chi non sa assumere la co-responsabilità di creare la verità, a chi non ha accesso ad una conoscenza più vera e umana, in cui il soggetto è coinvolto. In tal senso la verità è soggettiva, in quanto può vivere solo attraverso un soggetto. È un democratico processo dinamico, a livello sociale, e non l'autorità dei principi, che astrae dalle conoscenze e dagli errori degli individui per arrivare ad una verità condivisibile da tutti.⁵

La verità bloccata, subita o imposta con qualche forma di potere, è morta e produce distruzione. Per vivere, la verità ha bisogno di anima, partecipazione, sofferenza, coraggio, cioè di un essere umano. Solo così si può cogliere la differenza tra follia e ispirazione. La verità sta dalla parte di chi la fa vivere, di chi vede più in là e la lascia correre. La distinzione più profonda non è tra le varie possibili ideologie, ma tra statica e dinamica, tra rivelazione e costruzione, tra chi si adegua e chi cerca ancora, tra teorie fatte e complete e teorie da fare, e incomplete, tra potere e conoscenza, tra follia della normalità⁶ e normalità della follia.

Un atteggiamento naturalistico si può applicare anche ai fondamenti della logica e della matematica; anche per la logica e la matematica sembra possibile una spiegazione fondata sulle scienze biologiche, più che su assunzioni metafisiche, e quindi in particolare al di fuori di scuole di pensiero tradizionali, come logicismo, intuizionismo, formalismo e platonismo. Sarebbe poco coerente uno studioso che si dichiarasse seguace di Darwin per la biologia e, magari solo nei fatti, di Platone o Russell o Hilbert per matematica, logica e verità. Ma non vorrei dare l'impressione che questo sia solo un auspicio teorico, o che in generale le riflessioni esposte fin qui costituiscano una sterile filosofia senza conseguenze. Una nuova epistemologia fondata biologicamente appare oggi ad un neurobiologo⁷ globalmente come una aspettativa senza alternative; ora questa aspettativa generale comincia ad essere visibile in modo più articolato e tecnico anche per la logica e la matematica, dal loro interno.

Per la logica, l'invito all'astinenza pu essere raccolto senza fatica, almeno tecnicamente, semplicemente rinunciando al principio del terzo escluso. Il rifiuto del *tertium non datur*, che caratterizza la logica intuizionistica, è una rivoluzione concettuale, dovuta a Brouwer all'inizio del secolo, che spesso passa inosservata, perfino tra i logici; secondo me resta uno dei contributi più importanti e preziosi offerti dalla cultura matematica alla cultura in generale. Brouwer aveva ragione, e non solo su questo. Le sue intuizioni profetiche (armonia con la natura e non potere su di essa, esistenza come costruzione mentale, disprezzo per il linguaggio formale e ruolo del metalinguaggio,...) risultano anche più chiare e coerenti oggi, alla luce di una moderna filosofia naturalistica. In particolare, il legame che Brouwer instaura

⁵Questa, in sintesi, la soluzione dello scontro tra intuizionismo e formalismo che ho proposto in *Per una dinamica nei fondamenti*, in Nuovi problemi della logica e della filosofia, vol. 2. Atti del Congresso SILFS, Viareggio 8-13 gennaio 1990, a cura di G. Corsi e G. Sambin, Bologna, CLUEB, 1991, pp. 163-210.

⁶Vedi A. Gruen, *Der Wahnsinn der Normalität. Realismus als Krankheit: eine grundlegende Theorie zur menschlichen Destruktivität*, Deutscher Taschenbuch, 1987, trad. it. *La follia della normalità. Per una interpretazione della distruttività umana*, Milano, Feltrinelli 1994.

⁷Vedi ad esempio G. M. Edelman, *Bright air, brilliant fire. On the matter of the mind*, Basic Books 1992, trad. it. *Sulla materia della mente*, Milano, Adelphi, 1993.

tra soggetto e verità, intesa come evidenza mentale o verificabilità, appare oggi come una delle condizioni necessarie per il processo dinamico della conoscenza. Riscoprire Brouwer e il costruttivismo non dovrebbe tuttavia farci cadere in una nuova forma di rigidità. Né lui né altri possono essere depositari della verità assoluta. L'intuizionismo non è la nuova verità, ma solo un passaggio obbligato per riaprire la discussione (e per farci tornare ad una matematica umana).

Per la matematica, abbandonare la concezione di esistenza come mancanza di una contraddizione formale significa semplicemente che si devono trattare come esistenti solo gli enti che si riescono a costruire in modo positivo. Brouwer stesso ha sviluppato in modo costruttivo una parte considerevole della matematica, ma non ha saputo farlo in modo semplice e stabile. Dopo Brouwer, sono molte le teorie proposte come alternativa alla teoria degli insiemi ZFC, e alla matematica classica in generale. Tuttavia, a mio parere, solo la più recente teoria costruttiva dei tipi di Martin-Lf giunge ad una formulazione precisa, completa e ben fondata della nozione costruttiva di insieme. In essa si può formare un insieme solo quando le regole per la costruzione dei suoi elementi siano comunicabili in tutti i dettagli, e in tal senso oggettificabili; in particolare, quindi, i sottoinsiemi di un dato insieme non formano un insieme. Alla logica intuizionistica e ad un generico costruttivismo, essa aggiunge un stretto controllo dell'informazione, tanto che ogni dimostrazione è *ipso facto* anche un algoritmo esprimibile in un calcolatore.

Ho sperimentato personalmente come la teoria costruttiva dei tipi possa costituire una fondazione completa per la matematica costruttiva, sviluppando al suo interno, all'inizio in collaborazione con Martin-Lf stesso, un approccio completo alla topologia, ora noto come topologia formale.⁸ Abbandonare ZFC nei fatti e non solo in teoria, oltre ad essere personalmente una esperienza irripetibile, ha mostrato come basti oltrepassare la paura del vuoto per imparare a camminare anche senza il sostegno della concezione classica, e per far emergere novità anche tecniche (ad esempio, l'impiego sostanziale di metodi induttivi in topologia).

Più recentemente, una aperta riflessione filosofica sui fondamenti della matematica⁹ ha generato lo spazio sufficiente per far emergere inaspettate strutture concettuali e nuovi risultati tecnici. La considerazione della dinamica tra linguaggio e metalinguaggio (o esterno e interno) ha preso forma esplicita in un meta-principio logico preciso, che ho chiamato principio di riflessione; assieme alla simmetria, esso ha portato alla scoperta di una nuova logica, che abbiamo chiamato logica di base e di cui le logiche più note sono un'estensione naturale.¹⁰ La profondità della comprensione espressa nella logica di base è testimoniata da varie conseguenze tecniche, tra cui la soluzione di un problema sostanzialmente aperto da parecchi anni, cioè l'esistenza di una forma canonica per le dimostrazioni in logica quantistica. In generale, ritengo che la fecondità del principio di riflessione non sia affatto esaurita, e anzi ho fiducia che con esso si possa giustificare, oltre che la logica, anche una teoria degli insiemi, presumibilmente simile a quella di Martin-Lf. In matematica, la fedeltà ad una impostazione costruttiva (e predicativa) ha permesso di portare alla luce una struttura inaspettata in cui logica e topologia si fondono, una struttura che dà una giustificazione profonda, in termini di simmetria e dualità logica, alle definizioni di base sia della topologia tradizionale sia della topologia formale.

Ogni conclusione è prematura, ma certamente si vedono i primi passi di una matematica e una logica più costruttive e più profonde, e nello stesso tempo indipendenti da concezioni e dottrine tradizionali, come logicismo, intuizionismo e formalismo. Al contrario, anche gli

⁸G. Sambin, *Intuitionistic formal spaces - a first communication*, in *Mathematical logic and its applications*, D. Skordev, ed., New York - London, Plenum, 1987, pp. 187-204

⁹Vedi Sambin, *Per una dinamica ...*, op.cit.

¹⁰G. Sambin, G. Battilotti, C. Faggian, *Basic logic: reflection, symmetry, visibility*, *Journal of Symbolic Logic*, in via di pubblicazione.

aspetti tecnici confermano che proprio la rigidità delle dottrine avrebbe impedito il nascere di queste novità, sia concettuali sia tecniche. Ora, naturalmente, si devono sviluppare le conseguenze,¹¹ ma tutto sembra funzionare così bene che viene spontaneo chiedersi come mai così pochi ricercatori dedichino energie a queste nuove prospettive. Sinceramente non lo so. Forse è la paura del vuoto, o forse è davvero difficile lasciare un'ideologia anche quando mostra la corda, quasi fosse una forma di dipendenza psicologica. Mi sembra simile, comunque, al motivo per cui si continua ad andare in automobile quando nel traffico d'oggi un biciclo, magari a motore, fa davvero risparmiare tempo, soldi e bile, oltre a inquinare meno. L'incubo della distruzione del pianeta non è una condanna biblica, è una perversione in cui ci siamo cacciati noi stessi, e non più di un secolo fa. La mia proposta "politica" non è di bandire le automobili, che sarebbe oggi un'utopia irrealizzabile, ma almeno di dare più spazio ai pochi spericolati, ad esempio aumentando le piste ciclabili.

Similmente per la matematica: se non si vuole abbandonare la concezione classica perché si teme che fuori di ZFC ci sia il vuoto o il caos, che almeno l'inerzia intellettuale non sia tale da diventare attiva intolleranza, e si lasci spazio a quei volontari che quel caos cercano di ordinare e su quel vuoto cercano di costruire qualcosa. Questa mi sembra, realisticamente, l'unica via per sbloccare l'immobilità e prepararci al futuro, senza confidare in una soluzione divina. Perché quel volontario non è un ribelle o un fazioso, anche se talvolta non gli resta che il tono da predicatore; è uno come tutti, salvo l'aiutare concretamente la ricerca di alternative per uno sviluppo sostenibile, cioè cercare strenuamente di non tradire se stesso senza rifiutare la realtà. Se poi un giorno per qualche curiosità si prova a conoscere davvero la matematica meno inquinante, magari si scopre che non è affatto male, anzi, è stimolante e anche divertente, proprio come andare in motorino...

Fuori di metafora, quello che propongo sono passi graduali verso un'ecologia nella produzione della mente, cominciando proprio da matematica, logica e verità, non solo perché sono alla base, ma anche perché è incredibilmente più facile di quanto si creda, in quanto dipende solo da noi. Per questo mi sembra consono concludere con un dialogo di Bateson.¹²

Padre. Vi sono regole su come le idee si possono reggere e sostenere a vicenda. E se sono messe insieme in modo sbagliato, tutta la costruzione crollerà.

Figlia. Niente colla, papà?

P. No..., niente colla, soltanto logica.

F. Ma tu hai detto che se parlassimo sempre in modo logico e non incappassimo in pasticci, non potremmo mai dire niente di nuovo. Potremmo dire solo cose bell'e fatte. Come le hai chiamate quelle cose?

P. Clichés. Sì. La colla è ciò che tiene assieme i clichés.

F. Ma tu hai detto 'logica', papà.

P. Sì, lo so. Siamo di nuovo in un pasticcio. Solo che non vedo come faremo ad uscire, da questo pasticcio.

F. Come ci siamo capitati, papà?

Non importa molto sapere come ci siamo capitati, se non per accettare che ci siamo capitati e che si deve uscirne. Credo di aver illustrato come questo sia possibile. La mia proposta in sintesi è semplice: basta che la logica non sia essa stessa un cliché, irrigidita assieme alla matematica, una macchina che sforna verità confezionate per noi da qualcun altro.

¹¹Un compito su cui impegnato il gruppo di ricerca in logica di Padova.

¹²G. Bateson, *Steps to an ecology of mind*, Chandler 1972, trad. it. *Verso un'ecologia della mente*, Milano, Adelphi, 1976, p. 52.

Capitolo 4

Verso un costruttivismo dinamico

Prologo ¹

Penso di aver dato un mio contributo alla matematica, eppure condivido il sentimento di Enriques: “... per le questioni di filosofia della matematica e della logica sento talvolta un entusiasmo intenso come mai per questioni di matematica.”² Rifletto sulle fondazioni della matematica e della logica sin da quando mi occupo seriamente di tali materie. L’insoddisfazione provata nei confronti delle soluzioni proposte dalla tradizione (platonismo, formalismo e intuizionismo) mi ha convinto della necessità di ripensare ai fondamenti nell’intento di trovare una visione nello stesso tempo più convincente e più umana.

Alcuni, in particolare, sono i criteri di metodo a cui mi sono ispirato per ripensare i fondamenti. Il rifiuto di tutto ciò che viene imposto per autorità, la problematicità di un punto di vista statico (platonismo), la insostenibilità dell’assunzione che tutto resti giustificato solo se posto al di là e al di sopra di qualsiasi “accadimento” umano (come sostenuto da platonismo, intuizionismo e formalismo).

In tanti anni, un po’ alla volta ho sviluppato un vero e proprio modo di pensare i fondamenti, non solo della matematica, ma anche dei concetti astratti in generale, del tutto nuovo e indipendente rispetto alle posizioni fondazionali note.³

Ora credo di riuscire a dare una spiegazione anche di ciò che altri continuano a percepire come misterioso e insondabile. Il segreto è distaccarsi da ogni bisogno “religioso” di assoluto, e aprire gli occhi sulla realtà delle cose. All’inizio sembra controproducente, ma passata la “crisi di astinenza” si vede che il mondo della logica e della matematica è molto più bello, più complesso, più interessante e - cosa più importante - più vivo di quel che sembrasse prima.

È difficile comunicare tutto ciò in poche pagine. Questo articolo è quindi necessariamente una panoramica; spero di poter scrivere in futuro una versione completa, con tutti i dettagli,

¹Versione riveduta della mia conferenza a Milano (al convegno “Incontri e scontri. Bilancio di fine secolo e prospettive nei rapporti tra matematica e filosofia. Università Bocconi di Milano, 29-31 marzo 2000), che tien conto anche della successiva versione in inglese, ora in via di pubblicazione [Sambin, 2002]. Sono felice di ringraziare Silvia Pittarello per la collaborazione preziosa e determinante nell’opera di revisione.

²Ringrazio Angelo Guerraggio per aver suggerito questo passo di Enriques.

³Vedi [Sambin, 1987], [Sambin, 1991], [Sambin, 1998], l’introduzione di [Sambin – Valentini, 1998] e l’ultima parte di [Sambin, 2002].

argomentazioni, connessioni e riferimenti bibliografici che qui ometto. Se lo stile che uso non è quello tipico di chi fa filosofia, in particolare filosofia della matematica e della logica, è soprattutto perché sono i paradigmi culturali e teorici da cui sono partito ad essere diversi. Lo stile è quello di chi crede nella forza delle idee più che nell'estetica delle forme, nell'abito con cui sono vestite. Si tratta infatti di entrare all'interno di una prospettiva tutta da scoprire, di muovere i primi passi verso una nuova concezione della logica e della matematica,

Recentemente, la fecondità di tale approccio è stata confermata da due specifiche novità tecniche in logica e in matematica, e questo mi ha convinto una volta di più della opportunità di presentare una sintesi del mio lavoro filosofico e dei risultati scientifici cui mi ha condotto.

Nella prima parte (sezioni 1-4) cercherò dunque d'illustrare brevemente il nuovo approccio, che ho chiamato *costruttivismo dinamico*, mentre nella seconda mostrerò come esso funzioni davvero, nel senso che conduce a novità, anche da un punto di vista tecnico, nel panorama della logica e della matematica.

4.1 Una tesi generale

Fin dall'inizio, e in parte ancor oggi, la filosofia della matematica di Brouwer – fondatore dell'intuizionismo – è stata respinta in quanto legata al misticismo. Sono convinto anche io che non sia un buon metodo legare la conoscenza scientifica ad una qualunque forma di credenza religiosa.

A ben guardare, tuttavia, se con religione si intende qualunque forma di credenza in qualcosa al di là delle nostre percezioni, allora anche tutte le altre filosofie della matematica del secolo appena concluso appaiono non meno basate sulla religione.

Il logicismo, la cui tesi principale afferma che la matematica può essere ridotta alla logica, non dà alcuna spiegazione del perché la logica dovrebbe stare in piedi da sola, e la si debba considerare come data a priori. Il formalismo svuota la matematica di ogni contenuto, cioè di intenzionalità, e la accetta tutta in blocco come qualcosa di dato e da non discutere. Il suo scopo è infatti di giustificare tutta la matematica indipendentemente dal soggetto, riducendola alla sua apparenza esterna, fatta di puri segni e formule.

In generale, tutti gli approcci di oggi sembrano ancora permeati da qualche forma di platonismo: si assume che qualcosa, che di solito prende il nome di “esistenza”, “oggettività”, “verità” (accompagnata magari dall'aggettivo “universale”), esista di per sé, indipendentemente dalle nostre percezioni e dalla nostra mente. Ma si deve riconoscere che tali assunzioni, se pur comprensibili dal punto di vista psicologico in quanto sollevano dall'ansia del vuoto e dell'incertezza e danno uno scopo ai nostri tentativi ed errori, non hanno in realtà alcuna base scientifica.

Dire che queste concezioni sono una forma di religione, e quindi non sufficientemente giustificati proprio perché intesi come *da non giustificare*, non significa ritenere che essi siano tutti equivalenti, cadendo quindi nel relativismo. Ognuno è certamente libero di credere in quel che desidera, ma alla fine restano le conseguenze pratiche di ciò in cui si crede, e queste non sono affatto relative.

La religione è spesso accettata acriticamente, nella forma di credenza cieca, e questo a mio parere è il problema. Infatti, ciò può portare – e ha portato – a commettere errori molto gravi, se non catastrofici. Un esempio pessimo – ma ottimo per illustrare la mia tesi – sono i massacri di Cortez e Pizarro in America Centrale e Meridionale: molti milioni di esseri umani uccisi presumendo che non avessero l'anima. Analogamente, in matematica la presunzione che ci debba essere una verità assoluta, e che una teoria assiomatica classica degli insiemi come ZF debba farne parte, ha portato a parecchi errori culturali, e perfino ad atrocità intellettuali, di cui il paradosso di Banach-Tarski è solo un esempio. Più che

essere vacillante dal punto di vista filosofico, ZF ha di fatto seriamente danneggiato la nostra intuizione: non solo ne ha fatto volentieri a meno, ma anzi l'ha messa in contrapposizione proprio con ciò in cui ZF richiede di credere e cioè i suoi stessi enunciati. Per convincersene, basterebbe provare ad illustrare ad un non-matematico dotato di buon senso il contenuto di alcuni enunciati usuali della teoria degli insiemi ZF (vedi ad es. [Boolos, 1998]).

Questa è, a parer mio, una patologia che deve essere sanata; si è manifestata ormai da oltre un secolo, ma ben poco è stato fatto per curarla. Una buona filosofia generale, capace di offrire buoni principi guida anche alla filosofia della matematica, è una possibile cura. Dobbiamo solo aver il coraggio di andare oltre i nostri padri fondatori, e cioè oltre Frege, Peano, Russell, Hilbert, Brouwer, Gödel. Non possiamo più continuare ad aspettare una soluzione da loro, ora tocca a noi.

Che cosa sappiamo oggi che non fosse noto una sessantina di anni fa? Dobbiamo prendere atto che in filosofia della logica e della matematica i sessant'anni che vanno dal 1939 (anno di pubblicazione del secondo volume del libro di Hilbert e Bernays) ad oggi hanno prodotto molto meno dei precedenti sessanta, dal 1879 (anno di pubblicazione del *Begriffsschrift* di Frege) al 1939. Da dove possono oggi venire le novità? Su cosa possiamo fondare la speranza di una visione più libera e sana? Dove possiamo cercare nuove idee?

Molte novità vengono dalla biologia, soprattutto a partire dalla scoperta del DNA negli anni '50. Quel che più ci interessa è che oggi, dopo mezzo secolo, i biologi e i neuroscienziati concordano nel ritenere che nulla, al di là della biologia e dell'evoluzione, sia in linea teorica necessario per spiegare l'essere umano, il suo corpo e la sua mente – per quanto un resoconto dettagliato di fenomeni quali coscienza e creatività sia, allo stato attuale, ancora un problema aperto. Niente metafisica, niente fantasmi, nessun omuncolo!⁴ Questo è un grande cambiamento, l'inizio di un nuovo atteggiamento culturale globale.

La mia tesi generale è che lo stesso si applichi anche alla logica e alla matematica. Un atteggiamento naturalistico-evolutivo è del tutto sufficiente, e anzi più conveniente – come cercherò di illustrare – non solo per spiegare il corpo e la mente umani, ma anche tutti i prodotti intellettuali dell'uomo, inclusi quelli considerati i più esatti, come la logica e la matematica. Queste sono un frutto delle nostre menti, e *quindi* per spiegarle non abbiamo bisogno se non di quel che serve ai biologi per spiegare la mente. Ciò non significa sostituire i precedenti con nuovi principi, assunti come verità incontrollabili, e cadere quindi in nuove credenze religiose. Il principio di evoluzione, se così vogliamo chiamarlo, è solo una guida utile per trovare buone spiegazioni e nuovi risultati, un'idea a cui ispirarsi e non una assunzione da cui dedurre nuove conoscenze. Queste, quando sono convincenti, stanno in piedi da sole, senza alcun bisogno di assunzioni che le sorreggano; e a quel punto, qualunque sia la fonte dell'ispirazione poco importa. Vedremo due esempi nelle sezioni 5 e 6.

Il cambiamento di atteggiamento che propongo per spiegare la natura della matematica è simile al recente cambiamento di atteggiamento rispetto alla mente che è avvenuto in biologia.

È un fatto che abbiamo un cervello e una mente, qualunque cosa questo significhi. Non è dimostrato, e allo stato attuale nemmeno dimostrabile, che abbiamo uno spirito distinto dalla mente, di per sé esistente, indipendente dal corpo. È la biologia che ci aiuta a capirlo e ad accettarlo come un fatto, che non rappresenta più motivo di sgomento, come qualche decennio fa. Analogamente, è un fatto che gli esseri umani abbiano sviluppato una scienza matematica. Non è per nulla dimostrato, e nemmeno dimostrabile, che essa esista di per sé, a prescindere dalle nostre menti, in qualche universo al di là delle cose fisiche.

Naturalmente, questo non vuol chiudere la discussione; e infatti, molti altri commenti e argomentazioni sarebbero utili. Mi basta qui riportare, fra tutti, un dato sperimentale sul

⁴Di questa opinione sono oggi anche alcuni filosofi, come ad esempio [Dennett, 1995].

nostro cervello che potrebbe dissipare una comune fonte di resistenza ad una spiegazione biologica della mente. È stato sostenuto che accettare una spiegazione biologica e cioè materialistica della mente significa ammettere che essa sia una macchina, e in definitiva una macchina di Turing, e quindi che non ci sia spazio per la creatività umana. Alcuni neuroscienziati⁵ sulla base della loro esperienza e delle loro ricerche negano decisamente che il nostro cervello funzioni come una macchina di Turing e, dal canto mio, non vedo seri motivi per dubitarne (questo, detto di passaggio, ci porta subito alla sfida affascinante di trovare una nozione di “macchina” che vada oltre le macchine di Turing).

In ogni caso, la complessità puramente quantitativa del nostro cervello, anche concedendo che esso sia una macchina di Turing, è così elevata da sfuggire completamente al nostro controllo e da poter contenere certamente spazio sufficiente per qualunque cosa, incluso quel qualcosa che chiamiamo creatività umana e inesauribilità della matematica. Infatti, secondo stime recenti, il numero dei neuroni nella corteccia umana è pari a 10^{11} , e si pensa che ciascuno abbia 10^4 bottoni sinaptici. Se pensassimo di usare anche solo 10 pagine per descrivere un neurone con tutte le sue sinapsi, ci vorrebbero ben 10^{12} pagine, cioè 10.000 biblioteche, ciascuna di 100.000 volumi di 1.000 pagine l'uno per descrivere la totalità dei neuroni e delle loro connessioni sinaptiche... più di quello che si trova in tutte le biblioteche del mondo! E tuttavia questo è probabilmente un numero ancora piccolo, a paragone del numero degli stati potenziali del cervello. È quindi evidente che se siamo noi a creare qualcosa con il nostro stesso cervello, questo non significa che possiamo averne totale controllo.

4.2 Le domande familiari

L'impostazione naturalistico-evolutiva che propongo non è importata passivamente dalla biologia, quasi fosse un *deus ex machina* per risolvere i problemi dei fondamenti della logica e della matematica non risolvibili altrimenti. Infatti, la tesi che ho appena enunciato è in realtà la sintesi estrema di un atteggiamento che ho costruito un po' per volta, a partire dal basso, in un lunghissimo viaggio di riflessione, fatto di vari stadi, vari passaggi, e iniziato dalle domande che ciascuno di noi si può porre sulla matematica e che sono familiari a chiunque si interessi di fondamenti. È solo a posteriori, dopo aver letto un certo numero di libri sull'evoluzione, che mi son reso conto della perfetta compatibilità tra l'evoluzionismo biologico e le mie personali conclusioni.

Quale è la natura degli enti matematici? Da dove vengono? Sono scoperti o inventati? Che cosa si intende per verità logica e per verità matematica? Sono assolute? E se sì, come possiamo raggiungerle? Perché una dimostrazione è convincente? Che cos'è l'oggettività? Se l'oggettività esiste, e tutti sono d'accordo, come mai e di che cosa si continua a discutere? E inoltre: quale è il significato dell'esistenza in matematica? Quali entità esistono? Dove, quando, come esistono? È possibile distinguere in termini di esistenza tra 17 e un cardinale inaccessibile? o semplicemente tra 17 e la cardinalità dei numeri reali? e tra Sherlock Holmes e Robin Hood? tra buchi neri ed etere? Queste sono alcune delle domande familiari, forse le più ingenue. Ve ne sono anche altre, più specifiche ma non meno impegnative: quale teoria degli insiemi? Perché dovremmo credere nella verità di ZF? e dell'assioma di scelta? e di certe conseguenze deducibili come il “paradosso” di Banach-Tarski? E ancora: quale logica? classica o intuizionistica? Brouwer o Hilbert?...

Come si vede dalla lista, sono proprio le domande abituali, quelle che ciascuno di noi può porsi. Ma quel che caratterizza il mio atteggiamento verso di esse è la mia avversione alle risposte *per autorità*, una inestinguibile, incontenibile avversione ad accettare una qualunque verità, a meno che non la veda con i miei occhi. È vero, sono proprio come un bambino di

⁵Ad esempio [Edelman, 1992].

4 o 5 anni che continua a chiedere: “perché?”, e non si ferma finché non è soddisfatto. E anche quando suo padre, qualunque padre, arriva a dire: “basta, non sono ammesse altre domande, si deve credere, punto”, anche se il bambino capisce che è ora di stare zitto e si fa taciturno, tuttavia continua a pensare per conto suo. Nessun atto di fede mi ha mai convinto, nessun silenzio mi ha mai fermato. Il mio scopo è sempre stato quello di trovare qualcosa di *più* affidabile, così affidabile da poter rispondere a qualunque possibile domanda. Considerate sotto questa luce, ciascuna di quelle domande è ugualmente capace di condurre verso nuovi lidi, nuovi territori del pensiero... Che strano: per essere considerato parte di una minoranza o addirittura un rivoluzionario sembra che basti seguire anche solo due o tre volte il semplice buon senso contro il senso comune.

Dopo tanti anni di riflessione sono riuscito a trovare risposte a quelle domande, risposte che mi sembrano soddisfare persino le esigenze della mia incorreggibile avversione a qualsiasi principio di autorità. Devo dire che ho dato una risposta esplicita a *ciascuna* di tali domande e ad altre simili (naturalmente senza tutti i dettagli, ciò che del resto non sarebbe pensabile), perché sono convinto che questa sia una caratteristica essenziale di una buona filosofia della matematica. Infatti, negli interstizi di domande a cui si è mancato di rispondere si può annidare qualche forma di dogmatismo o qualche assunzione molto più problematica delle domande stesse, come ad esempio l'esistenza di entità iperuraniche o qualche analoga forma di credenza religiosa.

Le mie risposte sono genuine, e anche se non utilizzano il linguaggio tecnico abituale della filosofia, sono risposte vere, se non altro perché l'angoscia che certe domande talvolta mi procuravano si è attenuata sensibilmente. Un po' alla volta ho raggiunto una comprensione che mi soddisfa, ho acquisito un modo di pensare nuovo, che ora “indosso anche nei giorni di festa”, e mi sono spogliato di tutti i sensi di colpa derivanti dal non saper credere in ciò che non riesco proprio a capire, come la logica e la teoria degli insiemi classiche.

4.3 Il processo dinamico

Trovo difficile ricostruire il percorso che mi ha condotto al mio nuovo modo di pensare: una volta raggiunta la meta, si dimentica facilmente la fatica che è costata raggiungerla e la tortuosità del cammino. Quel che ho trovato mi appare ora talmente chiaro ed evidente che stento a ricordare come sia possibile pensare altrimenti, sebbene mi renda conto della distanza che oggi mi separa da altre posizioni.

Tra le varie idee che sono emerse come caratterizzanti la mia prospettiva, ce n'è una che ricorre costantemente quale elemento comune che le lega tutte: l'intrinseca dinamicità delle cose. Da questa scelgo di partire. Considerare *tutte le cose* nel loro evolversi, da un punto di vista dinamico invece che statico come tradizionalmente si è fatto, permette l'aprirsi di una prospettiva nuova, da cui è finalmente possibile scorgere la genesi dei concetti e il modo in cui stanno in relazione gli uni con gli altri. Questa processualità è ciò che permette di sciogliere le tensioni tra posizioni contrapposte e di rispondere a tutte le domande fondamentali in modo soddisfacente.

Ogni concetto, che si esprime con una parola o un insieme di parole, è il risultato temporaneo, non definitivo di un processo dinamico di astrazione. Visto nella sua totalità, è il processo dinamico stesso, che avviene nella nostra mente e poi nella comunità, secondo riaggiustamenti successivi. Illustrare esaurientemente questa tesi richiederebbe molto tempo, innanzitutto perché descrivere un processo significa mostrare la complessa rete di elementi che ne fanno parte. Qui preferisco utilizzare alcuni esempi, confidando nella forza persuasiva delle immagini e di situazioni familiari in cui ciascuno può facilmente ritrovarsi (per maggiori dettagli, cfr. [Sambin, 1991]).

Capire il concetto espresso da parole anche comuni come *mela*, richiede una notevole quantità di lavoro mentale, di cui siamo in gran parte inconsapevoli. Ognuno di noi, seguendo modalità sue proprie, ricostruisce dentro di sé il processo con cui il concetto espresso dalla parola mela si è formato nel corso del tempo. Elemento fondamentale di questo processo è l'astrarre da tutte le singole mele (di cui ho avuto e ho esperienza concreta) il tempo, la posizione, il colore, il gusto, la dimensione, i difetti, e così via. Il *concetto di mela*, per quanto preciso, contiene qualche elemento di idealizzazione, cioè qualche proprietà che non trova corrispondenza nella realtà, ma che ha solo una funzione di convenienza. Per spiegare che cosa intendo, un esempio può essere più utile di molti discorsi.

Una figura come la Fig. 1 mostra l'asse di simmetria incluso nel nostro concetto di mela:

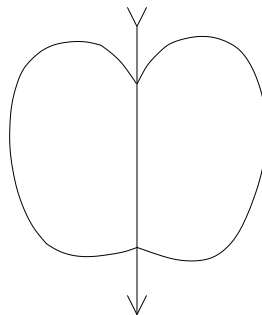


Fig. 1

In realtà quella simmetria non esiste e tutte le mele particolari sono leggermente asimmetriche. Prendiamo una mela, togliamole il picciolo, appoggiamola al piano di un tavolo e proviamo a collocare sopra di essa un cartoncino. Vedremo subito che il cartoncino si dispone in un piano che non è parallelo al piano del tavolo.

Perché allora ce la immaginiamo simmetrica? Forse che il nostro concetto di mela è sbagliato, e quindi da modificare? Certamente no: mantenere un'immagine di mela simmetrica ma non del tutto sarebbe infatti molto costoso in termini di energia mentale. Pensarla simmetrica, anche se nella realtà non lo è perfettamente, rivela come nella costruzione del concetto noi operiamo una idealizzazione sulla realtà per renderlo più semplice, imponendo regolarità e semplificazioni che non esistono nella realtà concreta. Questo mi sembra un ottimo esempio per mostrare che non esiste alcuna mela in sé. Il concetto astratto di mela è qualcosa che *costruiamo* noi, *dinamicamente*. Se infatti è certamente vero che il concetto di mela ha molto a che fare con le mele, si deve però anche riconoscere che in natura si trovano a disposizione solo mele, e nessun concetto di mela, se non nella nostra mente.

Così nessuna identificazione, e nemmeno un legame fissato a priori, esiste tra il nostro concetto e quel che viene chiamato "oggetto in sé". Il concetto è una nostra costruzione, sociale e individuale, e cambia continuamente in modo dinamico, al cambiare dei nostri bisogni e delle nostre conoscenze. Possiamo verificarlo facilmente con un altro esperimento.

Scommetto che riuscirei a modificare il concetto di pipa che ha in mente il lettore, se solo mi fossero concessi pochi minuti di attenzione e un po' di pazienza. Sono convinto che vincerei la scommessa perché conosco abbastanza sulle pipe da poter aumentare le conoscenze del lettore, semplicemente parlando di forme, nomi, materiali, ecc. o spiegando perché ogni fumatore di pipa possiede un gran numero di pipe; e anche se il lettore stesso fosse un fumatore di pipa, mi basterebbe raccontargli delle mie pipe, e di come ne avevo cura quando ero un fumatore. Anche una così piccola esperienza sarebbe sufficiente ad aumentare le sue informazioni sulle pipe, e così modificare per sempre il suo concetto di pipa. Questo

mostra quanto dinamici siano i concetti (e quanto poco mi basti per vincere la scommessa).

Un terzo esempio viene dalla mia esperienza più recente e mostra come un eccesso di idealizzazione sulla realtà possa essere controproducente. La Fig. 2 mostra la forma della cucina nell'appartamento che sto ristrutturando:

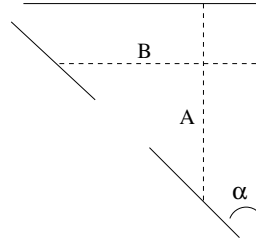


Fig. 2

Era impossibile misurare la lunghezza delle pareti, perché gli angoli erano ancora da ricostruire. Quindi ho misurato A , che è risultato di 219 cm. Misurare non era una banalità e includeva un certo lavoro di stima, perché mancavano ancora intonaco e pavimento. Ho supposto allora che B avesse la stessa lunghezza di A . Ma se fosse stato così, addio frigo e lavapiatti, che in B non mi ci sarebbero più stati, e questo era l'unico luogo dove poterli mettere. Che fare? In A c'erano già lavandino e forno... Ero così seccato che stentavo a crederci, e così ho misurato anche B , per controllare. Una prima volta B risulta uguale a 228 cm, ben 9 cm di più rispetto ad A . Fantastico! Misuro meglio. Misuro tre volte per essere sicuro, e la misura si conferma. Non riesco a capacitarmi. Che cosa avevo sbagliato nella mia prima idealizzazione? Rifacendo per bene il disegno, semplicemente mi accorgo che α non misurava affatto 45 gradi, come era naturale supporre (quanto credete misuri α nella Fig. 2?).

Mi sembra che questa esperienza sia esemplare. A me serviva una mappa con le misure della mia cucina, e cioè una idealizzazione. La prima, troppo semplicistica, purtroppo non veniva incontro ai miei bisogni. Fortunatamente, ulteriori dati hanno mostrato che mi sbagliavo, e hanno permesso di modificare l'idealizzazione ottenendone una più precisa, che ora si adeguava anche alle mie necessità. Precisa ma non perfetta, perché non esiste l'idealizzazione perfetta, l'immagine platonica della mia cucina! E infatti, mi son fermato quando ho raggiunto un livello di astrazione (una idealizzazione appunto) che era esattamente quella che mi soddisfaceva.

Il mio convincimento è che le cose funzionino sempre così: tutti i concetti, compresi i più astratti come quelli della logica e della matematica, sono il risultato di un processo dinamico di astrazione. Perché mai dovrebbero essere essenzialmente diversi da quelli più familiari, che usiamo ogni giorno? E anche le proprietà di tali concetti, come verità, esistenza e oggettività, che usualmente sono pensate come pilastri, sono il risultato di un processo. Immutabilità e staticità non possono da sole garantire la certezza. Niente in matematica è certo di per sé, o per atto divino.

4.4 Un costruttivismo dinamico

Sono consapevole che l'atteggiamento appena descritto richiede un radicale cambiamento di prospettiva, un capovolgimento della tradizionale fonte della certezza.

Di solito si crede che la certezza e l'affidabilità della matematica siano dovute a qualche ingrediente speciale (come l'oggettività, la verità assoluta, ecc.) che le garantisce. Io pro-

pongo di rovesciare la prospettiva, e dire che siamo *noi* a chiamare matematica qualunque cosa che sperimentiamo come certa e affidabile in modo del tutto soddisfacente (cosa che usualmente dichiariamo dicendo ad esempio che è oggettivamente vera).

Un simile cambiamento di prospettiva è una esperienza liberatoria che si può verificare non appena si arrivi a cogliere fino in fondo la portata della spiegazione del mondo naturale in termini di evoluzione, e più in generale quando si passi da una visione statica ad una dinamica. Poiché non è possibile che la mia esperienza diventi l'esperienza di un'altra persona, posso solo tentare di descriverla con un esempio. È solito comune dare per scontato che tutti gli esseri viventi abbiano voglia di vivere, un istinto primitivo (qualsiasi cosa questo significhi) che non può essere spiegato. Adottare la nuova prospettiva in questo caso significa osservare che non è necessaria alcuna speciale assunzione, perché la spiegazione è molto semplice: tutti gli esseri viventi che avevano una voglia di vivere un po' meno intensa, per quel fenomeno che chiamiamo selezione naturale, sono già tutti morti. Come ci ricorda R. Dawkins, ci sono molti più modi di essere morti che di essere vivi. Quelli che hanno trovato il modo di essere ancora vivi, ora possiedono quello che chiamiamo voglia di vivere. Quindi, come si vede, non c'è alcuna necessità di assumerla come un a priori.

La situazione è molto simile anche nel mondo matematico. Consideriamo ad esempio i numeri naturali: per poter confidare nella certezza e oggettività di tutto ciò che li riguarda, non c'è alcun bisogno di concepirli come dati a priori (e nemmeno indirettamente, tramite gli insiemi). Basta osservare che essi, così come si presentano oggi, sono il risultato di una lunghissima evoluzione, che partendo da concetti molto concreti (in cui ad esempio il cinque di cinque mucche era diverso dal cinque di cinque vasi di olio) e attraverso l'introduzione dello zero, la notazione decimale, le ingenuità sull'induzione nel Rinascimento, arriva fino alle chiarificazioni di Dedekind e Peano sull'induzione stessa. Tutte quelle concezioni che erano anche solo un po' meno precise o che funzionavano anche solo un po' meno bene (come la notazione romana, la mancanza dello zero, i principi di induzione impropri) sono già state *naturalmente* messe da parte dalla selezione storica, e relegate nel regno delle ombre.

Sto parlando di numeri naturali, ma deve essere chiaro che le stesse osservazioni si applicano a tutta la matematica. L'intera matematica è costruita attraverso un processo dinamico, e la parvenza di certezza, di stabilità, di oggettività, per quanto forte, è qualcosa che si raggiunge solo *a posteriori*. Né convenzione, né esistenza a priori, dunque, ma sopravvivenza del più adatto: quel che rimane stabile è in ultima analisi semplicemente ciò che funziona meglio per i nostri scopi e anche per le nostre esigenze di organizzazione dei concetti stessi. Il resto è prima o poi spazzato via. Noi chiamiamo matematica ciò che ha questa stabilità e nel più alto grado.

Può sorgere spontanea la domanda: se tutto è il risultato di una costruzione, che significato dobbiamo dare a questo punto a parole come *oggettività*, *verità*, *esistenza* in matematica? Dal nostro punto di vista, la risposta è semplice: non c'è alcuna nozione assoluta né di oggettività, né di verità, né di esistenza. È quindi il loro stesso concetto che deve essere cambiato e definito nuovamente.

Iniziando col prendere in esame il concetto di oggettività, ci chiediamo che cosa diventa l'oggettività in questa nuova prospettiva. Se essa include nel suo significato la assoluta certezza, come potremo mai raggiungerla?

La parola *oggettività* ha la stessa radice di *oggetto*, e la ragione mi sembra chiara: l'oggettività è la proprietà che diciamo di aver raggiunto quando proviamo una sensazione di sicurezza e di indipendenza dal soggetto, la stessa che abbiamo nel trattare gli oggetti esterni, o concreti. Ma su che cosa basiamo questa nostra sensazione di sicurezza trattando gli oggetti? E inoltre, sappiamo sul serio che cosa si deve intendere per oggetto? Su che base fondiamo la loro indipendenza da noi?

Si deve ammettere che anche quello che noi dichiariamo essere questo o quell'oggetto concreto (questa penna, quella lampada, . . .) non esiste di per sé, e cioè indipendentemente da noi. Quello che esiste di per sé è solo una certa distribuzione di molecole in un certo settore dello spazio in un dato momento, che ha certe proprietà fisiche e che produce alcuni segnali in ingresso nel nostro cervello. Quando parliamo di un oggetto in sé, ciò a cui in realtà facciamo riferimento è una costruzione mentale, ottenuta attraverso un processo di astrazione da quella parte dei dati in ingresso che conviene trascurare, come il luogo, il momento, l'illuminazione, l'umore, ecc. Questa costruzione è il nostro modo di organizzare e conoscere la realtà. Ad essa noi attribuiamo esistenza esterna, o in sé, semplicemente per ragioni di convenienza: è molto più veloce, efficace, affidabile, come lo sono tutte quelle funzioni mentali che sono diventate quasi automatiche, come pezzi di 'hardware'.

L'accordo su quelli che chiamiamo oggetti esterni si basa in ultima analisi sul fatto che tutti noi abbiamo gli stessi organi di senso, che funzionano più o meno nello stesso modo; e tuttavia questo accordo deve includere una notevole dose di mutuo adattamento. Quel che solitamente si considera essere oggettivo e cioè, secondo l'opinione comune, parte necessaria del mondo esterno, è spesso solo un possibile modo per organizzare le nostre percezioni, e dunque la *nostra conoscenza* del mondo. Questo è testimoniato dal fatto che, ad esempio, persone diverse possono vedere colori diversi (tipica è la coppia blu-verde) e che lingue diverse usino concetti diversi per una data realtà (l'italiano ha tre parole – vetro, bicchiere, occhiali – per l'unica parola inglese glass e il suo plurale, mentre il cinese non ha alcuna parola per polso).

Analogamente, l'oggettività in matematica si raggiunge quando un qualche ente matematico viene trattato come un oggetto, cioè mediante funzioni mentali automatiche simili a quelle usate per le costruzioni mentali (immagini interne) di oggetti concreti (esterni). Come accade con gli oggetti concreti, per raggiungere questo stadio il processo dinamico deve, a mio avviso, includere necessariamente anche l'interazione con altri individui, e con i risultati dei *loro* processi mentali. Questa è la principale, più profonda differenza rispetto a Brouwer. È un democratico, sebbene non sempre pacifico, processo dinamico di confluenza del consenso ciò che ci porta a quel che *a posteriori* chiamiamo oggettivo o oggettivamente vero. In tal modo, venendo meno il concetto di oggettività in sé e di oggetto in sé, viene a mancare la netta separazione qualitativa tra il significato di oggettività e quello di inter-soggettività e quello di completa, universale certezza.

Per quanto si possa non essere d'accordo con questa concezione di oggettività, si deve quantomeno osservare che io qui propongo una spiegazione del termine. Al di fuori della prospettiva dinamica è molto difficile parlare di oggettività senza assumere che essa sia universalmente chiara, senza cioè cadere esattamente in ciò che si cerca di evitare, ovvero la pretesa – molto soggettiva – che oggettivo sia quel che è considerato vero in un certo periodo di tempo e da una certa comunità. . . di solito la nostra! Questo è il modo in cui più facilmente si insinuano assunzioni non giustificate, come ad esempio quelle all'interno di una logica e di una teoria degli insiemi considerate come a priori.

La spiegazione di quel che si deve intendere per verità e per esistenza segue la stessa idea generale, e cioè che nessuna delle due è assoluta, che la nostra sensazione che esse siano indipendenti da noi è dovuta a ragioni di convenienza, e che si deve trovare un nuovo significato positivo, costruito dal basso, e non più sospeso tra cielo e terra (usando le parole di Dennett, si tratta di costruirle con una *gru* e non di giustificarle con un *gancio appeso al cielo*).

La definizione tradizionale di verità, come *adaequatio rei et intellectus*, è sostanzialmente corretta, una volta che la si intenda in modo dinamico, come qualcosa da raggiungere. In questo modo essa non sarà più l'uguaglianza tra due termini, ma piuttosto tra due processi,

i cui risultati si dovranno far convergere (questo è suggerito anche dal fatto che il prefisso *ad* in *adaequatio* rende l'idea del movimento) (vedi Fig. 3).

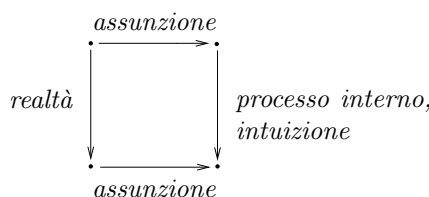


Fig. 3

In primo luogo, la realtà è assunta nel senso di “presa dentro” (come ci ricorda il significato originario di “assunzione”) e poi rielaborata mediante processi mentali interni; se il risultato concorda con un successivo esame della realtà, allora l’aspettativa di verità è confermata. Altrimenti, si deve cambiare qualcosa.

Questo modo di intendere la verità come un processo ci permette anche di capire come è costruito l’accordo sulla verità. Poiché la realtà include anche gli altri individui, quando siamo di fronte a qualcosa che ci viene presentato come vero, abbiamo varie alternative possibili: se concorda con la nostra intuizione e anche noi lo riconosciamo come vero, confermandolo contribuiamo a renderlo una verità universale, nel senso di condivisa da più individui; se non concorda, sospendiamo il giudizio o lo rifiutiamo, e cerchiamo qualcos’altro. In questo caso si rimette in moto un processo individuale che contribuisce ad alimentare il processo generale già in atto, e con ciò ad operare un riaggiustamento della verità.⁶

Questo è il modo in cui viene mantenuto in vita il processo dinamico e con esso la verità. Un modo che vale a qualsiasi stadio della conoscenza, e che per sua necessità coinvolge molti soggetti diversi. Il solo modo per spiegare come si creano concetti e teorie nuove, come può cambiare il significato delle parole, come verità per lungo tempo ritenute incrollabili possono cedere il passo a nuove prospettive.

La dinamica coinvolta nella costruzione della verità è evidente e direttamente sperimentabile in alcuni casi, quelli in cui il movimento è immediatamente coglibile: a livello individuale nell’apprendimento e nella ricerca, a livello sociale nello sviluppo storico. Qui una visione statica non basta. La dinamica, però, non è un ingrediente che, come il sale, può essere aggiunto anche all’ultimo minuto, dopo aver assaggiato; è piuttosto come il lievito, che deve esserci sin dall’inizio.

Infine l’esistenza. Siamo *noi* che diamo esistenza alle entità matematiche, nello stesso senso in cui, come abbiamo già visto, siamo noi che creiamo i concetti astratti e che raggiungiamo l’oggettività. Per vederlo, pensiamo in particolare ad enti la cui esistenza è oggetto di discussione, come i grandi cardinali, gli ultrafiltri e gli infinitesimi. La loro esistenza non è molto diversa da quella di Babbo Natale o di Sherlock Holmes. Infatti, essi sono stati creati da alcuni esseri umani ed esistono solo nel senso che altri esseri umani (matematici, bambini, lettori di gialli) li mantengono in vita, singolarmente nelle loro menti e collettivamente nelle loro discussioni.

Ma a ben guardare, tutta la matematica funziona così. Si consideri ad esempio il numero $10^{10^{10}}$; esso supera di gran lunga la stima attuale del numero di elettroni nell’universo fisico noto, e quindi mi sento tranquillo di poter affermare che non esiste in natura, nel senso che non esiste concretamente qualcosa che abbia quella quantità (per quanto sia un numero relativamente piccolo quando si tratta di contare nostre costruzioni astratte, come

⁶Per ulteriori approfondimenti, vedi [Sambin, 1991].

permutazioni, stati possibili, sottoinsiemi, ecc.). Così ci possiamo render conto che anche i numeri naturali sono mantenuti in vita dai nostri processi mentali. Il forte convincimento che abbiamo della loro esistenza indipendentemente da noi è dovuto alla loro lunghissima storia, alla loro utilità universale e alla loro semplicità concettuale: sono la più semplice procedura senza fine. In altre parole, i numeri naturali sono così affidabili che quasi tutti ritengono che essi siano perfettamente accettabili così come sono. Ma se questa dovesse essere considerata una ragione sufficiente per dichiarare che esistono in sé, a priori, dovremmo allora credere che anche i grandi cardinali inaccessibili esistono a priori, come qualunque altro ente introdotto in matematica, anche se poi ha vita breve? E se non fosse così, dove dovremmo porre il confine tra i numeri naturali e i grandi cardinali inaccessibili? Qualsiasi scelta sarebbe artificiale e facilmente criticabile.

La spiegazione corretta è che l'esistenza non è mai un attributo assoluto, indipendente dalla nostra mente, per quanto all'inizio questo sia psicologicamente difficile da accettare. Di qui segue anche che forme diverse di esistenza sono possibili. Pertanto i numeri naturali in un certo senso "esistono in grado maggiore" rispetto ai grandi cardinali, un po' come Pinocchio, Alice e Paperino "esistono in grado maggiore" di altri personaggi di minore successo, come Tiramolla, Bertoldo e Pierino Porcospino. Da questo punto di vista, si potrebbe addirittura sostenere – paradossalmente – che Sherlock Holmes esiste in maggior grado rispetto a Robin Hood, perché lo conosciamo meglio!⁷

Dovrebbe essere ormai chiaro che il dilemma se la matematica sia "scoperta o inventata", per quanto mi riguarda ha una risposta ben definita: è *inventata*. Ma, come per i concetti astratti e l'oggettività, è spesso molto più facile ricercare qualcosa credendo che prima o poi debba essere scoperta da qualche parte, piuttosto che inventarla, con tutta la fatica che questo comporta. Questo è molto simile ad un fatto ben noto in matematica: dato un problema la cui risposta è del tipo sì-no, è molto più facile trovare una dimostrazione completa se si conosce la pura risposta sì o no (se si sa che il problema ha risposta sì, se ne troverà la dimostrazione, mentre se si sa che è no, si troverà un controesempio).

La sensazione di aver davvero scoperto qualcosa può essere talvolta molto forte, e totalmente giustificata. Questo accade in particolare quando quel qualcosa è soltanto una pura conseguenza logica di conoscenze precedenti. Qui "scoprire" è solo il portare a coscienza un dettaglio che era implicito all'interno di un quadro frutto di precedenti invenzioni. È cioè ancora soltanto un fenomeno psicologico contingente, che non cambia la semplice sostanza globale: tutto l'universo matematico esiste solo nella mente degli esseri umani. Forse che l'auto-inganno di credere che esista di per sé lo rende più nobile, o più interessante, o più affidabile?

Si comincia a vedere come la riflessione sulle domande familiari abbia in realtà prodotto ben più che una collezione di risposte isolate. Le risposte appaiono ora come parte di un atteggiamento filosofico unitario e globale pertinente la logica e la matematica, che ho chiamato *costruttivismo dinamico*. *Costruttivismo*, perché alla radice di ogni cosa vedo, come Brouwer, le costruzioni mentali di un individuo. *Dinamico* perché è il modo in cui il costruttivismo si caratterizza, e cioè perché tali costruzioni coinvolgono l'interazione tra intuizione e realtà, che necessariamente include altri individui, e non più soltanto la pura introspezione, come nell'intuizionismo di Brouwer.

Ritengo che quanto ho detto fin qui sia sufficiente per suggerire che la posizione che sostengo abbia una sua coerenza interna. Ora cercherò di caratterizzare ulteriormente ciò che intendo per costruttivismo dinamico, questa volta però indirettamente, e cioè attraverso

⁷Non sto suggerendo che l'esistenza abbia dei gradi misurati da numeri, anche se sviluppare una teoria formale con valori di esistenza che variano ad esempio nell'intervallo reale $[0, 1]$ potrebbe essere un esercizio istruttivo, utile per la nostra comprensione di alcuni aspetti cruciali di quel che chiamiamo esistenza, nello stesso modo in cui le varie logiche a molti valori possono aiutarci a capire il concetto di verità.

i cambiamenti che si dovrebbero operare per ottenerlo se si partisse dalle tradizionali filosofie della matematica, avvalendomi di immagini forse approssimative, ma suggestive.

La tesi principale di Brouwer, che consiste essenzialmente nell'affermazione che nessun oggetto e verità matematica sono dati, ma che tutto deve essere costruito, è secondo me corretta. A dire il vero, mi sembrano corrette la gran parte delle intuizioni di Brouwer. La mia tesi è che per ottenere il costruttivismo dinamico a partire dall'intuizionismo di Brouwer sia sufficiente lasciar cadere l'ispirazione mistica diretta del soggetto creativo e rimpiazzarla con l'esistenza degli altri individui. Contrariamente a Brouwer, sono lieto di riconoscere l'esistenza di altri individui miei consimili (anche se, devo confessare, questo non è sempre ottenuto senza una certa fatica, e ci sono individui la cui esistenza sono più felice di riconoscere di quella di altri). Ciascuno di noi è un soggetto creativo, o potrebbe esserlo. E allora, invece che fondare la conoscenza ponendo che un dio, l'Uno, ne sia la suprema e sola fonte di ispirazione per ciascun soggetto, è più semplice spiegarla come *conoscenza intersoggettiva*, risultato dell'interazione tra molti soggetti creativi attraverso comunicazione – dibattiti, scontri, accordi, ... – tra individui, ovvero come processo dialettico. E questo accade anche all'interno dello stesso soggetto, se pur meno palesemente, nella forma di un adeguamento tra intuizioni, contenuti, significati, quel che insomma si vuole esprimere, e la loro espressione in un linguaggio intersoggettivo. Queste le ragioni dell'aggettivo "dinamico".

Lo scopo del formalismo è arrivare all'oggettività eliminando tutto ciò che appartiene al soggetto,⁸ e quindi le sue intenzioni, le sue intuizioni, i significati, ... Questo è il motivo per cui, secondo i formalisti, per fondare la matematica, essa deve essere ridotta a segni e sistemi formali. Questo non solo è insoddisfacente, in quanto non riesce a spiegare il significato della matematica e come essa si sia sviluppata, ma è anche illusorio: il formalismo sembra ignorare il *fatto* che, non appena si consideri un sistema formale espresso in un certo linguaggio, proprio in quel momento non può non comparire sulla scena anche un soggetto che legga quel linguaggio (il che comporta quantomeno l'atto di riconoscerne i segni) e che dia un'interpretazione di quel sistema formale. Che senso avrebbe disporre di un sistema formale, talmente oggettificato da essere assimilabile ad una macchina che manipola segni, senza un soggetto che lo possa interpretare, indirizzare e utilizzare? Affinché la riduzione della matematica a sistemi formali abbia davvero senso è necessario reintrodurre il metalinguaggio in modo autentico, il che significa rimettere in gioco il ruolo del soggetto, con le sue intenzioni, le sue intuizioni, e con tutte quelle complicazioni e "seccature" inevitabili quando sono coinvolti essere umani. L'unica vera strada verso l'oggettività è *trascendere* il soggetto senza tuttavia eliminarlo. Pretendere che il soggetto non ci sia è una falsa scorciatoia, che dopo tutto è simile alla pretesa di Brouwer che ce ne sia uno solo.

Proviamo ora a ripetere l'esperimento mentale del passaggio da un sistema ad un altro applicandolo al platonismo. È possibile, e come, ottenere il costruttivismo dinamico dal platonismo? Qui sembra si tratti solo di sottrarre: eliminare la visione statica, e cioè il fatto che i concetti, le idee siano enti assolutamente immutabili. Se al platonismo immaginiamo di aggiungere il movimento, ammesso che questo abbia un senso, abbiamo con ciò ottenuto un costruttivismo dinamico? Certamente no, ma così facendo abbiamo indicato dove si annida il problema: rimettere in moto i concetti.

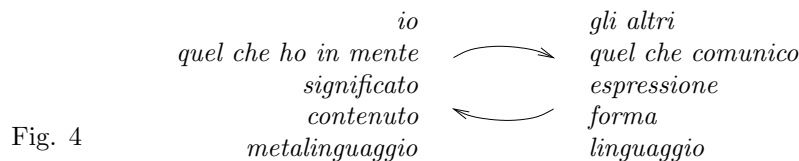
Se infatti posso condividere con i platonisti la convinzione che abbiamo bisogno di concetti, mi aspetto, meno ottimisticamente di loro, che non si tratti di scoprirli o coglierli, perché non si troveranno mai (e del resto, *dove* andarli a cercare?) già preparati da qualcuno (da *chi?*) per noi (*perché* dovrebbe essere stato così magnanimo da averlo fatto al posto nostro?). Penso piuttosto che i concetti si ottengano mediante costruzione, perché questa è la loro natura. Come si può ben capire, questo ha bisogno di una dose di lavoro

⁸Da quel che appare in [Hilbert, 1985].

molto più grande. Spiegarne la natura significa infatti far intervenire un soggetto con le sue costruzioni mentali, il movimento di adeguamento tra le sue costruzioni e la realtà, il mutuo adattamento dialettico tra vari soggetti. Potremmo seguire anche un'altra direzione, quella opposta, e provare a pensare di ottenere le idee del platonismo a partire dai concetti così come li intende il costruttivismo dinamico, ma ipotizzando che il processo di costruzione abbia una meta, un telos come nel platonismo. Tutti i nostri tentativi ed errori verrebbero allora letti solo come il nostro modo parziale di cogliere l'idea platonica, approssimazioni che convergono a qualcosa che già esiste, e a quel punto la dinamica diventerebbe solo un fatto psicologico. Si capisce che l'assunzione di un punto di convergenza è inutile e la sua giustificazione problematica. Ed allora il mio suggerimento è di accettare che c'è *solo* il processo dei tentativi ed errori, e nient'altro che questo è il concetto.

Fino a questo punto ho presentato la mia prospettiva filosofica principalmente sotto forma di teoria o – sarebbe meglio dire – come impostazione culturale. Ora vedremo che c'è anche una continuazione pratica, un corrispondente tecnico sia in logica che in matematica. Per “continuazione” intendo non solo il trarre delle conseguenze, ma anche il confermare la validità e fecondità della teoria, poiché il nuovo atteggiamento culturale ha permesso di trovare nuove strutture, che a loro volta mostrano come sia possibile sviluppare la logica e la matematica in armonia con l'impostazione filosofica generale, con ciò confermandone la potenzialità.

Una differenza cruciale tra il costruttivismo dinamico e gli altri approcci è l'accento posto sulla presenza attiva di una *molteplicità di individui* che necessariamente si trovano a comunicare tra loro. Come conseguenza, è qui di cruciale importanza l'interazione tra il sé e gli altri, tra quel che il soggetto ha in mente e quel che è capace di comunicare, ovvero, più astrattamente, tra significato ed espressione, tra contenuto e forma, tra metalinguaggio e linguaggio (vedi Fig. 4).



Di solito, il divario tra un significato e la sua espressione è considerato come una iattura e semplicemente ignorato. L'intuizionismo e il formalismo si tolgono d'impaccio semplicemente negando l'una o l'altra metà del quadro, e cioè, rispettivamente, il linguaggio e il metalinguaggio. Qui, al contrario, questa discrepanza è considerata e accettata come un fatto essenziale della vita e, proprio per questo, rivalutata come la vera origine della dinamica e il motore sottostante la creazione dei concetti.

È stata per me un'esperienza profonda e coinvolgente verificare come questo sia confermato così bene nell'ambito della logica da uno sviluppo rigoroso anche in termini matematici. Forzare la convergenza tra linguaggio e metalinguaggio è infatti proprio il modo di generare tutti i connettivi logici, in un senso del tutto preciso che vedremo brevemente nella prossima sezione.

4.5 La logica di base

Sin dalla rivoluzione di Brouwer, che ha introdotto una pluralità nello spazio delle logiche, ogni fondazione che ambisca ad essere completa deve confrontarsi con una alternativa: o si trova una buona argomentazione che mostri che ci può essere una sola logica, “più vera”

di tutte le altre – e con buona argomentazione intendo che non presupponga quella stessa logica in qualche forma equivalente – oppure si deve esplicitamente riconoscere, e allora anche spiegare, l'esistenza di una varietà di logiche.

È difficile accettare una pluralità di logiche e nel contempo continuare a credere che la logica tratti di una nozione di verità statica, *a priori*, e quindi univoca. Se invece si pone che la verità sia costruita, e quindi si intende che a diversi gradi di astrazione (dalla disponibilità delle risorse alla verità dei teoremi) corrispondono diversi concetti di verità, allora si può arrivare a concepire una logica come uno stock di regole che permettono di passare, a quel livello di astrazione, da un dato stato di conoscenze note a nuove conoscenze, senza far uso di ulteriori dati. In questa visione più aperta diventa importante trovare qualche struttura nello spazio delle logiche possibili; in altre parole, resta da spiegare appunto come viene creata una logica. È quel che ora faremo, utilizzando esattamente la convergenza tra linguaggio e metalinguaggio.

Innanzitutto c'è il metalinguaggio, e poi il linguaggio, nello stesso modo in cui vien prima il contenuto che vogliamo esprimere e solo in seguito il mezzo per esprimerlo (la parola stessa significato vuol dire “ciò che è stato fatto segno”). Quindi assumiamo di avere delle proposizioni A, B, C, \dots . Non è necessario qui sapere esattamente che cosa sia una *proposizione*, se non che deve essere mantenuta ben distinta da un giudizio o *asserzione* basata su di essa, che indico con $A \text{ is}, B \text{ is}$ (che sta per A è vera, A è disponibile, A è misurabile, ...). La proposizione A è a livello oggetto (linguaggio), l'asserzione $A \text{ is}$ è al metalivello (metalinguaggio). Inoltre, abbiamo bisogno di soli due legami metalinguistici, e e *comporta*, per costruire asserzioni composte.

Questo apparato è sufficiente per introdurre e spiegare tutta la notazione del calcolo dei sequenti, nello stile di [Gentzen, 1935]. Infatti, un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ usualmente abbrevia $C_1, \dots, C_m \vdash D_1, \dots, D_n$, che a sua volta qui è una abbreviazione di $(C_1 \text{ is } e \dots e C_m \text{ is}) \text{ comporta } (D_1 \text{ is } e \dots e D_n \text{ is})$. Si noti che $\Gamma \vdash A$ e $C \vdash A$ abbreviano $(C_1 \text{ is } e \dots e C_m \text{ is}) \text{ comporta } A \text{ is}$ e $C \text{ is } comporta A \text{ is}$, rispettivamente. Una regola come

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Delta'}$$

è una abbreviazione, di $(\Gamma \vdash \Delta) \text{ comporta } (\Gamma' \vdash \Delta')$; questo si estende al caso di regole con due premesse, dove lo spazio vuoto abbrevia e .

Tutte le assunzioni che servono sono soltanto:

$$\begin{array}{l} \text{identità} \quad A \vdash A \\ \text{composizione:} \quad \text{a sinistra} \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta} \quad \text{a destra} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'} \end{array}$$

per ogni $A, \Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$. Immaginando un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ come una linea di produzione, la composizione è l'espressione formale di una idea molto intuitiva: se c'è un prodotto (o conclusione) Δ che risulta da alcuni ingredienti (assunzioni) A, Γ' , allora possiamo sostituire l'ingrediente A con gli ingredienti Γ di una precedente produzione di A , e ottenere lo stesso prodotto Δ . Lo stesso si applica dall'altra parte di *comporta*, sui conseguenti.

Ora posso mostrare che, con queste sole assunzioni, tutti i connettivi sono creati seguendo un unico schema generale. Si parte da quel che ho chiamato una equazione definitoria, ad esempio

$$\Gamma \vdash A \& B \text{ se e solo se } \Gamma \vdash A \text{ e } \Gamma \vdash B$$

Il connettivo che vogliamo creare ($\&$ nell'esempio) compare a sinistra, all'interno del *definiendum*, mentre il *definiens* è a destra. Il connettivo ($\&$ nell'esempio) è la riflessione

di un legame metalinguistico (*e* nell'esempio) in una certa configurazione. Perciò l'equazione definitoria è ancora un *desideratum*: esprime la richiesta di ottenere un connettivo che produca una nuova proposizione ($A\&B$) che si comporti, quando asserita in una data situazione (a destra di \vdash , nell'esempio), esattamente come l'asserzione composta con quel legame ($\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$). Diciamo che $\&$ riflette *e* a destra di \vdash e che obbedisce al principio di riflessione in quanto, come ora vedremo, tutte le sue regole di deduzione sono ottenute risolvendo l'equazione definitoria.

La direzione dal definiens al definiendum dà quella che chiamo regola di formazione (nell'esempio, è la regola

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}$$

ricordando che *e* è espresso qui dallo spazio vuoto). L'altra direzione, dal definiendum al definiens (nell'esempio,

$$\frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash A} \quad \text{e} \quad \frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash B}$$

che assieme equivalgono a $\Gamma \vdash A\&B$ solo se $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$), non dà una buona regola, perché il connettivo da definire compare nelle premesse. Chiamo questa regola *riflessione implicita* in quanto esprime l'informazione richiesta solo in modo implicito. Possiamo comunque risolvere l'equazione trovando una regola accettabile che sia equivalente alla riflessione implicita. La procedura da seguire è la seguente. Per prima cosa, si deve banalizzare la premessa della riflessione implicita e con ciò ottenere un assioma (nell'esempio, si rimpiazza Γ con $A\&B$ e si ottengono gli $\&$ -assiomi $A\&B \vdash A$ e $A\&B \vdash B$). Poi per composizione si ottiene che il connettivo da definire compaia nella conclusione, ma dall'altra parte (nell'esempio: se $A \vdash \Delta$ allora dal $\&$ -assioma per composizione anche $A\&B \vdash \Delta$). Questo produce la regola che chiamo *riflessione esplicita* (nell'esempio,

$$\frac{A \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta},$$

e questa è una buona regola. Ora possiamo vedere che si può procedere anche nella direzione inversa: dalla riflessione esplicita all'assioma banalizzando la premessa (nell'esempio, ponendo $\Delta = A$ si ottiene $A\&B \vdash A$) e dall'assioma alla riflessione implicita per composizione (nell'esempio, da $A\&B \vdash A$ a

$$\frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash A},$$

e similmente quando il conseguente è B). Così resta dimostrato che tutte e tre le regole sono equivalenti tra loro.

In definitiva, abbiamo trovato delle regole di deduzione, quelle di formazione e di riflessione esplicita, che insieme sono equivalenti alla equazione definitoria. In questo modo, il desiderio corrispondente è soddisfatto e il nuovo connettivo pienamente definito.

La scoperta principale è che tutti i connettivi delle logiche più familiari sono creati secondo il principio di riflessione e, inoltre, la soluzione delle equazioni definitorie segue sempre lo stesso schema, quello visto sopra.⁹ Riguardando l'esempio di $\&$, si vede subito che tutte le argomentazioni continuano a valere anche dopo aver scambiato il lato sinistro con il lato destro di ciascun sequente; infatti, tutte le nostre assunzioni (identità e composizione) sono pienamente simmetriche. Quindi si può risolvere anche l'equazione $A?B \vdash \Delta$ se e solo se $A \vdash \Delta$ e $B \vdash \Delta$ e, per quanto visto sopra, questo dice dunque che $?$ è un buon connettivo:

⁹Per mancanza di spazio, non posso riprodurre qui una spiegazione visiva, come invece è possibile in una conferenza, ottenuta mostrando prima un lucido con la nuda struttura comune, e poi sovrapponendo un ulteriore lucido per ciascuno dei connettivi.

si vede che si ricavano le usuali regole di deduzione per la disgiunzione \vee (simmetriche a quelle per $\&$). Si noti che non si richiede alcun legame metalinguistico di disgiunzione – per fortuna, dato che non sarebbe facile spiegare un tale legame – una volta che siamo disposti a pagarne il prezzo accettando una regola di formazione per \vee che operi a sinistra.

Un connettivo meno comune è la soluzione di una equazione definitoria più semplice, e cioè $A \otimes B \vdash \Delta$ se e solo se $A, B \vdash \Delta$. Forse qui si coglie più facilmente che \otimes riflette e a sinistra di \vdash : in quella posizione l'asserzione A is e B is può essere equivalentemente sostituita da $A \otimes B$ is. La soluzione qui dà luogo al connettivo \otimes (*times*) della logica lineare di Girard. A dire il vero non è esattamente così, poiché in logica lineare le regole di deduzione hanno dei contesti su entrambi i lati, vale a dire sono ottenute risolvendo l'equazione definitoria $\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta$ se e solo se $\Gamma, A, B \vdash \Delta$, con due parametri liberi Γ e Δ , uno su ciascun lato.

Le equazioni definitorie con un solo parametro (come Δ nell'esempio di \otimes) individuano una nuova logica, strettamente più debole della logica lineare. L'ho chiamata *logica di base* (*basic logic*), perché è la logica più debole possibile che soddisfi il principio di riflessione e perché possiede una struttura concettuale chiara e semplice. Il calcolo dei sequenti \mathbf{B} per la logica di base è simile ad un calcolo dei sequenti (sui due lati) per la logica lineare (senza esponenziali), eccetto che per l'assenza di tutti i contesti a fianco delle formule attive. Il riferimento standard per la logica di base è [Sambin et al., 2000], che contiene ulteriori spiegazioni e dettagli tecnici.

La logica di base fornisce una struttura semplice, in cui tutte le logiche usuali trovano posto. Infatti, operando sul calcolo dei sequenti \mathbf{B} tutte le combinazioni delle azioni \mathbf{L} (ripristinare i contesti alla sinistra), \mathbf{R} (ripristinare i contesti alla destra) e \mathbf{S} (aggiungere le regole strutturali di indebolimento e contrazione), si ottiene un cubo di logiche per le quali valgono le equivalenze indicate nella Fig. 5.

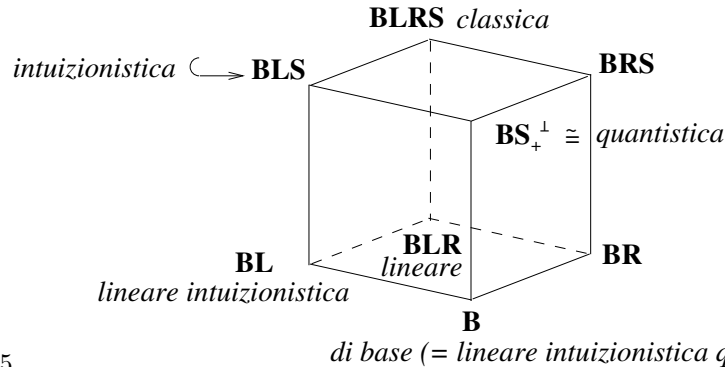


Fig. 5

(N.B. **BLS** è la logica intuizionistica equipaggiata con un connettivo extra, simmetrico dell'implicazione; se equipaggiata con una negazione primitiva, **BS** dà l'ortologica di base, una delle logiche quantistiche deboli).

La fecondità della logica di base da un punto di vista tecnico è confermata da due risultati, che risolvono problemi aperti da lungo tempo. Uno è un facile teorema di normalizzazione delle prove (cut-elimination) per la ortologica, una delle logiche quantistiche più note (vedi [Faggian – Sambin, 1998]). L'altro è una unica procedura di cut-elimination che si applica nello stesso momento a tutte le logiche del cubo, una volta che siano formulate come sottosistemi dello stesso calcolo dei sequenti (vedi [Faggian – Sambin, 1999]).

Ritengo tuttavia che le conseguenze più interessanti della logica di base siano di carattere concettuale. Le regole per gestire i connettivi sono nettamente distinte dalle regole strutturali, che includono anche quelle per i contesti. La logica di base è il nocciolo minimo, privo

di regole strutturali, e questo mette bene in evidenza che ogni logica può essere ottenuta a partire dalla logica di base tramite una scelta di regole strutturali,¹⁰ e cioè delle regole che operano al metalivello in quanto trattano solo con asserzioni. In questo modo l'importante problema di chiarire (e classificare) le diverse nozioni di verità collegate con la diverse logiche viene ridotto "semplicemente" all'analisi delle regole strutturali.

A me sembra che la teoria del significato dei connettivi fornita dal principio di riflessione costituisca un miglioramento rispetto a quella di Dummett e Prawitz. Infatti il significato di ciascun connettivo non è dato da una regola di introduzione, ma da una equazione definitoria, che ad un tempo fornisce una chiara descrizione del comportamento del connettivo e specifica esattamente come è creato. Di conseguenza, si può derivare non solo la regola di eliminazione, ma anche quella di introduzione (si noti che "introduzione" talvolta è ciò che io chiamo formazione, e talvolta quel che chiamo riflessione, e questo è il motivo per cui ho scelto di cambiare terminologia). In questo modo si vede bene che tutte le regole di deduzione sono derivabili dal significato del connettivo; tale derivazione è inoltre ottenuta usando solo gli strumenti specificati all'inizio, e che prevedono l'utilizzo di due soli legami metalinguistici.

In ogni logica nel cubo ogni connettivo è definito da una equazione definitoria, la cui soluzione è ottenuta applicando sempre lo stesso metodo. Tutte le logiche nascono perciò nello stesso modo, indipendentemente dalla scelta delle regole strutturali. Si può dunque concludere che il rapporto dinamico tra metalinguaggio e linguaggio fornisce una struttura comune a tutte le logiche – proponendosi pertanto come soluzione di un'importante questione filosofica – e che questa risulta più generale e profonda di ogni specifica nozione di verità.

Queste brevi osservazioni dovrebbero almeno suggerire come la logica di base sia d'aiuto nel "mettere ordine" nello spazio delle logiche. Si deve però essere cauti, e non ci si deve aspettare un nuovo assoluto; potrebbe anche darsi una struttura ancora più profonda, che al momento non è ancora emersa. Ad esempio, la logica di base non-commutativa è del tutto possibile, è strettamente più debole della logica di base, e ha già destato l'interesse di alcuni linguisti.

4.6 La basic picture

Spesso si presume che l'adozione di una fondazione più "debole" debba dar luogo ad un corpo di verità "più piccolo". Questo ha senso soltanto se si intende la verità come indipendente da noi e immutabile; in tal caso naturalmente non si vede alcun reale motivo per qualunque forma di auto-limitazione e bisogna dire che qualche costruttivista ha contribuito ad alimentare questa falsa impressione.

Qualificare il costruttivismo come "dinamico" significa rifiutare appunto l'idea che si debba fissare una fondazione una volta per tutte: questo la renderebbe statica! Non si tratta di "salvare" la matematica tramite una fondazione fissata: non ci sono bacchette magiche – che rispondano al nome ZFC, teoria delle categorie o perfino teoria costruttiva dei tipi – che siano in grado di trasformare automaticamente in matematica significativa tutto quel che si riesce ad esprimere al loro interno. Infatti la complessità della matematica non si può ridurre a certi ingredienti fissi (logica, formule, intuizione, insiemi, categorie, ...). Piuttosto, uno ad uno ciascun pezzo della matematica, nel momento in cui è sviluppato, dovrebbe essere accompagnato anche della cornice concettuale sottostante più semplice e più convincente, grazie alla quale sia possibile spiegare fedelmente la peculiare natura di quel frammento.

In un approccio dinamico, una fondazione più "debole" è semplicemente un mezzo per mantenere distinzioni più raffinate e per ottenere un migliore controllo dell'idealizzazione,

¹⁰Questo è anche formalmente preciso se si adotta il calcolo dei sequenti **UB** di [Faggian – Sambin, 1999].

cioè sapere quali elementi di informazione sono stati mantenuti e quali sono stati scartati (vedi anche [Sambin – Valentini, 1998]). Un vantaggio è che talvolta può emergere una struttura profonda, la cui presenza era prima nascosta dalle assunzioni fondazionali. Abbiamo appena visto l'esempio della logica di base; ora vedremo un altro esempio tipico, che ho chiamato *basic picture*, e che è appunto una struttura sottostante la topologia.

Si può ottenere una teoria dei sottoinsiemi pienamente costruttiva (intuizionistica e predicativa) concependo un sottoinsieme di un dato insieme S come un predicato, o funzione proposizionale, sopra S , e cioè una proposizione $U(a)$ che dipende da una variabile a che spazia su S (vedi [Sambin – Valentini, 1998]). Per ogni elemento $a \in S$, scriviamo $a \in U$ per significare che $U(a)$ vale. Il passo successivo è considerare due insiemi, chiamiamoli X e S , legati nel modo più semplice possibile, vale a dire da una relazione binaria \Vdash (*forcing*), cioè una funzione proposizionale $x \Vdash a$ con due argomenti, $x \in X$ e $a \in S$. Chiamo questo una *coppia di base* (*basic pair*).

Per ogni sottoinsieme $U \subseteq S$ si definisce l'anti-immagine esistenziale di U lungo la relazione \Vdash come il sottoinsieme

$$\text{ext } U \equiv \{x \in X : (\exists a)(x \Vdash a \ \& \ a \in U)\}.$$

Similmente,

$$\text{rest } U \equiv \{x \in X : (\forall a)(x \Vdash a \rightarrow a \in U)\}$$

definisce l'anti-immagine universale di U lungo \Vdash . È da notare la dualità logica stretta: $x \in \text{rest } U$ è espressa da una formula che è ottenuta da quella che esprime $x \in \text{ext } U$ sostituendo formalmente \exists e $\&$ con i loro duali in teoria dei tipi, rispettivamente \forall e \rightarrow .

In modo del tutto simmetrico, le immagini esistenziali ed universali lungo \Vdash di un sottoinsieme $D \subseteq X$ sono definite rispettivamente da

$$\diamond D \equiv \{a \in S : (\exists x)(x \Vdash a \ \& \ x \in D)\} \quad \text{e} \quad \square D \equiv \{a \in S : (\forall x)(x \Vdash a \rightarrow x \in D)\}.$$

Questo basta per illustrare la prima scoperta. Si pensi ad X come un insieme di punti, S come un insieme di intorni formali, ovvero nomi per intorni di punti in X , e infine $x \Vdash a$ come x giace in a , o x appartiene alla estensione di a . In questo modo la usuale definizione di interno di un sottoinsieme $D \subseteq X$ diventa

$$\text{int } D \equiv \{x \in X : (\exists a)(x \Vdash a \ \& \ (\forall z)(z \Vdash a \rightarrow z \in D))\};$$

ora si vede subito che questo non è altro che la composizione di ext dopo \square , cioè

$$\text{int } D = \text{ext}(\square D).$$

E a questo punto si vede anche che la chiusura di D , definita come è usuale da

$$\text{cl } D \equiv \{x \in X : (\forall a)(x \Vdash a \rightarrow (\exists z)(z \Vdash a \ \& \ z \in D))\},$$

è esattamente il duale logico dell'interno, cosicché si ha

$$\text{cl } D = \text{rest}(\diamond D).$$

Per simmetria, si può definire un'altra coppia di operatori, definiti sui sottoinsiemi di S , ponendo

$$\mathcal{A}U \equiv \square(\text{ext } U) \quad \text{e} \quad \mathcal{J}U \equiv \diamond(\text{rest } U)$$

per ogni $U \subseteq S$. Anche l'operatore \mathcal{A} ha un contenuto topologico, in quanto non è che il principale operatore della topologia formale, quello che dà gli aperti formali di S . La novità

qui è l'operatore \mathcal{J} , al quale si arriva puramente applicando simmetria e dualità logica; ha anch'esso un contenuto topologico, che è quello di definire i sottoinsiemi chiusi di S . Diciamo che D è *aperto concreto* se $D = \text{int}D$ e *chiuso concreto* se $D = \text{cl}D$. Simmetricamente, diciamo che U è *aperto formale* se $U = \mathcal{A}U$ e *chiuso formale* se $U = \mathcal{J}U$. Al pari di int , \mathcal{J} è, per simmetria, un operatore di interno e, al pari di cl , \mathcal{A} è, per lo stesso motivo, un operatore di chiusura. Pertanto i sottoinsiemi aperti e chiusi, concreti e formali, formano reticoli completi. Tutta la struttura è rappresentata nella Fig. 6.

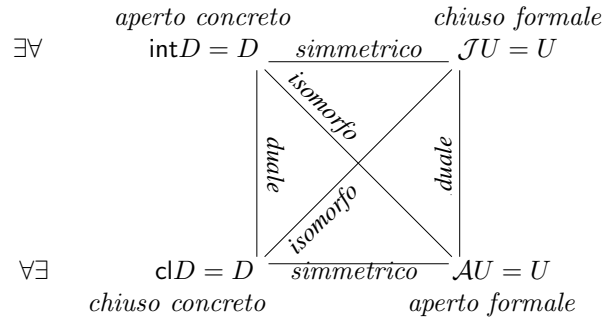


Fig. 6

L'isomorfismo tra il reticolo dei sottoinsiemi aperti concreti e quello degli aperti formali, e similmente per i chiusi, conferma la correttezza delle definizioni.

Per ottenere una topologia nel senso usuale sopra l'insieme X , basta aggiungere la condizione che il sistema degli intorni di ciascun punto sia convergente; questo è collegato alla distributività del reticolo degli aperti formali.

La struttura appena illustrata, cioè la *basic picture*, sta sotto sia alla topologia usuale, con punti, sia alla topologia formale, senza punti. Essa include anche una struttura simile, pure simmetrica, che sta sotto la nozione di continuità. Inoltre, mostra che è possibile sviluppare il campo della topologia non distributiva, in cui la simmetria tra concreto e formale, e tra aperto e chiuso, rimane ancora intatta.

Questo breve sommario dovrebbe almeno rendere curioso il lettore, e bastare, in ogni caso, per mostrare come la topologia nasca "semplicemente" nel passaggio da uno a due insiemi (legati da una relazione), e come sia profondamente legata alla logica. Si potrebbe sostenere, addirittura, che le nozioni topologiche sono solo un modo veloce e conveniente per trattare combinazioni di quantificatori.

È importante osservare anche come un nuovo atteggiamento fondazionale, come quello adottato, generi non solo nuove comprensioni, ma anche nuova matematica. Un esempio è proprio l'operatore \mathcal{J} , che dà luogo alla nuova nozione di predicato di positività binario. Questo è il duale di una copertura formale, anche nel senso che è generato per co-induzione, invece che per induzione.¹¹

4.7 Commenti e problemi aperti

La logica di base e la *basic picture* sono emersi come due particolari naturali finora non osservati nel paesaggio della logica e della matematica. I loro ingredienti principali sono concetti universali e semplici: simmetria, dualità logica, convergenza tra linguaggio e metalinguaggio. (Per la *basic picture*, la logica necessaria è solo la logica dei predicati intuizionistica,

¹¹Maggiori informazioni sulla *basic picture*, e ulteriori commenti filosofici utili allo sviluppo della matematica costruttiva, sono in [Sambin, 2002].

e qualunque teoria degli insiemi è sufficiente, purché un insieme possa essere dominio di un quantificatore.) Inoltre, ci aiutano a spiegare molti fatti della logica e della topologia, inserendoli in una struttura generale ma del tutto elementare. In realtà tali strutture – in particolare il principio di riflessione espresso mediante l’equazione definitoria in logica di base, e le equazioni $\text{int} = \text{ext} \square$ e $\text{cl} = \text{rest} \diamond$ nella *basic picture* – sono così elementari che avrebbero potuto essere introdotte in qualsiasi momento a partire dagli anni ‘20 o ‘30 del secolo scorso. Per quanto incredibile, sono passate inosservate – stando a quel che so – fino ad oggi. È molto naturale domandarsi: perché sono emerse proprio ora? Riflettendo, questo fatto è meno sorprendente se si tien conto della rigidità degli atteggiamenti ideologici. Paradossalmente, è proprio il fatto che nessuna specifica fondazione sia richiesta che ha reso la loro scoperta più difficile, invece che più facile. Si pensi alla *basic picture*. Potrebbe un intuizionista ortodosso averla vista? Certamente no, per via della sua idiosincrasia verso il linguaggio formale: è praticamente impossibile vedere le simmetrie e le dualità logiche senza mai scrivere segni come, per esempio, \forall e \exists per i quantificatori. La logica classica, in cui un formalista crede di tutto cuore, fa collassare tutta la struttura e la rende invisibile, in quanto per il principio di doppia negazione l’operatore cl soddisfa $\text{cl} = \text{int}$ e quindi cl risulta definibile tramite int , e similmente per \square , nello stesso modo in cui in logica classica \forall è definibile come $\neg\exists\neg$. E infine, per chi crede nell’insieme delle parti, come certamente fanno i platonisti, la scoperta non sarebbe mai stata nemmeno concepita, perché non c’è alcun bisogno di presentare la base di uno spazio topologico come indicata da un secondo insieme, come S visto sopra. Analoghe osservazioni si applicano alla logica di base; si noti soltanto che tecnicamente nulla è richiesto oltre al metalinguaggio (fatto che deve essere accettato almeno dal tempo dei teoremi di Gödel) e al calcolo dei sequenti (noto fin da Gentzen).

Il fattore principale che ha impedito finora la scoperta di queste strutture sembra quindi essere un blocco ideologico. La conclusione è che un atteggiamento mentale capace di una fondazione più libera e meno dogmatica, tiene aperta la possibilità di nuove scoperte. Una fondazione più “debole”, con assunzioni meno rigide sulla natura della matematica, può essere più in consonanza con i nostri processi mentali, e quindi aiutarci a vedere strutture profonde rese invisibili, annientate e in tal senso distrutte, da una fondazione più “forte”. In questo senso preciso, sono le fondazioni più forti che diventano una irragionevole auto-limitazione, qualcosa come può essere fare l’amore indossando un paio di guanti da boxe.

La logica di base e la *basic picture*, che qui ho brevemente descritto, sono solo l’inizio di uno sviluppo della logica e della matematica libere da ogni vincolo metafisico. Eppure esse mostrano che tale sviluppo è possibile. Nell’ambito del costruttivismo dinamico c’è ancora molto lavoro tecnico da fare e ancora molti sono i problemi aperti da risolvere. Tra questi, ce ne sono tre che mi sembrano particolarmente significativi. Abbiamo visto che la logica può essere giustificata mediante il principio di riflessione, e cioè con l’interazione dinamica tra linguaggio e metalinguaggio. Mi aspetto che qualche forma di teoria degli insiemi possa essere spiegata mediante lo stesso principio. Il primo problema aperto è dunque trovare lo sviluppo matematico di una tale aspettativa filosofica; una soluzione sarebbe estremamente rilevante per lo sviluppo della matematica senza assunzioni metafisiche. La mia impressione è che si arriverà ad un frammento della teoria costruttiva dei tipi.

Il secondo problema è trovare una semantica matematica completa per la logica di base. Poiché la logica di base produce tutte le logiche note in modo modulare, ci si aspetterebbe di poter formulare una semantica che, in modo altrettanto modulare, possa produrre le semantiche ben note per le logiche ben note. È naturale aspettarsi che potrà essere la *basic picture* a fornire l’ambiente giusto per una corretta definizione di validità, in quanto, come la logica di base, è non distributiva e basata sulla simmetria.

Un teorema di Gödel e Kreisel dice che non c’è alcuna possibile semantica ingenua, che

sia completa per la logica intuizionistica. Ma l'estensione BLS della logica di base non è esattamente la stessa cosa che la logica intuizionistica, in quanto ha un connettivo in più, simmetrico dell'implicazione. Quindi aggiungendo tale connettivo, e introducendo una nuova nozione di semantica (eventualmente una in cui sia definita anche la refutabilità delle formule, e non solo la loro validità), si potrebbe sperare di ottenere una semantica ingenua completa. Questo è il terzo problema, la cui soluzione positiva rappresenterebbe un ulteriore importante contributo del costruttivismo dinamico.

Tutto questo mostra quanto sia vitale la nuova filosofia.

Epilogo

Siamo così arrivati alla conclusione. Come si è visto, ho scelto un nuovo nome, ma non è mio intento proporre una nuova ricetta che prenda il posto di quelle che ci sono sul mercato, una nuova “fondazione finale”, per il semplice motivo che tale fondazione non c'è. Talvolta mi sono espresso molto soggettivamente, mettendo in scena me stesso e le mie esperienze (come i ricordi con mio padre, i problemi attuali con la mia cucina,...). So bene che questo non è nello stile usuale di una comunicazione scientifica, ma certamente è del tutto coerente con il punto di vista che ho cercato di illustrare. È solo attraverso gli individui, con le loro intuizioni e tutta la loro soggettività, che si possono raggiungere nuove verità. La verità nasce come verità soggettiva; solo se accettata anche da altri, in seguito, può diventare universale e infine resa oggetto a disposizione di tutti, cioè oggettiva. In termini più specifici, tutto quel che ho detto in questo articolo è il risultato di ciò che sono riuscito a capire, quello a cui ho lungamente e profondamente pensato, per cui ho sofferto, e di cui ora sono convinto fermamente, e, infine, quello che qui ho cercato di sostenere. Adesso tocca a voi: potete valutare, scegliere cosa rifiutare e cosa fare vostro, trovare risposte migliori,... I contributi da parte vostra quasi certamente modificheranno le mie vedute. È proprio così che il processo dinamico non ha fine.

Bibliografia

- [Boolos, 1998] Boolos, G. (1998). ‘Must We Believe in Set Theory?’ in G. Boolos, *Logic, Logic, and Logic*. Harvard U. P., Cambridge, MA, pp. 120–132
- [Dennett, 1995] Dennett, D. C. (1995). *Darwin’s Dangerous Idea: Evolution and the Meanings of Life*. Simon & Schuster, New York. (trad. it. L’idea pericolosa di Darwin. L’evoluzione e i significati della vita, Bollati Boringhieri 1997)
- [Edelman, 1992] Edelman, G. M. (1992). *Bright Air, Brilliant Fire: On the Matter of the Mind*. (trad. it. Sulla materia della mente, Adelphi 1993)
- [Faggian – Sambin, 1998] Faggian, C. – Sambin, G. (1998). ‘From basic logic to quantum logics with cut-elimination’, *International Journal of Theoretical Physics* 37(1), pp. 31–37.
- [Faggian – Sambin, 1999] Faggian, C. – Sambin, G. (1999). ‘A unified approach to logical calculi and normalization of proofs’, Lecture Notes of the 11th European Summer School in Logic, Language and Information (ESSLLI), Utrecht University.
- [Gentzen, 1935] Gentzen, G. (1935). ‘Untersuchungen über das logische Schliessen’, *Mathematische Zeitschrift* 39, pp. 176–210. English translation in ‘*The collected papers of Gerhard Gentzen*’, (M.E. Szabo ed.) North-Holland (1969), pp. 68–131.
- [Hilbert, 1985] Hilbert, D. (1985). ‘Ricerche sui fondamenti della matematica’, a cura di V. M. Abrusci. Bibliopolis (1969), pp. 492.
- [Sambin, 1987] Sambin, G. (1987). ‘Alla ricerca della certezza perduta (Forma-contenuto nei fondamenti della matematica)’, In *Forma Rappresentazione Struttura*, a cura di O. Longo, Laboratorio servizio tecnologia, Napoli, pp. 17–35.
- [Sambin, 1991] Sambin, G. (1991). ‘Per una dinamica nei fondamenti’, In *Atti del Congresso ‘Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza’*, a cura di G. Corsi e G. Sambin, Bologna, CLUEB, pp. 163–210.
- [Sambin, 1998] Sambin, G. (1998). ‘Matematica, logica e verità, verso un risanamento’, In *Matematica e Cultura*, a cura di M. Emmer, Springer Italia, pp. 35–41
- [Sambin et al., 2000] Sambin, G. – Battilotti, G. – Faggian, C. (2000). ‘Basic logic: reflection, symmetry, visibility’, *Journal of Symbolic Logic*, 65 (2000), pp. 979-1013.
- [Sambin, 2002] Sambin, G. (2002). ‘Some points in formal topology’, *Theoretical Computer Science*, to appear (disponibile su www.math.unipd.it/~sambin).
- [Sambin – Valentini, 1998] Sambin, G. – Valentini, S. (1998). ‘Building up a toolbox for Martin-Löf’s type theory: subset theory’, In *Twenty-five years of constructive type theory*, a cura di G. Sambin e J. Smith, Oxford U. P., pp. 221–244.