PER ISTRUIRE UN ROBOT

ovvero, come costruirsi una logica

Giovanni Sambin
sambin@math.unipd.it

Capitolo secondo - prima parte

Attenzione: versione provvisoria

Istruire un robot.

1. Asserzioni composte e principio di riflessione.

Gli ultimi temi affrontati nel capitolo precedente sono stati le proposizioni e le proposizioni con atteggiamento. Abbiamo già osservato che la logica si occupa soltanto dell'atteggiamento di dichiarazione, o asserzione. E quindi in logica ci si limita a considerare soltanto quelle espressioni-con-contenuto che possono essere sensatamente dichiarate. Forzando un po' il significato della parola, le chiameremo proposizioni: vogliamo considerare anche `ho una banconota da 500 euro` come una dichiarazione, o asserzione, e quindi dobbiamo considerare `una banconota da 500 euro` come una proposizione!

Se A sta per una proposizione (nel senso generale appena detto), allora scriviamo A *vale* oppure A *ass* oppure anche A *dich* per la dichiarazione che A vale o che A è asserita, dichiarata,...

Con questa scrittura si vuole indicare una qualunque dichiarazione. Forse la più comune è che A è vera, ma potrebbe essere anche A è verificata, A è disponibile (se A è una risorsa) o A è misurabile (se A è una grandezza fisica) o A accompagnata da qualche altra asserzione (che comunque non sia una domanda, o un ordine, o una preghiera, o un desiderio, ...). Non interessa quale considereremo tra ciascuna di queste, ma le riassumeremo tutte con A *vale* oppure A *ass*, che vuol dire "A asserita", o meglio A è una proposizione, ed è asserita. L'importante per noi in questa fase non è distinguere ciascuna di queste diverse asserzioni, ma distinguere la proposizione dall'asserzione e ricordare che stanno ad un diverso livello. Possiamo dire che se A sta in un certo linguaggio, allora A *vale* sta nel metalinguaggio rispetto a quello.

Ora vediamo anche come comporre asserzioni più complesse, a partire da asserzioni semplici. La metafora della macchina, di cui abbiamo già parlato, ora ci torna molto utile. Infatti, cercando di far esprimere al robot asserzioni complesse, saremo portati ad introdurre nuove proposizioni, e le regole con cui gestirle saranno esattamente le regole di deduzione della logica. Quindi dai concetti del capitolo precedente, che sembrano così generali, in realtà arriveremo in modo graduale, e abbastanza rapido, alle regole di base della logica.

D'ora in poi $A, B, C, ...$ staranno per generiche proposizioni, nel senso di espressioni con un contenuto, per le quali abbia senso asserire "A vale".

Quando si scrive A, naturalmente dovremo intendere che quel che si è stabilito valere per A, varrà qualunque sia la proposizione di cui A è simbolo. In altri termini, A, e lo stesso per B, C,..., sono variabili per proposizioni, cioè possono essere sostituite da una qualunque proposizione. Le useremo nello stesso modo in cui si usa una variabile in matematica, come ad esempio quando si dice "sia x un numero reale". Come per le variabili, assumeremo che all'interno di uno stesso discorso, A indichi la stessa proposizione ora o fra trenta secondi.

$A, B, C, \ldots$ non sono le uniche proposizioni di cui parleremo; parleremo anche di proposizioni che dipendono da una variabile. Un esempio tipico puèssere: $B(x)$, che leggiamo come "x ha un bel fisico". Se non sappiamo chi è x, questa non è una proposizione, ma sechiariamo chi è l'individuo da sostituire al posto di x, quella diventa una proposizione. Ad esempio, consideriamo il solito Mario che non vuole mai passare gli esami, possiamo dire "Mario ha un bel fisico", a quel punto è diventata una proposizione. Peò posso anche dire Filippo ha un bel fisico ed anche quella è una proposizione e quindi posso arrivare al concetto generico di avere un bel fisico, che è una proprietà che si può predicare su un qualche individuo ed infatti questo qualche volta si chiama predicato e questo individuo lo indichiamo con una variabile x. Questo è un concetto che ci porteremo avanti sempre ed è fondamentale.

Vediamo altri esempi. $P(n)$ ha la stessa forma, ma in questo caso lo pensiamo come n è un numero pari, per esempio. Anche questa non è una proposizione. ma diventa una proposizione quando specifichiamo chi è n; diventa una proposizione vera se scegliamo un numero pari, per esempio 4 è un numero pari, diventa falsa se mettiamo un numero dispari.

Ci sono anche predicati che non dipendono da una variabile, ma da due; si chiamano relazioni. Per esempio, $A(x, y)$ potrebbe essere x ama y, o $F(x, y)$ dove F è la relazione figlio di, o $O(x, z)$, x odia z.

Ci sarebbero moltissime cose da dire su questa scrittura delle proposizioni, ne dico una sola. Voglio farvi osservare la mancanza del verbo essere. Quando scrivo x ha un bel fisico, o $A(x)$, x è alto, questa "è" che nel latino si chiamava copula, non c'è più, non abbiamo più bisogno del verbo essere. Non abbiamo: soggetto - verbo essere - predicato ma la forma della frase è direttamente la proprietà, un qualche predicato, quindi che include il verbo essere, su un qualche individuo. Qual è il vantaggio? che potrebbe essere un verbo diverso, come ha (un bel fisico), oppure odia, oppure qualunque altra azione. Quello che ci importa è una cosa sola: sapere che quando sostituiamo al posto delle variabili, x oppure x e y, oppure x e z ne w ecc. , un individuo per ogni variabile, quel che otteniamo è una proposizione. Questo è quello che ci importa.

Un piccolo cenno di storia: questo passo non c'era nella logica classica di Aristotele, e in estrema sintesi questo è il passo in avanti della logica matematica moderna (e vedremo quanto potente) fatto circa nel 1879, la data di pubblicazione di un testo importante (il *Begriffscrift...* di G. Frege). Non importa che le variabili siano individui, potrebbero essere altri termini: posso avere $N(x, g)$, x è nato o nata nel giorno g. Quindi posso mettere insieme anche variabili di tipo diverso, una persona con una data, oppure una persona con un oggetto, ad esempio $T(x,z)$, x possiede z, ad esempio quel tizio ha una Ferrari, è una relazione che lega x con un oggetto, una Ferrari in questo caso, poteva essere una Lamborghini, una FIAT. Naturalmente questo è solo preparatorio per vedere che cosa può dire la logica su queste cose, il naturalmente era

Dovrebbe essere chiaro che la logica non ha nulla da dire su queste proposizioni al loro interno; se il tizio ha una Ferrari o no, è un fatto della vita, non è logica, se quell'altro tizio ha un bel fisico o no, oltre a essere una opinione soggettiva, è un fatto del mondo, non è un fatto di logica. La logica dove interviene? La logica interviene nel momento in cui si combinano proposizioni per fare proposizioni più complesse, che è quello che facciamo sempre, perchè raramente si incontrano proposizioni atomiche semplici come queste. La logica interviene per dire come si formano le proposizioni in modo corretto e come si passa correttamente da proposizioni complesse di una certa forma a proposizioni complesse di un'altra forma, tutto ciò è molto semplice e un po' alla volta lo capiremo. Lo vediamo subito con esempi. Come al solito partiamo da esempi pratici e cerchiamo di capire che cosa voglio comunicarvi. Un esempio pratico è: il sole splende e il mare è calmo, ho combinato due proposizioni con una $\underline{e}$, cosa che aumenta il piacere della gita, supponiamo di essere in barchetta al mare... Abbiamo formato una asserzione complessa formata dalla congiunzione di due asserzioni, però ci sono mille altri modi. Ci sono asserzioni complesse meno semplici, un po' più complesse. Per esempio: ho freddo ma anche fame.

Questo è un modo per mettere insieme due proposizioni che non è semplice come quello di prima (il mare è calmo e il sole splende). La logica per poter trattare la questione in un modo preciso ha bisogno di semplificare un po', quindi per esempio ho freddo ma anche fame per noi diventerà la stessa cosa che: ho freddo e ho fame, il "ma" lo perdiamo, è un prezzo da pagare per riuscire a essere precisi. È una scelta che facciamo noi e vi dirò poi con che criterio.

Facciamo altri esempi. Luigino ha un bel fisico eppure non è stupido. Questa frase in realtà è molto complessa e vale la pena analizzarla un po' di più. Questa frase vuol dire le seguenti cose: tutti quelli che hanno un bel fisico sono degli stupidi, Luigino ha un bel fisico, dovrei dedurre che è stupido, in realtà ho osservato che non lo è. Questa è l'argomentazione che viene riassunta da quella frase, siamo d'accordo? Ora ho bisogno di riassumere quella frase con una asserzione complessa. Anche qui vi sembra strano ma la semplificazione che si fa è dire semplicemente: Luigino ha un bel fisico e non è stupido. Quindi potremmo dire: se avere un bel fisico era B usiamo una lettera l piccola, come sempre per gli individui d'ora in poi, per dire Luigino, $B(l)$ vorrà dire Luigino ha un bel fisico e possiamo dire che $NST(x)$ voglia dire x non è stupido, quindi Luigino non è stupido sarebbe $NST(l)$: "eppure non è" diventa semplicemente una congiunzione. E la frase di partenza sarebbe espressa da: $B(l)\ ass\ \underline{e}\, NST(l)\ ass$.

Vorrei insistere su una cosa che ho già detto ma forse vi è sfuggita e la ripeto. Siamo noi che decidiamo come semplificare, non c'è nessun criterio prestabilito per motivi di leggi della fisica o simili. Sceglieremo un modo per semplificare che ci convinca, ma è una scelta che facciamo noi, tanto è vero che scelte diverse danno luogo a risultati diversi, come vedremo. Stiamo scegliendo come semplificare la formazione di asserzioni complesse a partire da asserzioni semplici in modo da poter avere un apparato semplice, preciso ed efficace il più possibile. Naturalmente questo è un compromesso che si deve fare, si deve scegliere di abbandonare l'espressione di alcune distinzioni della lingua, ma non possiamo abbandonarle tutte e dire che le asserzioni si combinano tutte in un solo modo, altrimenti perde completamente l'interesse. Ci vuole un compromesso tra efficacia ed espressività, capacità espressiva delle varie distinzioni possibili.

Una volta che abbiamo trasformato le frasi della lingua italiana in proposizioni complesse, a quel punto potremo mettere in moto i meccanismi di deduzione, appunto, la logica, il cuore della logica, il motore della logica. Queste deduzioni si incontrano sempre nella vita di tutti i giorni, cercherò di farvi degli esempi anche di queste dalla vita di tutti i giorni; ma, per poter analizzare in un modo preciso e rigoroso le argomentazioni che si fanno nella vita di tutti i giorni, il primo passo è prima trasformarle in proposizioni complesse in un certo modo e vedere con che regole si opera sulle proposizioni complesse. Esempio: una frase più o meno testuale che ho letto sul giornale qualche giorno fa, però cambio i nomi e quindi non esprimo opinioni politiche e non dico chi l'ha detto Solo un pazzo nega la realtà politica emersa dalle elezioni e z la nega. a dice: solo un pazzo nega la realtà politica emersa dalle elezioni e b la nega. Questo è un modo del politichese per dire che b è pazzo, c'è una deduzione sotto abbastanza semplice che si lascia al lettore perchè è poco elegante dire ad uno direttamente tu sei pazzo, si lascia che la deduzione la faccia il lettore o chi ascolta, questo fa parte del linguaggio della politica. Però per arrivare a concludere quello che si vuole, il lettore o l'ascoltatore deve fare una certa deduzione; noi vogliamo analizzare queste deduzioni, ma per poterlo fare dobbiamo trasformare le frasi italiane in asserzioni atomiche combinate tramite questi connettivi che stiamo cercando di conoscere. È chiaro lo scopo?

Un altro esempio: Quando la temperatura scende sotto lo zero, l'acqua gela. Di solito questo è un legame diverso da quelli visti finora, è un legame di conseguenza; noi lo leggiamo come equivalente a dire se la temperatura va sotto lo zero, allora l'acqua gela.

Le proposizioni $A, B, C, ...$ possono anche dipendere da variabili, e quindi includono anche le proprietà, cioè funzioni proposizionali dipendenti da una variabile, come $P(x)$, $Q(z)$,... e relazioni, cioè funzioni proposizionali con due o più variabili come $R(x, y)$, ecc. Possono poi essere "unite", collegate tramite quelle che chiamiamo costanti logiche del linguaggio (quantificatori e connettivi); in questo modo si producono proposizioni più complesse, che a loro volta possono essere collegate tra lor, ecc. Questo crea un "movimento" tra le proposizioni che altrimenti rimarrebbero "ferme" e tutte allo stesso livello.

Nel linguaggio comune vi sono molti modi per mettere assieme proposizioni o asserzioni (spesso la distinzione tra le due non è chiara), come, per esempio, *e, ma, tuttavia, sebbene, e anche, se... allora, o, oppure, nonostante, implica, quindi, pertanto,* ecc.

La logica, però, cerca la base comune del linguaggio per poterne parlare in astratto, per questo in realtà si vede che ci si può ridurre a due soli modi di mettere insieme asserzioni mediante quelli che chiameremo legami tra asserzioni o legami metalinguistici, intendendo con "legame" ciò che mette assieme due cose, nel nostro caso due asserzioni, e con "metalinguistico" il fatto che quei legami operano a livello del metalinguaggio. Uno è la congiunzione $\underline{e}$ tra asserzioni e uno è la conseguenza $\underline{comporta}$ tra asserzioni.[1] Per essere sicuri di non confonderci, li sottolineiamo sempre:

$$A\ ass\ \underline{e}\ B\ ass \qquad A\ ass\ \underline{comporta}\ B\ ass$$

$\underline{comporta}$ sarà spesso abbreviato con $\underline{comp}$. È fondamentale distinguere tra legami metalinguistici (o legami tra asserzioni, che servono per formare asserzioni complesse) e connettivi (che definiremo tra poco, che servono per formare proposizioni complesse).

È difficile spiegare cosa intendiamo con $\underline{e}$ e $\underline{comp}$ senza fare giri di parole, ovvero senza cadere in circoli viziosi. Quindi in un certo senso non riusciamo a rendere oggettivo fino in fondo ciò che esattamente assumiamo su tali legami, proprio perché sono le nostre nozioni, da cui dobbiamo partire e che dobbiamo dare per scontate. In qualche senso, la trattazione deve restare un po' informale, poco formalizzata, proprio perché $\underline{e}$ e $\underline{comporta}$ sono semplicemente una scrittura abbreviata per la congiunzione e la conseguenza che usiamo sempre. Per questo la definizione di asserzione composta non verrà resa in termini "matematici" (ad esempio, con una definizione per induzione[2]).

Ad esempio, sia A la proposizione `Il mare è calmo` e B sia `La luna splende`. L'asserzione $A\ ass$ vuol dire che è vero che il mare è calmo. Possiamo unire, cioè fare una congiunzione tra le due asserzioni: $A\ ass\ \underline{e}\ B\ ass$ sarà un'asserzione composta: `è vero che il mare è calmo ed è vero che la luna splende.` "È vero che" non si dice quasi mai, resta spesso sottointeso. Una difficoltà nel distinguere una proposizione da un'asserzione è che di solito questa distinzione nella lingua non si fa e rimane implicita, ma questo non vuol dire che non ci sia.

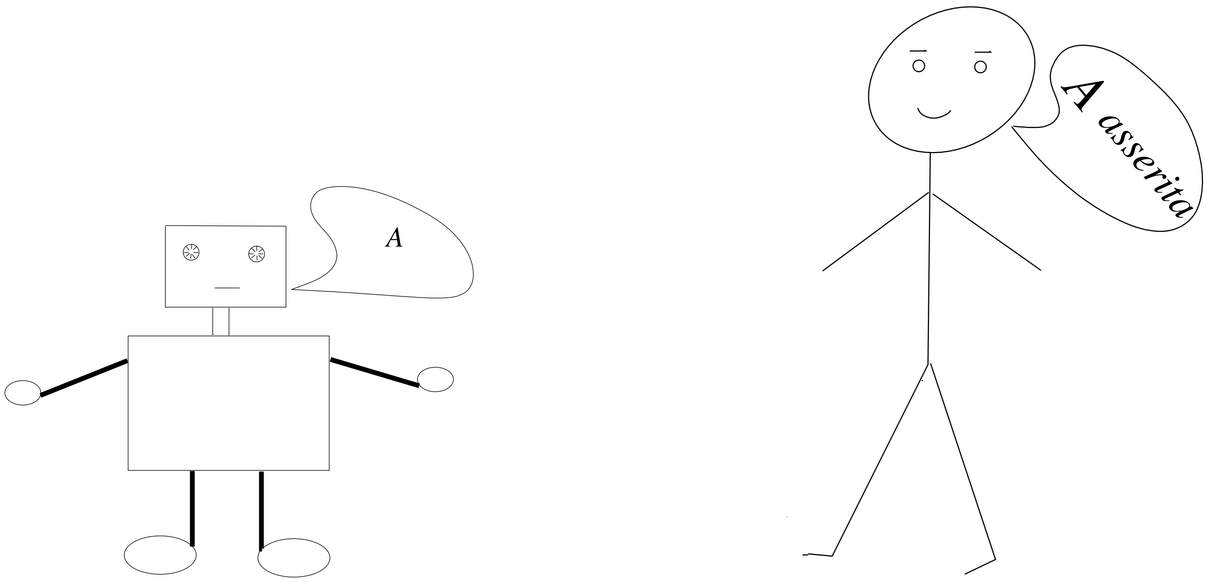
L'altro legame che consideriamo è $\underline{comp}$. Siano A la proposizione `Cade la pioggia` e B `Mi bagno`. L'asserzione composta $A\ vale\ \underline{comp}\ B\ vale$, cioè `Cade la pioggia vale` $\underline{comp}$ `mi bagno vale` ha il significato che s'intende abitualmente, cioè se vale A, allora vale anche B, ovvero "Il fatto che cada la pioggia comporta che io mi bagni". È importante notare che a differenza di $\underline{e}$ questo $\underline{comporta}$ ha un verso. L'asserzione $\underline{comporta}$ descrive un movimento, quello che permette di passare da un'asserzione all'altra: se $A\ vale$ e $A\ vale\ \underline{comp}\ B\ vale$, allora $B\ vale$.

Quello che faremo ora sarà usare la metafora del robot per capire nel modo migliore quali sono le regole di produzione o di deduzione. Nostro scopo è insegnare la logica ad una macchina e questo ancor prima di averla capita noi stessi. Infatti, questo ci obbligherà a capirla bene e meglio. Ecco

[1]Questa è la terminologia che si userà qui.

[2]Una definizione induttiva, come daremo in seguito per la nozione di termine e di formula, non è possibile qui perché automaticamente renderebbe le asserzioni un oggetto e quindi non più parte del metalinguaggio, quello che usiamo noi.

che torna utile l'osservazione che il robot non è consapevole, è una macchina che resta ad un solo livello. Così, se il robot dice A, esso proferisce l'espressione; siamo noi quindi che quando esso proferisce A, capiamo e pensiamo che abbia detto A *ass*, dato che esso non sa fare asserzioni, ma può soltanto combinare espressioni sulla base del linguaggio e delle regole di combinazione dei segni che gli abbiamo già dato.[3]



Non si puó spiegare al robot quale atteggiamento debba avere rispetto ad una proposizione (l'asserzione è un atteggiamento, dunque in realtà il fatto che asserisca, è una nostra interpretazione del messaggio che il robot ci può dare). In ogni caso quando il robot dice: "A", siamo noi che lo interpretiamo come: "A *vale*". Il problema è che se io dico: "A *vale*" lui deve dire: "A", ma se io dico "A *vale* $\underline{e}$ B *vale*" lui come fa?

Siccome il robot è al livello del linguaggio e non riesce a trascendere il livello in cui si trova per arrivare al metalinguaggio, dobbiamo fare in modo che nel suo linguaggio ci sia una nuova proposizione che proferita dal robot abbia lo stesso significato di quello che ha per noi l'asserzione composta.

Quindi vogliamo una proposizione C tale che, detta dal robot, faccia capire a noi C *ass*, che deve equivalere ad A *ass* $\underline{e}$ B *ass*. C dipenderà da A e da B e si vuole che ne dipenda in modo semplice. Quindi vogliamo una nuova proposizione $P(A,B)$ tale che $P(A,B)$ *vale* quando e solo quando A *vale* $\underline{e}$ B *vale*.

Il metodo è introdurre un connettivo, cioè un operatore che applicato a due proposizioni A e B produce una nuova proposizione, che chiameremo

$$A\&B$$

(& si legge "and") tale che

(1) $A\&B$ *ass* equivalga a A *ass* $\underline{e}$ B *ass*

[3] Anche quando diamo al robot istruzioni per esprimere proposizioni, in realtà il robot produce solo espressioni. Noi lo istruiamo in modo tale che quando produce un certo tipo di espressioni (quelle che chiameremo formule) noi sappiamo come fornirle del contenuto che le rende delle proposizioni.

Questo risolverebbe il problema perché per far sì che il robot affermi A *ass* $\underline{e}$ B *ass* basterà che noi gli facciamo proferire $A\&B$, e noi sapremo che l'asserzione su tale proposizione, che è $A\&B$ *ass*, equivale all'asserzione composta A *ass* $\underline{e}$ B *ass*.

Ripeto: l'asserzione di $A\&B$, quando equivale all'asserzione composta con $\underline{e}$, cioè A *ass* $\underline{e}$ B *ass*, che si considera nota. Si noti che questo *non è* un circolo vizioso. Tuttavia per ora è solo un desiderio.

Il compito è quello di definire per bene il connettivo & che si comporti in questo modo. Si tratta di trovare delle regole da dare come istruzione alla macchina, che da una parte le spieghino come trattare & e che dall'altra facciano in modo che $A\&B$ *ass* equivalga all'asserzione composta. Questo compito è risolubile.

In altre parole, risolvere l'equazione (1) significa trovare quali istruzioni dobbiamo dare alla macchina per definire il connettivo &. Lo faremo nel prossimo paragrafo.

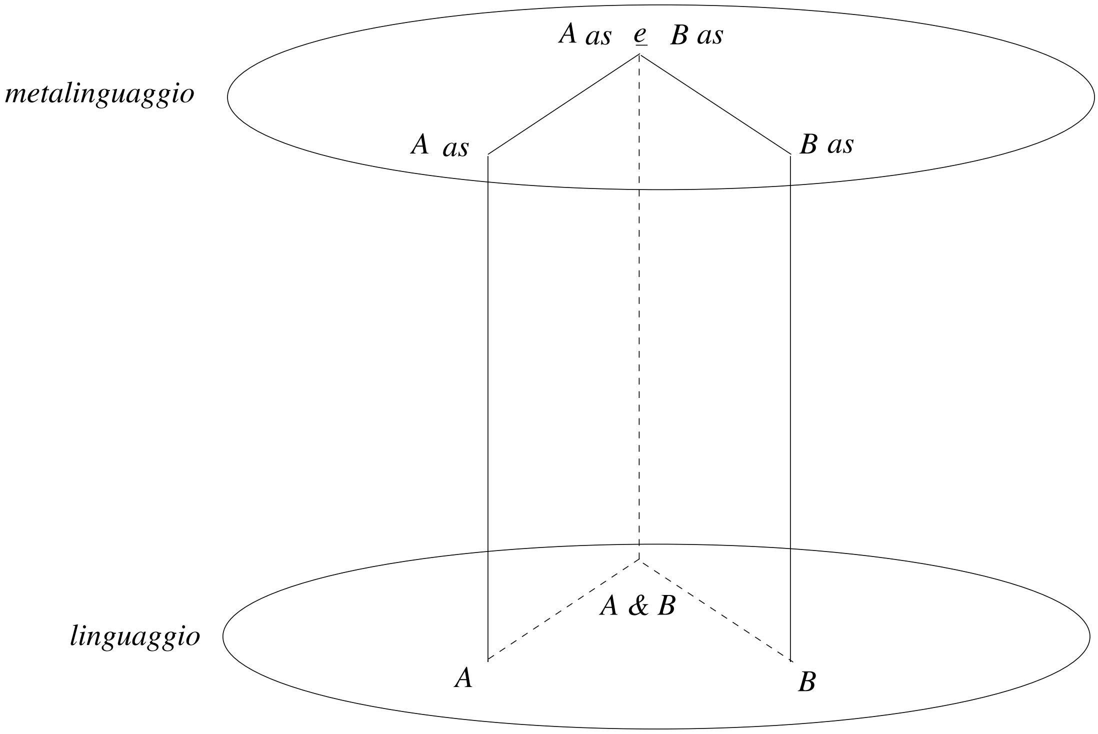
A questo punto è bene esplicitare un po' alla volta tutte le assunzioni necessarie per poter "risolvere" le equazioni definitorie. Assumiamo di partire da certe proposizioni $A, B, C\ldots$ in un linguaggio specifico,[4] simbolico, preciso, rigoroso, cioè fatto di regole che possiamo dare al robot. Quindi sicuramente non può essere l'italiano, perché sarebbe difficile fargli capire se, ad esempio, "falipo" va bene o no, ma qualcosa simile al linguaggio della musica, o al linguaggio morse o ancor meglio ad un linguaggio di programmazione.

Ora, questo linguaggio simbolico e preciso ha lo scopo di parlare di un determinato campo di conoscenza. Infatti il robot non può "sapere tutto", ma di volta in volta conosce e sa parlare solo di un determinato campo, che puó essere matematico o no, a seconda delle istruzioni che gli diamo. Se ad esempio si trattasse del campo della geometria, certamente tra i simboli ci sarebbero variabili per punti (P, Q,...), variabili per rette (r, s,...) e una relazione $G(P, r)$ che dice che il punto tale sta sulla retta tale. A questo punto se il robot è stato istruito con questo linguaggio, potrebbe dire $G(P, r)$ intendendo con ciò una proposizione del tipo "giace il punto tale sulla retta tale". Ma non potrà mai dire "$G(P, r)$ asserita", perché non sa e non può assumersi responsabilità, può solo eseguire le nostre istruzioni.

L'idea è di introdurre ciascun connettivo come la soluzione di un'equazione definitoria. Tale equazione esprime l'equivalenza che si desidera: si vuole che l'asserzione della proposizione composta - quella ottenuta da due precedenti proposizioni operando con il connettivo da definire - sia equivalente ad una asserzione composta - ottenuta con un legame metalinguistico tra le asserzioni sulle proposizioni singole. Si dice che il nuovo connettivo riflette il legame metalinguistico, in una certa situazione; ovvero che esso è definito seguendo il principio di riflessione. In particolare, quindi, non assumeremo di avere connettivi già dati.

Il principio di riflessione rappresenta quel che vogliamo fare: si tratta proprio di "schiacciare" al livello del linguaggio un legame metalinguistico "creando" un connettivo. Useremo tale principio per dedurre le regole della logica. Si noti la differenza: un connettivo mette assieme due proposizioni

[4] Che sarà specificato più avanti.



e ne crea una nuova, mentre un legame metalinguistico mette assieme due asserzioni e ne crea una nuova (asserzione composta).

Notate che non ho mai insistito sulla verità né tantomeno assunto qualcosa sulla verità: parlo solo di asserzioni: A vera, A disponibile, A producibile, A misurabile, ecc. Nessun concetto di verità, dunque.

2. I sequenti e le proprietà dei legami.

D'ora in poi avremo a che fare quasi sempre con asserzioni composte che, per poter essere effettivamente trattate, dovranno essere, in qualche modo, abbreviate.

Ci conviene adottare delle abbreviazioni per esprimere asserzioni composte con $\underline{e}$ e $\underline{comp}$. Ciò che per esteso si scriverebbe con

$$(C_1 \ ass \ \underline{e} \ \ldots \ \underline{e} \ C_n \ ass) \ \underline{comp} \, (D_1 \ ass \ \underline{e} \ \ldots \ \underline{e} \ D_p \ ass)$$

(dove $C_1, C_2, \ldots, C_n, D_1, D_2, \ldots, D_p$ sono tutte proposizioni) d'ora in poi si abbrevia con

$$C_1, \ldots, C_n \vdash D_1, \ldots, D_p$$

e quindi la virgola sta al posto sia della asserzione sia del legame $\underline{e}$. A sua volta, $C_1, \ldots, C_n \vdash D_1, \ldots, D_p$ spesso si abbrevia ulteriormente con $\Gamma \vdash \Delta$, pensando che Γ sia un'abbreviazione di $C_1, \ldots, C_n$, cioè

$$\Gamma = C_1 \ ass \, \underline{e} \ldots \underline{e} \ C_n \ ass$$

e lo stesso relativamente a Δ.

Come caso particolare abbiamo che $\Gamma \vdash A$ sta per $C_1, \ldots, C_n \vdash A \ ass$. Il nuovo segno $\vdash$ andrà letto "comporta". Inoltre, quando si scrive Γ, Γ' vuol dire che li metto assieme:

$$C_1\ ass\ \underline{e} \cdots \underline{e}\ C_n\ ass\ \underline{e}\ C_1'\ ass\ \underline{e} \cdots \underline{e}\ C_k'\ ass.$$

La virgola prende il posto di una $\underline{e}$.

La scrittura

$$C_1, \ldots, C_n \vdash D_1, \ldots, D_m \tag{2}$$

ovvero $\Gamma \vdash \Delta$ si dice *sequente* o sequenza. Il nome "sequente" è la traduzione dal tedesco *Sequenz* e dall'inglese *sequent.* Queste son tutte parole introdotte da Gerhard Gentzen nel 1934. Qualcuno la chiama sequenza, altri la chiamano seguenza, per ricordare che vengono da "conseguenza".

Occorrono anche altre abbreviazioni. Ad esempio

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Delta'}$$

abbrevia

$$(\Gamma \vdash \Delta)\ \underline{comp}(\Gamma' \vdash \Delta')$$

La barra orizzontale è quindi un modo veloce per scrivere "ciò che sta sopra comporta ciò che sta sotto". Più precisamente, quando si usa la barra orizzontale si deve pensare ad una regola che permetta di passare da sopra a sotto, e che può essere composta con altre regole simili, senza dover badare all'ordine con cui si applicano.

La barra orizzontale, oltre che più rapida da scrivere, è utile perchè ci fa capire meglio quali sono le premesse e quale sia la conclusione. Questo sarà del tutto evidente quando tra un po' proveremo a considerarne più di una, e una sopra l' altra; sarebbe molto più difficile da leggere scrivendo tutto su una riga. [5]

Ora vediamo di chiarire almeno in parte il significato dei legami metalinguistici $\underline{e}$ e $\underline{comp}$ esplicitando le regole che essi soddisfano. Come dice la parola italiana, il legame $\underline{e}$ è una congiunzione, e quindi sarà determinato dalla proprietà che

$$A\ ass\ \underline{e}\ B\ ass$$

sia la stessa cosa di dire

$$A\ ass \qquad B\ ass$$

o meglio, più in generale,

$$\Gamma \vdash \Delta\ \underline{e}\ \Gamma' \vdash \Delta'$$

sia la stessa cosa di dire

$$\Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \Delta'$$

Assumiamo che avere una asserzione composta con $\underline{e}$ significhi avere ognuna delle due asserzioni componenti, niente di più. Quindi la $\underline{e}$ è semplicemente la possibilità di mettere assieme due asserzioni e anche la possibilità inversa di staccarle e di riottenere ciascuna delle due; questo si applica non solo a queste asserzioni semplici ma anche ad asserzioni complesse.

[5] C'è la stessa differenza che sussiste tra determinare un albero con un grafico (disegno) e determinarlo tramite una espressione lineare, come può "digerire" un computer. Se insegnamo ad un computer come individuare un albero tramite una espressione lineare (ci sono vari modi per farlo), basta un alberino con sette o otto nodi e già non capiamo più niente. Lo stesso succede qui: ci riconduciamo ad un disegno (costituito dalle barre orizzontali ecc.) in modo da mettere in atto la nostra capacità di cogliere dai disegni più che dalle sequenze di segni, in cui è molto più bravo il computer.

Il $\underline{\textit{comporta}}$ è un legame, e il senso di questo legame è quello della parola italiana stessa: *"comporta" vuol dire, infatti, che data una cosa, essa è capace di portare insieme con sé qualcos'altro.*

L'idea quindi è che

$$A\ ass\ \underline{comp}\ B\ ass$$

abbia il seguente significato: se si ha $A\ ass$ e $A\ ass\ \underline{comporta}\ B\ ass$ allora si ha anche $B\ ass$. E, viceversa, per dimostrare che $A\ ass\ \underline{comporta}\ B\ ass$, ci si deve convincere che dall'asserzione di A si può ottenere l'asserzione di B. Come caso banale (quando A e B coincidono), si ha quindi:

Proprietà di Identità

$$A\ \underline{comp}\ A$$

che per le abbreviazioni appena introdotte significa la stessa cosa che:

$$\text{per ogni proposizione } A, A\ ass\ \underline{comp}\ A\ ass$$

Con la scrittura abbreviata, si ha che da $\vdash A$ e $A \vdash B$ si ottiene $\vdash B$. E viceversa, cioè per avere $A \vdash B$ ci si deve convincere che da $\vdash A$ si può ottenere $\vdash B$. Questo più in generale vuol dire che consideriamo la seguente regola. Supponiamo che valga

(3) $$C_1\ ass\ \underline{e}\ C_2\ ass\ \underline{e} \dots \underline{e}\ C_n\ ass\ \underline{comp}\ A\ ass$$

che si abbrevia con $\Gamma \vdash A$, e supponiamo che valga

(4) $$(A\ ass\ \underline{e}\ C'_1\ ass\ \underline{e} \dots \underline{e}\ C'_m\ ass)\ \underline{comp}\,(D_1\ ass\ \underline{e} \dots \underline{e}\ D_p\ ass)$$

che, usando le convenzioni descritte prima, si abbrevia con $A, \Gamma' \vdash \Delta$. Allora, se valgono la (3) e la (4), si assume che valga anche la seguente

(5)

$$C_1\ ass\ \underline{e}\ \dots\ \underline{e}\ C_n\ ass\ \underline{e}\ C'_1\ ass\ \underline{e}\ \dots\ \underline{e}\ C'_m\ ass\,\underline{comp}\,D_1\ ass\ \underline{e}\ \dots\ \underline{e}\ D_p\ ass$$

che si abbrevia con $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta$.

Tale assunzione si chiama regola di composizione (a sinistra). D'ora in poi la scriveremo in forma abbreviata così: *Composizione a sinistra*

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$$

Ciò vale per $\Gamma, \Gamma', A, \Delta$ arbitrari. La spiegazione del $\underline{\textit{comporta}}$ data prima ora diventa un caso particolare della composizione a sinistra. Infatti, quando Γ e Γ' sono vuoti e $\Delta = B$, si ottiene

$$\frac{\vdash A \quad A \vdash B}{\vdash B}$$

Ma che cosa significa $\underline{comp}$ nel caso in cui Γ è vuoto? Dire che $\vdash A$, cioè che A vale a partire da $\Gamma = \emptyset$, equivale a dire che A si ottiene da $\Gamma = \top$, dove $\top$ è $True$, una proposizione che vale sempre. Spieghiamo meglio: $\top\ \underline{comp}\,A$ significa che A *vale*, perché $\top$ è una proposizione, scelta da noi, che vale sempre. Quindi $\vdash A$ è una scrittura abbreviata, usata solo per mantenere la forma col $\vdash$. La regola di composizione dice allora che: se $\top \vdash A$ e $A \vdash B$ allora $\top \vdash B$, ovvero: se A *vale* e $A\ \underline{comp}\,B$, allora B *vale*.

Intuitivamente si ha l'idea che $\Gamma \vdash \Delta$ è una linea di produzione, una fabbrica, un processo, un passaggio. Γ sono gli ingredienti e Δ i prodotti. La legge di composizione dice quindi: "caro imprenditore, tu hai la fabbrica che a partire da Γ' e A produce Δ; se invece di comprare il componente A tu lo produci nella tua fabbrica a partire dagli elementi Γ, allora il risultato è che tu hai una fabbrica che da Γ e Γ' produce Δ".

Perché Δ e non un solo D? Perché in un processo chimico come per esempio il processo di combustione di un carburante, oltre ad esserci produzione di energia ci sono anche i gas di scarico o qualche prodotto inerte, quindi non una sola cosa, ma tante cose.

Prendiamo questa immagine di passaggio, o linea di produzione: dagli ingredienti A, Γ' asseriti disponibili otteniamo il prodotto Δ, anch'esso disponibile. Ad un certo punto vediamo che l'ingrediente A a sua volta è ottenuto come prodotto a partire da ingredienti Γ. Allora diciamo che la nostra linea di produzione principale ($A, \Gamma' \vdash \Delta$) si può trasformare in una ($\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta$) in cui dagli ingredienti iniziali Γ' e dagli ingredienti Γ, che danno A (infatti era $\Gamma \vdash A$), possiamo ottenere gli stessi prodotti.

Se dovessimo fare una crostata avremmo bisogno della pasta frolla e della crema pasticcera e dei frutti di bosco per la guarnizione. Se A è la pasta frolla e Γ' la crema pasticcera, i frutti di bosco e il forno per cuocerla, allora Δ sarà la crostata. Poniamo di avere a disposizione una ricetta veloce, che consiglia di usare pasta frolla surgelata. Ma voi sapete come prepararla con gli ingredienti naturali e la preferite senz'altro a quella surgelata. Beh, allora potete saltare il passaggio della ricetta "pasta frolla surgelata" e sostituirlo con tutti gli ingredienti necessari per farla.

Naturalmente fuori dalla metafora della linea di produzione, tutto questo ha anche un'interpretazione in termini di verità; infatti posso dire: se la verità di Γ comporta la verità di A e la verità di A e Γ' comporta la verità di Δ, allora la verità di Γ e Γ' comporta la verità di Δ.

Per mantenere la simmetria assumiamo anche la composizione a destra, cioè:

Composizione a destra

$$\frac{\Gamma \vdash B, \Delta \quad B \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta', \Delta}$$

3. Il connettivo di congiunzione &.

Uno dei nostri scopi principali è capire i ragionamenti corretti; per arrivare a questo, invece di partire dall'alto, come da una norma data, siamo sempre partiti dal basso per autoconvincerci di quali cose crediamo come corrette. Non abbiamo mai usato quelli che Dennett chiama *skyhooks*.

Useremo l'espediente espositivo della macchina o del robot non solo per chiarire, ma anche per fermare e stabilizzare la nostra comprensione. Così il robot assume il ruolo di indicarci quello che consideriamo per assodato: tutto quello che riusciamo a "insegnare" al robot è quello che consideriamo fermo, stabile, oggettivo.[6]

Per le costanti logiche, cioè connettivi e i quantificatori, questo avrà la forma di regole di deduzione (o di inferenza). Le otterremo "risolvendo un'equazione". Vediamo subito il caso di &. È il principio di riflessione che

[6]Oggettivo anche nel senso di "reso oggetto", dato in pasto ad una macchina.

dice che un connettivo come & rimane definito poiché soddisfa l'equazione

(6) $A\&B$ *ass* equivale a A *ass* $\underline{e}$ B *ass*

Questa si risolve complicandola un po', inserendo $A\&B$ in un contesto più generale, in cui si assume che valga una generica lista di asserzioni Γ. Γ, che sarà costituito da una serie di asserzioni $C_1, ..., C_n$ (abbreviazione di C_1 *vale* $\underline{e} \ldots \underline{e}$ C_n *vale*), si dice il contesto, cioè la situazione che si assume, o l'ambiente in cui ci si trova.[7] L'equazione (6) diventa:

(7) $\Gamma \vdash A\&B$ equivale a $\Gamma \vdash A \ \underline{e} \ \Gamma \vdash B$

Questa si chiama *equazione definitoria* per &, nel senso che è un'equivalenza che definisce & ed è sufficiente per comprendere questo connettivo in un modo che adesso vedremo.

Ora vogliamo che il nuovo segno &, che chiameremo **connettivo di congiunzione** o in inglese **and**, introduca una nuova proposizione $A\&B$ che nella situazione $\Gamma \vdash A\&B$, e cioè come conseguente in un sequente, lo renda equivalente a $\Gamma \vdash A \ \underline{e} \ \Gamma \vdash B$. *Con questa idea ed in questo modo - come vedremo - si otterranno tutti i connettivi*, e questa è un'autentica novità.

Il problema è ora introdurre un connettivo che soddisfi una data equazione definitoria, come quella per &. Ma che cosa vuol dire introdurre un connettivo? Per rispondere a questa domanda, pensiamo a che cosa possiamo fare per "istruire" un robot sul significato di quel connettivo: dobbiamo semplicemente dargli le regole che gli permettano di trattarlo. Quindi introdurre un connettivo *significa stabilire delle regole, da dare al robot, con cui trattare quel connettivo per formare proposizioni composte.*

Ad esempio, per chiarire il significato di & basta determinare quali regole si debbano dare al robot per gestire una proposizione composta con &. Il ruolo espositivo del robot è ricordarci che lui del connettivo & "capisce" *soltanto* quello che abbiamo espresso in regole.

Questo è un passaggio chiave, da chiarire bene: dato che il linguaggio è diverso dal metalinguaggio, ovvero il robot è diverso da noi, e dato che i connettivi lavorano a livello di linguaggio, introdurre un connettivo nuovo equivale ad istruire il robot su come usare tale connettivo, e questo significa semplicemente dare al robot le regole con cui gestire il connettivo. Alla fine, *il significato del connettivo è tutto compreso nelle regole di deduzione che lo riguardano, e nient'altro.*[8]

La (7) si può un po' abbreviare con

(8) $\Gamma \vdash A\&B \ \underline{sse} \ \Gamma \vdash A \ \underline{e} \ \Gamma \vdash B$

dove il simbolo $\underline{sse}$ significa *se e solo se*, ossia vale il $\underline{\text{comporta}}$ nelle due direzioni. Esplicitato: (8) equivale a

(9) $(\Gamma \vdash A \ \underline{e} \ \Gamma \vdash B) \ \underline{comp} \ \Gamma \vdash A\&B$

(10) $\Gamma \vdash A\&B \ \underline{comp} (\Gamma \vdash A \ \underline{e} \ \Gamma \vdash B)$

[7] Per esempio, lo usiamo comunemente quando parliamo e ci troviamo in un contesto; è sottinteso che vale che "siamo nel 2005", o "siamo in Italia".

[8] Vedi più avanti: ad esempio, la differenza tra le due congiunzioni & e $\otimes$ è data dal fatto che sono trattate con regole diverse.

assieme.

Che regole dobbiamo dare alla macchina per trattare quel connettivo in modo da soddisfare l'equazione definitoria per &? Quelle che si ottengono dalla risoluzione di (8), come segue.

La prima regola è ovvia, basta guardare un verso di (8). Un verso, quello da destra a sinistra, è quello espresso dalla (9), che si abbrevia, date le convenzioni già descritte, con:

Regola di &-formazione:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}$$

Questa è diventata una formula da matematici, ma in realtà è un'abbreviazione di quei discorsi fatti finora ed in realtà è una scrittura formale semplicemente della direzione da destra a sinistra dell'equazione che stiamo risolvendo, non abbiamo fatto altro che scrivere in un modo più veloce. In particolare la sbarra orizzontale è un $\underline{comp}$, lo spazio bianco è una $\underline{e}$. Questa è una buona regola di deduzione. La chiamiamo regola di formazione della & o di &−formazione, in quanto essa ci dice quando abbiamo il diritto di formare la nuova proposizione $A\&B$ e di asserirla (va sottintesa la presenza *ass*).

La seconda regola da dare alla macchina deriva dall'altro verso dell'equazione definitoria, da sinistra a destra, cioè quello espresso da (10). Semplicemente scrivendo $\underline{comp}$ con la barra orizzontale si arriverebbe a

$$\frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash A \;\underline{e}\; \Gamma \vdash B}$$

che però non vogliamo perché non ha come conclusione un sequente. Per fortuna, equivale a

Regola di &-riflessione implicita:

$$\frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash B}$$

La regola di &-riflessione implicita è una condizione che deve essere soddisfatta, ma non è una buona regola per dire come trattare $A\&B$ perché assume di saper già che cosa è &.

Dobbiamo costruire una nuova proposizione $A\&B$ che corrisponda ad A *vale* $\underline{e}$ B *vale* nel senso che A *vale* $\underline{e}$ B *vale*, contemporaneamente equivale ad $A\&B$ *vale*.

Abbiamo due livelli: sopra noi, sotto il robot. Quando noi diciamo A *vale*, il robot al più può dire A; quando noi diciamo B *vale*, il robot al più può dire B. Quando noi diciamo A *vale* $\underline{e}$ B *vale*, come fa il robot a esprimere questo? Dovremmo dargli un'espressione, $A\&B$, e delle regole con cui trattarla in modo tale che quando il robot arrivi a dire $A\&B$, che noi intendiamo come l'asserzione che $A\&B$ vale, questo sia equivalente al nostro A *vale* $\underline{e}$ B *vale* di partenza.

Mentre noi siamo in grado di mettere assieme asserzioni semplici per formarne di complesse, il robot è in grado di simulare questo solo attraverso l'uso dei connettivi e delle regole ad essi associate.

Quindi con un'espressione complessa, il robot si riferisce a una proposizione che, se asserita, equivale alla asserzione complessa.

In definitiva, l' idea è quella di istruire una macchina e per farlo dobbiamo specificare le regole. È sempre utile ricordare che il robot conosce *solo* quello su cui noi lo istruiamo. Non possiamo basarci su quello che a noi sembra ovvio, ma dobbiamo esplicitare tutto.

La regola di "riflessione implicita" non va bene, perchè è ancora una richiesta, non è una vera istruzione su come costruire la nuova proposizione $A\&B$. Infatti, è come dirgli: "Quando ti troverai nella situazione in cui asserisci che $A\&B$ vale, potrai dedurre A e potrai dedurre B", senza però specificare quando sarà in quella situazione.

Detto in altri termini, la definizione risultante di $A\&B$ è un circolo vizioso: non parte da quello che lui già conosce per costruire la nuova proposizione, ma suppone che sia già nota e da essa deduce altre proposizioni. Detto in termini più tecnici, non è una definizione induttiva, mentre al robot si possono dare solo definizioni induttive. Se qualcuno ha un minimo di esperienza di programmazione lo sa benissimo.

Allora dobbiamo trovare una regola che non abbia $A\&B$ tra le premesse e che equivalga a quella scritta prima. A tal fine si banalizza la premessa nella regola di &-riflessione implicita, cioè si considera il caso in cui $\Gamma \equiv A\&B$. Infatti, poiché l'equazione definitoria deve valere per qualsiasi Γ, A e B, per estrarre le informazioni che interessano si può sostituire Γ con un "valore" particolare, scelto opportunamente. Nel nostro caso, converrà prendere $\Gamma \equiv A\&B$.

Questo è del tutto analogo a quanto si fa comunemente con le "equazioni". Se scriviamo $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ciò che si intende è che quell'espressione valga per ogni x, y in un certo campo. Se ora decidiamo di sostituire x con 3, si ottiene $(3+y)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + y^2$ e questo passaggio è certamente lecito: perché non è altro che un esempio, un caso particolare dell'equazione precedente.

Forse è utile anche mettere in evidenza l'analogia tra la soluzione delle equazioni definitorie e quella delle usuali equazioni, in una o più incognite. Consideriamo l'equazione di una retta del piano scritta nella forma (implicita) $ax + by + c = 0$, come ad esempio $3x - 2y + 7 = 0$. Si può scegliere un valore particolare per x, ad esempio $x = -1$, per ottenere un'informazione specifica, cioè che per $x = -1$ deve essere $y = 2$. In generale, si può esplicitare la funzione che calcola y al variare di x: questa è la equazione della retta scritta in forma "esplicita", nel nostro caso $y = 3/2x + 7/2$. Questa permette di ricavare direttamente il valore di y dato quello di x.

Anche nel nostro caso, vogliamo arrivare ad una regola "esplicita", e per farlo siamo liberi di estrarre informazioni dalla sua forma implicita, assegnando i valori opportuni ai parametri, come Γ. Affermare che la regola

$$\frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash A}$$

vale, significa che deve valere anche quando siamo noi a scegliere Γ. Scegliamo allora $\Gamma = A\&B$ in modo che la parte sopra diventi valida, in quanto si trasforma in una identità. A questo punto anche la conclusione sarà valida ed otteniamo lo &-assioma:

$$A\&B \vdash A \quad A\&B \vdash B$$

Vediamo in dettaglio. Assumiamo che $A\&B$ sia già una proposizione (lo sarà quando noi daremo istruzioni al robot tali che ci facciano capire qual è il significato della scrittura). Sia Γ la proposizione $A\&B$ stessa; allora la regola di &-riflessione implicita ci dà

$$\frac{A\&B \vdash A\&B}{A\&B \vdash A}$$

Ma la premessa $A\&B \vdash A\&B$ vale in quanto è un caso della proprietà di identità che abbiamo assunto, cioè che $C \vdash C$ valga per ogni proposizione C. Quindi vale anche la conclusione, cioè $A\&B \vdash A$. Lo stesso svolgimento si fa per B.

È da notare un fatto importante: passando da &-rilfessione impicita a &-assioma, il connettivo & è passato da destra a sinistra del segno $\vdash$.

Adesso otteniamo la &-riflessione esplicita. Immaginiamo di avere $A \vdash \Delta$; dall'&-assioma $A\&B \vdash A$ otteniamo, per composizione dei due processi, $A\&B \vdash \Delta$, in questo modo:

$$\frac{A\&B \vdash A \quad A \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta}$$

Quindi, se si assume &-assioma, per composizione si ottiene la &-riflessione esplicita:

$$\frac{A \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta}$$

Analogamente, lo stesso procedimento si può seguire per B, e si arriva allo &- assioma $A\&B \vdash B$ e alla regola

$$\frac{B \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta}$$

Quindi &-assioma comporta &-riflessione esplicita. La regola di &-riflessione esplicita è una regola che va bene perché ha la & nella conclusione. È una buona regola perché esprime al robot l'istruzione: "Ogni volta che hai $A \vdash \Delta$, puoi passare anche a $A\&B \vdash \Delta$". Questo gli dice come è possibile introdurre la nuova proposizione $A\&B$, tra le assunzioni (a sinistra di $\vdash$).

Ora vediamo che la &-riflessione esplicita equivale all'assunzione di partenza. Mostrando questo abbiamo perfettamente risolto l'equazione definitoria. Finora abbiamo visto che dalla riflessione implicita, banalizzando si passa all'assioma e dall'assioma componendo si passa alla &-riflessione esplicita.

Ma non sappiamo ancora se tale regola equivale all'assunzione di partenza; sappiamo solo che *segue* da questa. Per provare l'equivalenza basta far vedere che dalla &-riflessione esplicita si ritorna allo &-assioma e da questo alla &-riflessione implicita. Supponiamo che valga &-riflessione esplicita, cioè

$$\frac{A \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta}$$

Banalizzando, cioè ponendo $\Delta = A$, otteniamo

$$\frac{A \vdash A}{A\&B \vdash A}$$

quindi dall'identità $A \vdash A$ otteniamo &-assioma $A\&B \vdash A$.

Da &-assioma otteniamo &-riflessione implicita:

$$\frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash A}$$

Infatti, assumiamo $\Gamma \vdash A\&B$; se si ha &-assioma, per composizione si ha anche:

$$\frac{\Gamma \vdash A\&B \quad A\&B \vdash A}{\Gamma \vdash A}$$

e quindi la conclusione voluta $\Gamma \vdash A$. Queste tre regole: &-riflessione implicita, &-assioma e &-riflessione esplicita, sono tutte equivalenti tra loro. Quindi se noi scegliamo la regola buona, cioè &-riflessione esplicita, sappiamo che equivale alla direzione da sinistra a destra dell'equazione definitoria.

Le regole &-formazione e &-riflessione esplicita sono regole buone per il robot perché hanno la & nella conclusione; nello stesso tempo, prese assieme sono equivalenti all'equazione definitoria. Quindi il connettivo & è ben definito e si comporta esattamente come richiesto dall'equazione definitoria. Diciamo allora che l'equazione definitoria è stata risolta, e il connettivo & creato. Tutte le regole considerate sono riassunte in:

&-formazione

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}$$

&-riflessione implicita

$$\frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash B}$$

&-assioma

$$A\&B \vdash A \qquad A\&B \vdash B$$

&-riflessione esplicita

$$\frac{A \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta} \qquad \frac{B \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta}$$

Ma si noti che quelle da dare al robot sono solo la prima e l'ultima.

Tutti i connettivi funzioneranno con questo meccanismo concettuale: cerchiamo un connettivo che produca una nuova proposizione composta a partire da due proposizioni in modo tale che valga un'equazione come abbiamo visto nel caso della &:

$$\Gamma \vdash A\&B \quad \textit{sse} \quad \Gamma \vdash A \ \underline{e}\ \Gamma \vdash B$$

Vogliamo che valga questa equivalenza in senso logico. Abbiamo visto che la **regola di formazione** da destra a sinistra va bene, mentre **&-riflessione implicita** da sinistra a destra è solo desiderio, perché il connettivo è presente nelle premesse, come se già lo conoscessimo. Tuttavia, assumendo *soltanto* identità e composizione, avere &-riflessione implicita equivale ad avere **&-riflessione esplicita**: quest'ultima ci va molto bene perché non assume che $A\&B$ sia già dato.

Si osservi che $A\&B$ è passato da destra in $\Gamma \vdash A\&B \ \underline{comp}\ \Gamma \vdash A$ a sinistra in $A \vdash \Delta \ \underline{comp}\ A\&B \vdash \Delta$: la regola di riflessione esplicita non parla più di $A\&B$ come prodotto ma come ingrediente.

Da quanto visto finora possiamo dire che

$$\frac{A \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta}$$

ma vale anche

$$(**)\frac{A \vdash \Delta}{B\&A \vdash \Delta}?$$

Possiamo rispondere di sì, ma non per il fatto che "$A\&B$ e $B\&A$ sono chiaramente la stessa cosa" (visto che il robot non può sapere a priori che sono la stessa cosa), ma solo perché è deducibile dalle regole che gli abbiamo dato. Infatti, partendo da

$$\frac{B \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta}$$

e scrivendo A al posto di B e B al posto di A, si ottiene

$$\frac{A \vdash \Delta}{B\&A \vdash \Delta}$$

Questo vale perché A e B sono variabili e, in quanto tali, si possono scambiare i loro nomi.

Con le regole su &, costringiamo la macchina ad usare & come vogliamo noi, dicendole che con $A\&B$ può fare quello che poteva fare con A e quello che poteva fare con B. C'è, tuttavia, il rovescio della medaglia: quando costringiamo la macchina a fare quello che diciamo noi e nello stesso tempo pretendiamo di mantenere l'equazione definitoria, come punto di partenza per la definizione dei nostri connettivi, ci costringiamo ad interpretare in un certo modo la $\underline{e}$ e in un certo senso "rimaniamo bloccati", come la macchina. In altri termini, cominciamo a capire che $\underline{e}$ e $\underline{comp}$ sono sì nostri, ma li stiamo un po' idealizzando, perchè sostanzialmente stiamo decidendo che proprietà devono avere.

Quindi il bello dell'equazione definitoria è la dinamica tra linguaggio e metalinguaggio, connessi attraverso il principio di riflessione. *Nel momento in cui fissiamo il linguaggio e le regole che diamo alla macchina, fissiamo anche il significato che dobbiamo dare alla $\underline{e}$, quella metalinguistica.* Da quanto sopra, si deduce che la $\underline{e}$ da cui siamo partiti non tiene conto dell'ordine. Vediamo esplicitamente che $A\&B \vdash B\&A$. Infatti, per &-assioma, $A\&B$ produce B e $A\&B$ produce A, cioè $A\&B \vdash B$ e $A\&B \vdash A$. Adesso si applica &-formazione e si ottiene

$$\frac{A\&B \vdash B \quad A\&B \vdash A}{A\&B \vdash B\&A}.$$

Lo stesso possiamo fare nell'altra direzione. Quindi $A\&B$ equivale a $B\&A$, ovvero si è così provata la proprietà commutativa di &.

Abbiamo sfruttato il fatto che quando ci troviamo di fronte ad una $\underline{e}$ (in questo caso lo spazio bianco tra $A\&B \vdash B$ e $A\&B \vdash A$), *assumiamo che l'ordine sia irrilevante* perché qui usiamo le proprietà della $\underline{e}$ che dicono che se $A\&B \vdash B$ e $A\&B \vdash A$, allora anche $A\&B \vdash A$ ed $A\&B \vdash B$ nell'altro ordine, perché $\underline{e}$ dice semplicemente che li abbiamo tutti e due, indipendentemente dall'ordine.

Come si è fatto per &, tutti gli altri connettivi, ed anche i quantificatori, saranno dati attraverso un'equazione definitoria, che con il principio di riflessione, connette tra di loro il linguaggio e il metalinguaggio. È importante capire che tutto ciò che riguarda un connettivo è compreso nella sua equazione definitoria. Infatti, è da questa che si ricavano le regole per quel connettivo, che è così completamente determinato.

4. Simmetria e connettivo $\vee$.

Consideriamo una nuova equazione definitoria:

$$A\,?\,B \vdash \Delta \quad \underline{sse} \quad A \vdash \Delta\, \underline{e}\, B \vdash \Delta$$

Si può osservare subito, senza nemmeno entrare nel merito, che questa equazione è risolvibile. Infatti, lo possiamo dire per motivi di simmetria. Questo nuovo connettivo ? si comporta esattamente come il simmetrico di & rispetto al $\overline{\textit{comporta}}$, è "& dall'altra parte". Osservate quali assunzioni abbiamo fatto su $\underline{e}$ e $\overline{\textit{comporta}}$: sono tutte simmetriche cioè ogni volta che c'è una qualunque assunzione, c'è anche la sua simmetrica, cioè quella ottenuta scambiando tra loro le parti a destra e a sinistra del segno $\vdash$.

Quindi tutti i passaggi, i ragionamenti che facciamo per & a destra li possiamo fare per ? a sinistra, dato che l'equazione per ? è ottenuta da quella di & per simmetria.

Innanzitutto:

?-formazione

$$\frac{A \vdash \Delta \quad B \vdash \Delta}{A?B \vdash \Delta}$$

Ma anche

?-riflessione implicita

$$\frac{A?B \vdash \Delta}{A \vdash \Delta} \qquad \frac{A?B \vdash \Delta}{B \vdash \Delta}$$

Come per &, questa regola non è del tutto soddisfacente, perché il connettivo ? si trova ancora tra le assunzioni. Per banalizzare ?-riflessione implicita poniamo $\Delta = A?B$ e otteniamo:

?-assioma

$$A \vdash A?B \quad B \vdash A?B$$

Componendo otteniamo

?-riflessione esplicita

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A?B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A?B}$$

e questo perché se abbiamo $\Gamma \vdash A$ e ?-assioma $A \vdash A?B$, per composizione otteniamo $Gamma \vdash A?B$. Si torna anche indietro, banalizzando Γ otteniamo $A \vdash A$ come premessa e quindi possiamo concludere che

$$A \vdash A?B$$

Ora componendo otteniamo ?-riflessione implicita.

Due cose sono da dire. Primo. Era banale ottenere le regole per questo connettivo perché tutte le assunzioni che abbiamo fatto su $\underline{e}$ e su $\overline{\textit{comp}}$ sono simmetriche, rispetto al segno $\vdash$. Quindi tutto quello che si fa a destra per &, lo si può fare a sinistra per ? C'è, in altre parole, una struttura matematica molto chiara e ben precisa.

Secondo. È l'ora di svelare chi è ?: si tratta del connettivo di disgiunzione che chiamiamo *or* e indichiamo con il segno $\vee$. Cerchiamo ora di capire perché è giusto chiamare questo connettivo "disgiunzione". Innanzitutto, è un buon connettivo, e ciò è dimostrato dal fatto che lo abbiamo definito mediante il principio di riflessione, usando solo le assunzioni specificate all'inizio (identità e composizione) e ottenendo, in tal modo, delle regole esplicite che indicano come costruire la proposizione composta con ?. Le regole sono:

$\vee$ - formazione

$$\frac{A \vdash \Delta \quad B \vdash \Delta}{A \vee B \vdash \Delta}$$

$\vee$ - riflessione esplicita

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

che assieme sono equivalenti all'equazione definitoria (naturalmente, sostituendo ? con $\vee$!):

$$A \vee B \vdash \Delta \quad sse \quad A \vdash \Delta\ \underline{e}\ B \vdash \Delta$$

Perciò non c'è dubbio che esso sia un buon connettivo. Più precisamente, $\vee$ è il connettivo che "riflette dentro il linguaggio" la $\underline{e}$ che compare a destra nell'equazione definitoria.

In secondo luogo, quel connettivo corrisponde alla nostra "o". Sembra strano dato che non abbiamo mai parlato di "o"! Noi, in effetti, abbiamo solo proiettato una $\underline{e}$ in una posizione particolare "schiacciandola" giù nel linguaggio; in questo modo, abbiamo ottenuto il corrispondente della "o" per il robot.

Il fatto che quelle regole determinino il connettivo di disgiunzione $\vee$, lo si capisce guardandole: nessun'altra possibile interpretazione del connettivo potrebbe soddisfarle, cioè renderle valide. La prima, $\vee$-formazione, dice che se da una proposizione A si possono ottenere delle conseguenze Δ, e se le stesse conseguenze Δ si posso ottenere da B, allora esse si possono ottenere conoscendo $A \vee B$.

Vediamo un esempio. Girando una domenica per i dintorni di Palermo mi sono trovato ad un bivio con un cartello:

L'informazione data da questa situazione è la seguente: andare a Palermo comporta girare a destra, andare a Capaci comporta girare a sinistra e andare a Carini comporta girare a sinistra. Questo cartello significa: se vuoi andare a Capaci o a Carini devi girare a sinistra. Che è esattamente una $\vee$-formazione!

La seconda regola, $\vee$-riflessione esplicita, afferma invece che se ho ottenuto una conseguenza A, allora, a maggior ragione, si dirà che vale $A \vee B$.

Attenzione! Questa seconda regola potrebbe apparire un po' banale perché se so che vale A, perché mai dovrei perdere tempo per dire che vale anche $A \vee B$? , Perché devo indebolire l'asserzione di A, passando ad $A \vee B$? Qui ritorna il fatto che stiamo istruendo una macchina e anche ciò che per noi è ovvio, tale non è per la macchina, se non è istruita a dovere. Quindi dobbiamo stare particolarmente attenti: dobbiamo ricordarci che la macchina ha bisogno di essere istruita su tutto, anche quello che ci sembra banale esplicitare.

Come mai $\vee$ è introdotto come un connettivo che riflette una $\underline{e}$? Perché nell'equazione definitoria il connettivo $\vee$ è sì definito tramite una $\underline{e}$, ovvero riflettendo nel linguaggio il legame $\underline{e}$ tra asserzioni, ma questa $\vee$ è a sinistra, cioè opera sulle assunzioni (input) e non sulle conclusioni (output).

Un altro esempio. Se "mangio la pizza" comporta "mi diverto" e "vado al cinema" comporta "mi diverto", senza dubbio segue che "mangio la pizza o vado al cinema" comporta "mi diverto" (lascio al lettore immaginare una situazione reale un po' più colorita, in cui mettere in moto la propria immaginazione[9]). Il passaggio da cinema a cinema o pizza è ottenuto usando l'assioma $A \vdash A \vee B$, ovvero la regola

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Si vede con questo esempio come sia naturale legare $\vee$ ed $\underline{e}$.

Un altro esempio, tratto dalla vita realee, in cui viene naturale legare $\vee$ con $\underline{e}$ è il seguente. Quando usciamo dall'aereo, e ci arriviamo all'aereoporto, spesso ci sono alcune frecce per la dogana. Immaginiamo di essere in America. Vediamo alcune frecce che grosso modo dicono: "se siete un cittadino *over seas* andate a destra $\underline{e}$ se siete un cittadino con passaporto americano o un cittadino con passaporto europeo andate a sinistra".

Cosa indica, in particolare la seconda freccia? Indica che se sono un cittadino con passaporto europeo *o* un cittadino con passaporto americano, devo andare a sinistra. Allora, dato che sono un cittadino europeo, e che vale $EU \vdash EU \vee US$, vado a sinistra.

Vediamo quindi come la regola di $\vee$-riflessione, che può sembrare inutile, diventa fondamentale nella lingua parlata, quando si ha a che fare con assunzioni. Anzi, proprio come la regola di $\vee$-formazione opera su assunzioni, si potrebbe sostenere che, allo stesso modo, anche nella lingua parlata, il connettivo $\vee$ opera soprattutto su assunzioni (questo sembra confermato dalla difficoltà di trovare esempi tratti dalla vita comune di proposizioni asserite della forma $A \vee B$).

Abbiamo due connettivi, la & che riflette la $\underline{e}$ a destra, e mette insieme due proposizioni a destra del comporta; la $\vee$ è circa la stessa cosa, è il simmetrico e riflette per il robot una $\underline{e}$ tra assunzioni, ovvero con i prodotti uguali e gli ingredienti diversi.

Quindi la $\vee$ è esattamente il simmetrico della &, sicché per chiarire alla macchina - ciò che è il nostro compito qui e ora - le regole della $\vee$ non

[9]Supponendo: cinema o pizza comporta mi diverto, il ragionamento che posso fare per concludere che comunque scelga il mio partner, io mi divertoè il seguente: se cinema, allora anche cinema o pizza, il che comporta mi diverto.

occorre partire da una "o" metalinguistica (come si fa di solito, ad esempio nella semantica di Tarski), ma basta avere la *e* che già abbiamo spiegato.

Ricordiamo le regole rispettivamente di &-formazione e &-riflessione esplicita e $\vee$-formazione e $\vee$-riflessione esplicita ordinandole in modo da metterne in evidenza la simmetria:

&

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B} \qquad\qquad \frac{A \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta} \qquad \frac{B \vdash \Delta}{A\&B \vdash \Delta}$$

$\vee$

$$\frac{A \vdash \Delta \qquad B \vdash \Delta}{A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Solo con queste regole non si può ancora dimostrare molto. Ottenere una dimostrazione di un sequente significa ottenerlo come conclusione di una serie di passaggi che partono dall'identità e poi applicano, per ciascun connettivo, *solo* le regole formazione e di riflessione (esplicita).

Formalmente, vale la proprietà associativa di &, che afferma che i sequenti:

$$A\&(B\&C) \vdash (A\&B)\&C, \text{ e } (A\&B)\&C \vdash A\&(B\&C)$$

sono dimostrabili. Qui la difficoltà è una sola: capire in che ordine andare. Quando vogliamo come output una congiunzione &, la regola (che è quella di &-formazione) dice che posso ottenerla se ho sia l'uno che l'altro dei congiunti, con gli stessi input.

Notate che parto dal basso, ossia da quello che voglio dimostrare

$$A\&(B\&C) \vdash (A\&B)\&C$$

Ho due opzioni: lavorare sulla & di sinistra che precede $(B\&C)$ oppure lavorare sulla & di destra che precede C; in altri termini, questo sequente sarà ottenuto o con una regola di &-formazione, che introduce la & a destra, o con una regola di &-riflessione, che introduce la & a sinistra.

Se incominciassi dalla & di sinistra, sopra dovrei avere o $A \vdash (A\&B)\&C$ oppure $(B\&C) \vdash (A\&B)\&C$ ma per entrambe è impensabile che esista una dimostrazione. Sarebbe come dedurre da A=`Silvia ha i capelli neri` anche che $A\&B\&C$ con B e C qualsiasi, ad esempio `Silvia ha i capelli neri e un fidanzato antipatico e una sorella stupida` e ciò non ha senso.

Similmente da $B\&C$ non posso ottenere $(A\&B)\&C$ perché A non compare tra gli ingredienti. La conclusione è che per cercare di dimostrare $A\&(B\&C) \vdash (A\&B)\&C$ è sbagliato partire con la regola di &-riflessione, che opera a sinistra.

Proviamo allora a smontare la & di destra; applicando &-formazione sopra ottengo

$$\frac{A\&(B\&C) \vdash A\&B \quad A\&(B\&C) \vdash C}{A\&(B\&C) \vdash (A\&B)\&C}$$

La situazione ora è ben diversa perché non ci sono congiunti a destra che non compaiono a sinistra.

Proseguiamo: sempre per lo stesso ragionamento di prima in $A\&(B\&C) \vdash A\&B$ conviene ancora smontare la & a destra (applicando sempre &-formazione), ottenendo

$$\frac{A\&(B\&C) \vdash A \quad A\&(B\&C) \vdash B}{A\&(B\&C) \vdash A\&B}$$

Tutti e due adesso sono facili perché $A\&(\text{qualcosa}) \vdash A$ segue da $A \vdash A$ semplicemente per &-riflessione:

$$\frac{A \vdash A}{A\&(B\&C) \vdash A}$$

(si noti che, dato che c'è la parentesi, $B\&C$ è una sola proposizione, quindi la introduco con & a sinistra, trattandola esattamente come una unica proposizione, quale è, e non due come qualcuno sbagliando potrebbe pensare).

Analogamente, o quasi, per $A\&(B\&C) \vdash B$ avrò

$$\cfrac{\cfrac{B \vdash B}{(B\&C) \vdash B}}{A\&(B\&C) \vdash B}$$

Applicando lo stesso ragionamento per $A\&(B\&C) \vdash C$, e mettendo tutto assieme, questa è la dimostrazione completa di un verso della proprietà associativa:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{A\&(B\&C) \vdash A} \quad \cfrac{\cfrac{B \vdash B}{B\&C \vdash B}}{A\&(B\&C) \vdash B}}{A\&(B\&C) \vdash A\&B} \quad \cfrac{\cfrac{C \vdash C}{B\&C \vdash C}}{A\&(B\&C) \vdash C}}{A\&(B\&C) \vdash (A\&B)\&C}$$

L'altro verso, e cioè $(A\&B)\&C \vdash A\&(B\&C)$, si dimostra in modo del tutto analogo. Ecco la prova della proprietà associativa. D'ora in poi possiamo assumerla.

Quando $A \vdash B$ e $B \vdash A$ diciamo che le due proposizioni sono equivalenti; qualche volta si potrà scrivere $A \doteq B$ oppure addirittura $A = B$. Quindi, siccome si vede facilmente con un ragionamento molto simile che vale anche il viceversa, abbiamo dimostrato la proprietà associativa di &, cioè:

$$(A\&B)\&C \doteq A\&(B\&C)$$

Il simbolo $\doteq$ si legge " equivale", perché se $A \doteq B$, allora in ogni punto in cui compare una delle due, automaticamente si sa che posso sostituirla con l'altra, visto che $A \doteq B$ vuol dire sia $A \vdash B$ sia $B \vdash A$ e quindi per composizione (a destra o a sinistra, a seconda che A sia a sinistra o a destra) posso sostituire B al posto di A e viceversa.

Proviamo ad esempio a derivare $A\&B\&C \vdash B \vee E$ e supponiamo di avere isolato $A\&B$ da C; il modo per dimostrare $(A\&B)\,\&C \vdash B \vee E$ sarà esattamente:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B \vdash B}{A\&B \vdash B}}{(A\&B)\,\&C \vdash B}}{(A\&B)\,\&C \vdash B \vee E}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato $\vee$-riflessione esplicita:

$$\frac{(A\&B)\,\&C \vdash B}{(A\&B)\,\&C \vdash B \vee E.}$$

Quel che è da evidenziare in tutto quel che abbiam visto finora è *il gioco tra intuizione, buon senso e il sistema formale che stiamo costruendo.* Nel caso specifico, l'atto mentale che ci ha consentito di vedere B come quell'unica proposizione in comune tra $A\&B\&C$ e $B \vee E$ si è ben riflesso, alla fine, nella dimostrazione formale.

Facciamo un altro esempio.

$$A \vdash (A \vee B)\,\&\,(A \vee C)$$

come si fa? L'intuizione iniziale è che si debba partire da $A \vdash A$. Si nota che avendo due $\vee$ a destra possiamo applicare (all'in su) due $\vee$-riflessioni esplicite e giungere quindi ad $A \vdash A$. La & a destra ci fornisce le condizioni per "smontare" $A \vdash (A \vee B)\,\&\,(A \vee C)$ poiché ci suggerisce la possibilità di applicare una &-formazione. Sicché, mediante & - formazione, otteniamo

$$\frac{A \vdash A \vee B \qquad A \vdash A \vee C}{A \vdash (A \vee B)\,\&\,(A \vee C)}$$

e poi, mediante $\vee$-riflessione esplicita, il nostro risultato

$$\frac{A \vdash A}{A \vdash A \vee B} \qquad \frac{A \vdash A}{A \vdash A \vee C}$$

Queste altro non sono che istruzioni: se in una linea di produzione, dato un ingrediente A, dobbiamo ottenere $(A \vee B)\,\&\,(A \vee C)$, ebbene queste sono le istruzioni di come sarà fatto quel prodotto.

5. Regole strutturali.

Le regole strutturali riguardano la struttura dei sequenti e quindi il concetto di asserzione; le regole sulle costanti logiche (cioè connettivi e quantificatori) dicono, appunto, come gestire le costanti logiche; esse valgono in ogni logica, mentre le regole strutturali sono quelle che caratterizzano il concetto di asserzione, e quindi il concetto di proposizione, e quindi di che cosa parla la logica in questione (se di risorse, verità o altro). Dal punto di vista del robot, le regole strutturali dicono come si possono gestire i dati. Possiamo leggere un sequente come: i tali dati si trasformano nei tali altri dati. Una regola strutturale dice come si concepisce il passaggio. Vedremo ora le regole strutturali di indebolimento e contrazione.[10]

La regola di indebolimento. La regola di indebolimento è:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{C, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\textit{indebolimento a sinistra})$$

Si può considerare anche la regola simmetrica, cioè

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, D} \quad (\textit{indebolimento a destra})$$

Qual è l'interpretazione di queste regole? Cominciamo dalla prima. Intanto non parla di connettivi ma di asserzioni; è una regola metalinguistica. Sostanzialmente dice che, se da certi ingredienti otteniamo certi prodotti, allora anche aggiungendo un ulteriore ingrediente possiamo ottenere gli stessi prodotti.

Prima di passare a conclusioni generali, vediamo qualche esempio. Se si deve preparare una cassata siciliana, si cercherà in cucina la ricotta, lo zucchero, i canditi, ecc. e li si useranno seguendo le istruzioni della ricetta. Se in dispensa avete acciughe salate, non vi viene nemmeno in mente di doverle usare, potete lasciarle dove sono. Quindi, se Γ include tutto ciò che ho in cucina, posso ben dire che Γ produce CS, dove CS sta per cassata siciliana, se intendo che non sono costretto ad utilizzare *tutto* Γ per produrre CS. Ma non è così che si debbono intendere le ricette. Pensate ad una ricetta scritta: usualmente all'inizio c'è una lista Γ di ingredienti, ed è ben inteso che siano sì sufficienti, ma anche che si debbono usare tutti, cioè che siano necessari. Se leggiamo anche qui che gli ingredienti dati producono la cassata, l'intepretazione di comporta è molto diversa: essa richiede infatti che *tutto* Γ debba essere usato per produrre Δ. Aggiungere un ingrediente (e usarlo), come ad esempio acciughe, non permette di produrre ancora una cassata.

La regola di indebolimento dice che l'interpretazione di $\vdash$ deve essere la prima, quella che permette di *non* usare tutti gli ingredienti a sinistra di $\vdash$. L'idea è quella di una linea di produzione che prenda solo gli ingredienti utili e lascia lì quelli che non servono.

Vediamo per bene il seguente fatto: l'indebolimento vale se interpreto la $\underline{e}$ e il $\underline{comp}$ in una situazione astratta in cui è possibile trascurare gli input.

Supponiamo di poter trascurare gli input e vediamo che questo giustifica la regola di indebolimento, cioè la rende valida. Devo vedere che dalla premessa $\Gamma \vdash \Delta$ posso concludere anche che $C, \Gamma \vdash \Delta$. Il ragionamento è il seguente: sapendo che $\Gamma \vdash \Delta$, per convincermi di $C, \Gamma \vdash \Delta$ assumo di avere gli ingredienti C, Γ. Ma posso trascurare gli input, allora tralascio l'ingrediente C che non mi serve, e applico su Γ, che rimane, la procedura $\Gamma \vdash \Delta$, che assumo di conoscere, per ottenere Δ, come voluto.

[10]Chi per primo introdusse le regole strutturali di contrazione, indebolimento, scambio, fu Gerhard Gentzen, un allievo di Hilbert, che scrisse la tesi di dottorato a Gottinga nel '34 sul calcolo dei sequenti. Tuttavia Gentzen non concepiva una logica senza queste regole strutturali (studiava logica classica e intuizionistica). I primi a concepire delle logiche senza queste regole strutturali, furono alcuni logici negli anni cinquanta, principalmente americani e un russo. Chi rese famose queste logiche (dette a volte logiche sottostrutturali) fu Girard, con la sua logica lineare. Ne parliamo nei prossimi paragrafi.

Viceversa, affermare la validità della regola di indebolimento, per ogni Γ, Δ e C significa dare proprio una interpretazione di $\vdash$ come quella appena descritta, in cui si possono trascurare ingredienti a piacimento. L'unico modo per far sí che l'indebolimento valga è avere un'interpetazione della $\underline{e}$ metalinguistica che permetta di trascurare gli input. Vediamolo: supponiamo che valga indebolimento, Dato che non so nulla né di C, né di Γ, né di Δ, come faccio a trasformare una qualunque procedura che dica che $\Gamma \vdash \Delta$ in una per $DC, \Gamma \vdash \Delta$? L'unico modo per essere sicuro di saperlo fare sempre è quello di ricondurmi alla premessa, e l'unico modo per fare questo è poter trascurare C, e cioè tralasciare un input. In conclusione: **indebolimento** equivale a **posso trascurare un input**.

Come nell'esempio della ricetta scritta, quindi, ci sono ambiti in cui la regola di indebolimento non vale, e cioè ci sono situazioni in cui si *deve* usare tutto ciò che compare come ingrediente.

In certe situazioni l'aggiungere una assunzione, che pensiamo come un ingrediente in più, non è proprio innocuo. In medicina, per esempio, la conoscenza è un misto tra conoscenza astratta e caso individuale, quindi è molto difficile avere leggi precise perché ciascuno di noi è diverso. Immaginate un medico che riceve una telefonata da un suo paziente abituale, che gli dice: "Ho una febbre di 39 gradi". Sapendo che il paziente è sano altrimenti, e che c'è una epidemia in giro, il medico è portato a concludere che il paziente ha l'influenza. Se Γ è "il paziente ha la febbre" e Δ è "il paziente ha l'influenza", allora il suo ragionamento è plausibile, ed è la deduzione $\Gamma \vdash \Delta$. Ma se la stessa telefonata è ricevuta da un paziente che il giorno prima si è rotto una gamba, allora continuare a dedurre che ha l'influenza sarebbe criminale (potrebbe avere una infezione). Cioè, se aggiungiamo l'informazione C "il paziente si è rotto una gamba", la deduzione $C, \Gamma \vdash \Delta$ non vale più. Qui la regola di indebolimento non può valere: la conoscenza non è così astratta.

La conclusione a cui volevo portarvi è che la regola di indebolimento è valida in certi casi e non in altri. Possiamo essere più precisi e specificare in quali casi, o in quali ambiti è valida? Questo non è un problema da poco. Allo stato attuale, non c'è un criterio fissato e la risposta dipende solo dal nostro buon senso. Come mai siamo in questo stato, che qualcuno potrebbe qualificare come ignoranza? Io vedo due ragioni. Da una parte, è relativamente recente l'interesse (sia dei logici sia in generale di tutti) per logiche che siano molto deboli, cioè che non abbiano una regola come questa di indebolimento. Non è ancora stato trovato un criterio generale, e nemmeno è stata fatta una discussione convincente che ci dica come deve essere un ambito in cui si applica e come uno in cui no. Forse ci vorrà ancora del tempo per chiarire questo tema, che da un punto di vista storico è molto recente, e raggiungere una comprensione concettuale adeguata.

D'altra parte, forse un criterio rigido non ci sarà mai, perché si tratta comunque di interpretare la realtà in qualche modo. Tuttavia, io mi sono fatto un'opinione: la regola di indebolimento non vale negli esempi che abbiamo visto perché si tratta sempre di ambiti concreti, o specifici, e non di conoscenze astratte, o generali.

Aggiungere un ingrediente, come le acciughe, o aggiungere un dato, come la gamba rotta, non è lecito perché stiamo parlando di un ambito concreto, in cui la asserzione è disponibilità di una risorsa o di un dato specifico. Nel caso della gamba rotta, si parla di un individuo specifico, non si parla di un paziente astratto. Non si sta facendo la teoria della clinica, ma la diagnosi di quell'individuo lì; aggiungere un dato cambia.

Aggiungere informazioni può variare le conclusioni e ritrattare conclusioni precedenti. Nella vita, incontrando una persona, se siete ottimisti tendete a fidarvi: la conclusione è che quella persona è degna di fiducia. Ma se poi prendete una botta sui denti, che è un'informazione in più su quella persona, smettete di fidarvi, ritrattate le vostre conclusioni. Il pessimista ragiona al contrario.

Un esempio ulteriore a conferma è il seguente. Mettere 3 cucchiaini di zucchero nel caffè comporta che il caffè mi piace; ma se oltre a 3 cucchiaini di zucchero metto anche un bel cucchiaio di petrolio, non è assolutamente detto che il caffé continui a piacermi. La differenza è che sono passato da una conoscenza astratta ad una concreta.[11]

Può essere utile un ultimo esempio in cui si vede la differenza tra conoscenza astratta e risorse concrete. Se sai quanti km ci sono da Palermo a Capaci, sai calcolare quanta benzina ci vuole se vuoi andarci, diciamo 3 litri. Se poi vieni a sapere anche quanti km ci sono da Palermo a Sciacca, la conoscenza in più non pregiudica la precedente conclusione astratta. Ma altro sarebbe il caso concreto: *andare* da Palermo a Capaci *e* da Palermo a Sciacca comporta ben più di 3 litri!

Di solito la logica si pensa come qualcosa di molto più astratto. Le asserzioni sono pensate come A è vera, B è vera e quindi le varie proposizioni $A, B, C, \ldots$ usualmente sono pensate come più astratte. Non sono risorse a disposizione, come l'avere un chilo di zucchero, ma conoscenza di proposizioni, come l'essere la luna blu (falsa). Una conoscenza, una volta acquisita, non è questione di consumarla o meno; è aggiungibile o meno a quelle già possedute. Per conoscenze più astratte, quindi, la regola di indebolimento è valida, perché dice che se da certe conoscenze Γ, si deduce Δ (e non: da certi ingredienti Γ si possono ottenere i prodotti Δ), a maggior ragione anche se oltre a Γ si conosce qualcos'altro come C, perché posso ignorarlo nel momento in cui da certe conoscenze Γ passo alla conoscenza Δ. In matematica quindi *indebolimento* è certamente corretto.

Per concludere, possiamo chiederci quale sia il senso di studiare il caso in cui non valga la regola di indebolimento. Si tratta, come abbiamo visto, di un concetto di $\underline{comp}$ che è sì un passaggio da assunzioni a conclusioni, da input ad output, un movimento del pensiero, ma che non è una deduzione nel senso usuale del termine, quello che include la verità delle proposizioni. E tuttavia stiamo vedendo che tutto l'apparato delle regole sui connettivi vale anche per un concetto di asserzione più generale. Si poteva scegliere di considerare soltanto il caso in cui l'asserzione che si applica è quella di verità. Io preferisco un'altra via: invece che escludere gli ambiti in cui la regola di indebolimento non vale, si vede come è interessante studiare il caso in cui la regola di indebolimento non è assunta, e si è visto che questo dà luogo ad un apparato di regole interessante. Invece che distinguere tra tutti

[11]Distinguere che cosa significhi che una conoscenza è astratta o concreta è un problema filosofico per nulla discusso in modo esauriente.

quelli possibili l'ambito di applicazione di una logica unica, credo sia più conveniente distinguere i vari apparati di regole a cui possiamo sensatamente dare il nome di logica, e quindi studiare le varie logiche. Resta poi al logico trovare una struttura per le varie logiche e al buon senso di ciascuno decidere in quali ambiti si applicano.

Vediamo infine un fatto tecnico: la regola

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{C, \Gamma \vdash \Delta}$$

equivale alla regola

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Sigma, \Gamma \vdash \Delta}$$

dove Σ può essere $C_1, \ldots, C_k$. Infatti, la seconda regola si ottiene applicando k volte la prima; viceversa, la prima regola si ottiene dalla seconda ponendo $\Sigma = C$.

Vediamo in generale cosa vuol dire che due regole si equivalgono. Le regole sono come degli strumenti, e dire che due strumenti si equivalgono significa dire che tutto quello che si può fare con uno si può fare anche con l'altro, e viceversa.

Nel caso delle due regole sopra, l'equivalenza significa che tutto le derivazioni ottenibili usando la prima si possono ottenere anche usando la la seconda. Va notato che quando diciamo "ciò che si può fare con una regola si può fare anche con l'altra" non vuol dire con la stessa facilità. Se infatti ad un certo punto usiamo la regola

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Sigma, \Gamma \vdash \Delta}$$

poiché sappiamo che è equivalente a

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{C, \Gamma \vdash \Delta}$$

possiamo usare anche quest'ultimaa, ma dobbiamo applicarla esattamente k volte (se Σ è $F_1, \ldots, F_k$).

La regola di contrazione. Parliamo di un'altra regola strutturale che si chiama contrazione:

$$\frac{\Gamma, C, C \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}$$

Prima di discutere il significato della regola generale, vediamo un esempio. Se dicessi che 5 euro e 5 euro comportano 10 euro sareste d'accordo, ma certo non se concludessi che allora 5 euro comportano 10 euro. Questo è banalmente sbagliato in tal caso. Eppure è ciò che dice la regola di contrazione.

La regola di contrazione dice esattamente che quello che si ottiene usando un ingrediente due volte, si può ottenere anche usandolo una volta sola. Quindi la regola dice che gli ingredienti non sono da considerarsi come risorse, ma come conoscenze astratte che si possono riprodurre e usare quante volte si vuole. Ad esempio, sapere che $2 + 2 = 4$ significa poterlo usare in qualsiasi ambito, ma soprattutto un numero qualsiasi di volte.

La regola di contrazione è valida quindi soltanto nel caso in cui si interpreti $\vdash$ in modo che la pura presenza di un ingrediente significhi che si può usare quell'ingrediente quante volte si vuole. Infatti, **contrazione** equivale a **poter duplicare le risorse**. Dimostriamo tale affermazione. Supponiamo di poter duplicare le risorse. Assumiamo quindi che valga l'antecedente Γ, C. Dobbiamo dimostrare che vale il conseguente Δ. Abbiamo il duplicatore, quindi prendiamo C che abbiamo in Γ, C e usandolo otteniamo Γ, C, C. Ora, applicando la premessa $\Gamma, C, C \vdash \Delta$, otteniamo Δ come volevamo.

Viceversa, l'unico modo per rendere valida la contrazione qualunque siano Γ, Δ e C è immaginare un concetto di $\underline{e}$ e $\underline{comp}$ per il quale valga che la duplicazione delle risorse.

Analoghe considerazioni valgono per i prodotti, cioè a destra del segno $\vdash$. In tal caso la regola di contrazione è:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, B, B}{\Gamma \vdash \Delta, B}$$

Quindi le due regole di indebolimento e di contrazione insieme dicono che se compare un ingrediente C, a sinistra di $\vdash$, si deve pensare a C indipendentemente dalla sua quantità, inclusa la quantità zero che vuol dire ignorarlo. In termini di risorse, significa che si può utilizzare C quante volte si vuole. Si capisce allora che assumere queste due regole significa, automaticamente, assumere una interpretazione molto più astratta, perché prescinde dalla quantità.

Nella logica lineare e nella logica di base le regole di indebolimento e di contrazione non sono assunte, non fanno parte delle regole che caratterizzano tali logiche. Nelle logiche in cui si assume indebolimento e contrazione, succede che $\otimes$ e & coincidono, ma questo lo vedremo più avanti.

La regola di scambio. Non è mai stato detto finora che l'ordine delle proposizioni si possa scambiare. E dunque ciò dimostra che in tutto quel che abbiamo fatto sin qui l'ordine non è rilevante. Ma d'ora in poi la utilizzeremo sempre, anche senza esplicitarla. [12]

La regola di scambio è un'assunzione sulle proprietà della $\underline{e}$ che lega le asserzioni.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}$$

Una regola analoga si assume anche a destra. Usualmente le regole strutturali si assumono sia a destra che a sinistra, anche se questo non è un obbligo. Quindi, per esempio, si può procedere così:

$$\text{scambio a sinistra} \qquad \frac{\Gamma, C, D, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, D, C, \Gamma' \vdash \Delta}$$

ma anche così:

$$\text{scambio a destra} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, C, D, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, D, C, \Delta'}.$$

o, ancora, così

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Lambda, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Lambda, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Lambda, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Lambda, \Sigma, \Delta'}$$

[12] Nel 2006, la regola di scambio non è mai stata esplicitata; semplicemente, l'ordine non è considerato rilevante.

e cioè su liste di formule in blocco. Come si fa a vedere che lo scambio su liste (Σ e Λ sono liste tanto quanto Γ e Δ) vale assumendo che valga lo scambio di due proposizioni? Basta farlo tante volte fino a quando si accumulano. Ad esempio, per passare da C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 a D_1, D_2, C_1, C_2, C_3 usando lo scambio solo di due proposizioni alla volta, scambio D_1 prima con C_3, poi con C_2 e poi con C_1, e arrivo a D_1, C_1, C_2, C_3, D_2; e continuando arrivo a D_1, D_2, C_1, C_2, C_3.

In ogni caso, applicando la regola di scambio a piacimento posso portare una qualunque proposizione in qualunque posto a patto che essa rimanga sempre a sinistra.

Noi assumeremo che la $\underline{e}$ sia commutativa, ma nella realtà questo non vale sempre, specie se ha una connotazione temporale. Ad esempio, ho preso una botta in testa e sono caduto dal motorino, è diverso da: sono caduto dal motorino ed ho preso una botta in testa.

In conclusione, le regole viste in questo paragrafo sono chiamate regole strutturali, perché riguardano la struttura delle asserzioni, e mai parlano di un connettivo. Inoltre, dovrebbe essere chiaro come l'aggiungere tali regole equivalga a pensare ad un'interpretazione più astratta del concetto di asserzione. *Sono regole metalinguistiche, riguardanti il metalinguaggio, e dicono come si combinano tra loro le varie asserzioni.*

6. Il connettivo di implicazione.

Finora abbiamo applicato il principio di riflessione, cioè abbiamo riflesso al livello del robot, sempre il legame $\underline{e}$. Che cosa succede se proviamo a riflettere il legame $\underline{comporta}$ stesso nel linguaggio del robot? È quel che ora vediamo. Dobbiamo partire da una equazione definitoria. L'equazione più bella sarebbe questa:

$$\Gamma \vdash A \rightarrow B \text{ se e solo se } \Gamma \vdash (A \vdash B)$$

Cioè si vuole un connettivo, che indicheremo con una freccetta $\rightarrow$, che si leggerà implicazione, che rifletta il segno di comporta quando esso compare a destra del segno di comporta stesso. In altri termini, si cerca un connettivo le cui regole siano le istruzioni da dare al robot per spiegargli come si comporta il $\underline{comporta}$ stesso. Per risolvere questa equazione si dovrebbe avere una teoria dei sequenti in cui c'è un segno $\vdash$ di comporta dentro un altro segno $\vdash$ stesso; questa teoria è piuttosto complicata, nel senso che non vedo chiaramente quale debba essere la formulazione più sensata.

Allora si rinuncia a risolvere l'equazione in tale forma. Per ridurci al caso di un solo segno $\vdash$, si assume che le proposizioni su cui operano le regole possano essere affiancate da una lista di proposizioni, come Γ o Γ', che si chiamano contesti. Ora è facile risolvere l'equazione più semplice:

$$\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \underline{sse} \quad \Gamma, A \vdash B$$

Si vede quindi che c'è una relazione molto forte tra il connettivo di *implicazione*, $\rightarrow$, e il legame $\underline{comporta}$, o conseguenza logica, e tale relazione è data appunto dall'equazione definitoria sopra scritta.

La difficoltà di questo connettivo è che deve esprimere in una proposizione complessa il passaggio da sinistra a destra del segno di sequente, ovvero la trasformazione di qualche cosa da ingrediente a prodotto. Sul suo significato discuteremo dopo; prima, semplicemente applichiamo il solito schema per risolvere l'equazione e ottenere le regole di deduzione. Quindi la regola di formazione è immediata:

$\to$-formazione

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Essa dice che dato $\Gamma, A \vdash B$, si può spostare l'assunzione A da sinistra a destra. L'altro verso dell'equazione definitoria ci dà

$\to$-riflessione implicita

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Come ci aspettiamo, dà luogo ad un assioma banalizzando Γ, cioè considerando il caso in cui Γ sia $A \to B$. La premessa diventa $A \to B \vdash A \to B$, e quindi avremo:

$\to$-assioma

$$A \to B, A \vdash B$$

Qui emerge qualcosa di molto interessante: questo assioma dice che se sappiamo che $A \to B$ e conosciamo A, allora conosciamo anche B; il che non è una banalità.

La regola di riflessione esplicita si ottiene come al solito per composizione. Vediamo in dettaglio. A partire da $A \to B, A \vdash B$, vogliamo tagliare A e B, cioè applicare due composizioni. Per tagliare A, dobbiamo supporre che $\Gamma \vdash A$. Tagliamo A, e otteniamo quindi $A \to B, \Gamma \vdash B$. Analogamente, per tagliare B dobbiamo supporre che da B segua Δ, cioè $B \vdash \Delta$. Quindi in definitiva tagliando B otteniamo $A \to B, \Gamma \vdash \Delta$. Mettendo assieme, la derivazione è:

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash A \quad A, A \to B \vdash B}{\Gamma, A \to B \vdash B} \qquad B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$$

La regola quindi dirà che dalle premesse $\Gamma \vdash A$ e $B \vdash \Delta$ si può ottenere $A \to B, \Gamma \vdash \Delta$. Cioè, schematicamente:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$$

In realtà, si può anche rinforzare questa regola, perché quando si applica composizione per tagliare B, si può supporre che ci sia anche un contesto Γ'. La derivazione sarà:

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash A \quad A \to B, A \vdash B}{\Gamma, A \to B \vdash B} \qquad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta}$$

Questo ci porta alla regola

$\to$-riflessione esplicita

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta}$$

Per tornare indietro, cioè per ottenere $\to$-assioma, si banalizza la riflessione esplicita, applicandola nel caso in cui $\Gamma = A$, Γ' vuoto e $\Delta = B$. Così le premesse diventano le identità $A \vdash A$ e $B \vdash B$ e come conclusione si ha l'assioma $A, A \to B \vdash B$. Ora per ottenere $\to$-riflessione implicita da $\to$-assioma, si assume la premessa $\Gamma \vdash A \to B$, si taglia $A \to B$ e si ottiene $\Gamma, A \vdash B$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \quad A, A \to B \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

che ci porta a quel che volevamo, $\to$-riflessione implicita.

L'equazione definitoria per $\to$ si risolve quindi come tutte le altre, sempre seguendo lo stesso schema. La giustificazione delle regole di $\to$ ha la stessa forma della giustificazione che abbiamo dato per le regole di tutti gli altri connettivi visti finora. Quindi, per noi è formalmente anche $\to$ è un buon connettivo. Possiamo darlo in pasto al robot, dandogli le regole di $\to$-formazione e di $\to$-riflessione esplicita.

Ora però cerchiamo di capire, come abbiamo fatto nel caso degli altri connettivi, quale sia il significato del connettivo $\to$ appena introdotto. Naturalmente, l'interpretazione a cui siamo abituati è quella in cui si legge l'asserzione come asserzione di verità. Un caso particolare è quando Γ è vuoto, e in tal caso l'equazione definitoria diventa:

$$\vdash A \to B \; vera \quad \underline{sse} \quad A \; vera \; \vdash \; B \; vera.$$

(ricordando che la scrittura $\vdash A \to B \; vera$ dice che $A \to B \; vera$ vale in presenza di zero ingredienti (il Γ è vuoto), cioè è la stessa cosa che dire che $A \to B \; vera$). Semplicemente guardando la forma in superficie, si nota che mentre a sinistra in $\vdash A \to B \; vera$ l'asserzione di verità *vera* compare una sola volta, che vuol dire che è un'unica asserzione, in $A \; vera \vdash B \; vera$ compare due volte, che significa che è un'asserzione composta. Come proposizione, $A \to B$ ha appunto questa funzione: *poter rendere con un'unica asserzione un legame di conseguenza tra due asserzioni.*

Nel linguaggio comune la distinzione tra l'asserzione della proposizione complessa, cioè $A \to B \; vera$, e l'asserzione composta, cioè $A \; vera \; comporta \; B \; vera$ non sempre si fa; secondo me, è così proprio perché vale l'equivalenza tra la verità dell'implicazione $A \to B$ e la correttezza dell'asserzione composta $A \; vera \; comporta \; B \; vera$.

Per noi $A \to B \; vera$ e $A \; vera \vdash B \; vera$ sono equivalenti, ma chiaramente non sono la stessa cosa: l'unica differenza è che una è un'asserzione composta e l'altra no. Ma se sono equivalenti, perché formare la nuova proposizione? Per il solito motivo, comune a tutti i connettivi: non solo in questo modo istruiamo il robot, ma anche otteniamo una nuova proposizione $A \to B$ che, parlando in modo informale, possiamo spostare dove vogliamo, ad esempio come antecedente di un'altra implicazione, o in una disgiunzione dentro una formula piú complicata,... In altre parole: se, nella situazione in cui è creata (cioè, direttamente a destra di $\vdash$), $A \to B$ è equivalente a qualcosa che abbiamo già, questo non è più vero in tutti gli altri casi, quando la $A \to B$ compare ad esempio come assunzione.

Di solito accade che si faccia un po' di fatica a capire ciò perché nella lingua non si suol distinguere l'uno dall'altro. Ma in ogni caso spesso prevale nella lingua quotidiana l'uso dell'asserzione composta, rispetto all'implicazione. Di solito si dice: `Oh, piove! Ah, allora prendo l'ombrello` e cioè `è vero che piove` $\underline{comp}$ `è vero che prendo l'ombrello`. Però capita anche di dire (anche se più raramente) cose di tipo: `Quando piove prendo l'ombrello`, e cioè è vero che `se piove allora prendo l'ombrello`.

Anche nella lingua comune si usano spesso frasi del tipo $A \to B$ e capita di asserire che $A \to B$ sia vera. Questo è ancora più chiaro se si pensa a casi in cui $A \to B$ è all'interno di una asserzione complessa. Ad esempio: `Dato che quando esco la mattina se piove prendo l'ombrello, e dato che ora non ho con me l'ombrello, significa che stamattina non pioveva` ha chiaramente la forma

$$(A \to B\ vera\ \underline{e}\ \neg B\ vera)\ \underline{comp}\ \neg A\ vera$$

(vedremo tra poco come si definisce $\neg A$).

L'approccio alla logica attraverso il principio di riflessione permette di chiarire un punto che spesso altrimenti risulta oscuro. Come dice $\to$-assioma, se si sa che $A \to B$ è vera, e si sa anche che A è vera, allora si può concludere che anche B è vera:

$$\frac{A \to B\ vera \quad A\ vera}{B\ vera}$$

Ma vedete che questa conclusione non si basa su qualche inspiegabile assunzione sulla natura dell'implicazione, ma semplicemente sul significato di $A \to B$ vera: infatti, per l'equazione definitoria, $A \to B$ è quella proposizione la cui asserzione di verità equivale a dire che da A vera segue B vera. È solo per questo che quando si sa che $A \to B$ è vera, allora automaticamente se si sa che A è vera, si può ottenere che anche B è vera. Questo è un punto delicato – per la sua semplicità – soprattutto per chi aveva già visto complicate spiegazioni sulla natura metafisica dell'implicazione. Infatti, spesso si dice che si deve assumere a priori che se vale $A \to B$ e se vale A, allora deve valere B. Notate che questo è un caso particolare di quel che classicamente si chiama *modus ponendo ponens*, che afferma

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

che alcuni dicono essere addirittura la base del ragionamento, che si deve assumere a priori, come assoluto, ecc. Retorica, nulla di più falso. Perché? Perché abbiamo appena visto che $A \to B$ è *per definizione* la proposizione che soddisfa l'equazione definitoria, e questo che significa semplicemente che (e nient'altro che) *siamo noi che abbiamo chiamato $A \to B$ esattamente quella proposizione che, una volta asserita come vera, equivale all'asserzione composta A vera $\underline{comp}$ B vera.* Ora se consideriamo il caso particolare di modus ponens in cui sia Γ sia Γ' sono vuoti, otteniamo

$$\frac{\vdash A \quad \vdash A \to B}{\vdash B}$$

che sappiamo equivalere a

$$\frac{A\,vera \quad A \to B\,vera}{B\,vera}$$

cioè, per le abbreviazioni adottate, esattamente la stessa cosa del nostro $\to$-assioma. D'altra parte, è altrettanto immediato riottenere la regola generale a partire dall'assioma:

$$\dfrac{\Gamma' \vdash A \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \to B \quad A, A \to B \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

In conclusione, il modus ponens è equivalente alle nostre $\to$-riflessione implicita, $\to$-assioma e $\to$-riflessione esplicita.

Per capire bene quanto sopra, è essenziale ricordare che *quando si asserisce $A \to B$ vera, non si asserisce nulla sulla verità di A, ma solo sul legame della verità di A con quella di B, come espresso appunto nella asserzione composta a cui $A \to B$ vera equivale.*

A questo legame si potrebbe dare una forma matematica, che può essere utile a confermare quanto abbiamo cercato di spiegare fin qui. Una prova di $A \to B$ (cioè una verifica della sua verità) ci deve convincere che dalla verità dell'antecedente A possiamo ottenere quella del conseguente B, e quindi in termini matematici essa è costituita da una funzione che trasforma ogni verifica di A in una verifica di B.

Facciamo qualche esempio. Una madre (o un padre, se abbiamo timore di cadere nel mammismo!) dice ad un suo bambino: `Ascoltami bene: se non mangi, non ce la fai!'.` (possiamo immaginare una situazione specifica, come: se non fai merenda, non resisti per tutte le cinque ore di scuola). La frase della madre è pensabile come una asserzione della verità dell'implicazione $A \to B$, dove $A =$ `non mangi` e $B =$ `non ce la fai`. Ma si noti che la madre non sta dicendo nulla sul fatto che questo bambino mangi o non mangi. Quando lei dice la sua frase, non sappiamo nulla sulla verità di A: il bambino può mangiare o no, non ci è dato saperlo. Noi sappiamo solo che c'è un legame tra la verità di A, non mangia, e la verità di B, non ce la fa. La verità della prima comporta la verità della seconda, ma non c'è alcun impegno sulla verità né dell'una né dell'altra.

Quando la madre asserisce che `Se non mangi, non ce la fai`, quel che vuole far capire al figlio è il legame tra la verità di `noin mangi` e quella di `non ce la fai`, che certamente non ha bisogno di alcunché di metafisico per essere appresa, nè per essere applicata (ad esempio, rendendosi conto di aver saltato la merenda, si sta attenti a non cadere...) Non c'è niente di dato prima di tutto, in sé. Se si leggono le cose in questo modo, si risolvono molti dei cosiddetti paradossi della implicazione.

È tipico di tutti gli esseri umani cadere facilmente nell'errore di considerare vera qualunque proposizione di cui si parli. Cioè, quando si parla di qualcosa, si fa fatica a capire che quel qualcosa può essere semplicemente un'assunzione, o un'ipotesi.

Ma si noti che $A \to B$ può valere anche se non scatta mai, anche se non viene mai usato per dedurre B da A, perché potrebbe essere che A non vale mai (e $A \to B$ varrebbe lo stesso): questo capita ad esempio nelle scommesse o nelle frasi paradossali. Certe volte si fanno delle ipotesi e se ne traggono conseguenze assurde proprio per mostrare che quelle ipotesi sono false. Un esempio tipico potrebbe essere: `Pensi che se avessi vinto al totocalcio io sarei qui a sgobbare?` Altri esempi di questo tipo sono le scommesse: `Se salti fuori dalla finestra ti pago cinque milioni`. (naturalmente, dipende dall'altezza!). Non vuol dire che qualcuno dovrà buttarsi dalla finestra; non vuol nemmeno dire che lo pagherò cinque milioni, però mi impegno a farlo. L'implicazione è vera adesso, è una scommessa e si chiama scommessa appunto perché posso sostenere la sua verità adesso. Ci aiuta ad illustrare l'idea che un'implicazione possa essere vera senza dire nulla circa la verità dell'antecedente A.

Ci sono tanti esempi di questo tipo; di solito vengono espressi in forme paradossali per far capire bene che un'implicazione non dice nulla della verità di A. Quando ad esempio qualcuno pronuncia un *se* così strano da sembrare irrealizzabile, volendolo prendere in giro gli si risponde, in modo non tanto simpatico, `se mia nonna avesse le ruote, sarebbe un tram.`È una follia, surreale, più o meno divertente; comunque, si tratta di un'implicazione perché non esiste un modo di rendere vero l'antecedente. Anzi, l'implicazione è sempre vera, almeno in un certo senso, e rappresenta un modo per dire all'interlocutore: guarda che stai assumendo qualcosa di così irrealizzabile che se fosse vero quello che dici, sarebbe vera qualunque cosa.[13]

Un altro esempio. Anni fa su un muro della città in via Cavalletto c'era un'enorme scritta in rosso: `Curcio è innocente`, che con alcune aggiunte in blu dava `se Curcio è innocente, Saragat è astemio`. Qui si dovrebbe almeno sapere chi era Saragat e quanto amasse il buon bere... fin dal primo mattino. Questa scritta esprimeva un'implicazione. Ed infatti è proprio di tipo `Curcio è innocente` $\rightarrow$ `Saragat è astemio`. Ma ciò che si intendeva con questa implicazione era comunicare una situazione paradossale: se fosse stato vero `Curcio è innocente`, sarebbe stato anche vero `Saragat è astemio`. Ma tutti sapevano quanto `Saragat è astemio` fosse lontano dalla realtà, e così facendo l'autore delle aggiunte riusciva in modo efficace a realizzare l'intento di asserire che `Curcio è innocente` non era vero.

Riassumendo (e ripetendo): il fatto che un'implicazione $A \rightarrow B$ sia vera dice che la verità dell'antecedente A è legata a quella del conseguente B, ma non dice nulla sulla verità né dell'uno né dell'altro in sé. È importante distinguere: un conto è il *legame* tra le verità di due proposizioni, se A è vera allora anche B è vera, e un conto è l'asserzione della verità di A o di B separatamente.

È anche molto importante fare attenzione al fatto che, contrariamente ai connettivi che abbiamo visto finora, il legame tra la verità di A e quella di B espresso da $A \rightarrow B\ vera$ ha un verso: se A è vera, per forza anche B è vera. Ma questo non ha molto a che fare (qualche volta non ha proprio nulla a che fare) con l'altro verso e cioè con $B \rightarrow A\ vera$, che vuol dire che da $B\,vera$ segue $A\,vera$. Eppure è un errore tipico, un errore che si fa molto più spesso di quel che si creda. Perché questi errori? Forse perché, di fatto, quello che si instaura con l'implicazione è un legame ed allora uno pensa semplicemente al legame e non al verso del legame.

Un esempio dal sapore (sic) antico è il seguente. Io sono andato a scuole elementari dalle suore, e c'era una mensa. In realtà a quei tempi talmente si cercava di risparmiare che mangiare in mensa era un lusso, e si ci portava il mangiare da casa. Comunque, supponiamo che si mangiasse sempre in mensa. Siccome nessuno voleva mangiare minestrone, ma tutti preferivano

[13]Quindi è anche un esempio di applicazione della regola del falso, vedi più avanti.

spaghetti, c'era una regola di questo tipo: `il giorno dopo aver mangiato il minestrone, si mangiano gli spaghetti.` Allora, sapendo che oggi si son mangiati spaghetti, Pierino dice: "Oh Dio, domani tocca minestrone!" È sbagliato, naturalmente, però voi non avete idea di quanti direbbero che sì, domani tocca il minestrone. Sbagliato, perché sapere che minestrone comporta che il giorno dopo spaghetti, nulla dice su che cosa debba succedere il giorno dopo aver mangiato spaghetti. La successione può essere: spaghetti, spaghetti, minestrone, spaghetti, spaghetti, spaghetti, spaghetti... e non necessariamente il caso peggiore (se odiamo la minestra), cioè spaghetti, minestrone, spaghetti, minestrone,... La regola minestrone comporta spaghetti è vera semplicemente quando nella successione dei giorni minestrone è sempre seguito da spaghetti, ma questo nulla dice su quel che ci deve essere dopo spaghetti.

Eppure molti ci cascano. E questo non ha particolari conseguenze; il guaio è che molti ci cascano anche quando fare attenzione all'inversione è importante. Anzi, è un tipico errore per esempio tra i politici presumere che sia un legame "bidirezionale" e quindi rovesciare una conseguenza. Ed è tipico perché il nostro modo di procedere non è rigido come quello di una macchina, e funziona abbastanza per immagini. Quindi se si introduce un legame tra A e B (che per noi appaiono pur sempre come immagini), poi non è facile ricordare che quel legame ha anche una direzione. Quello che resta più impresso è il legame. Per lo stesso meccanismo, si ha quella che si chiama "pubblicità negativa", per cui se vediamo scritto a lettere enormi

non è vero che Paolo Rossi è un pedofilo.

nella prima pagina della cronaca locale, di fatto tutti sospetteranno che lo sia. Infatti questo introduce l'immagine che Paolo Rossi è un pedofilo, anche se poi è per negarlo. [14]

Certo, non si usa solo nel modo paradossale visto in questi ultimi esempi. Però, in un qualche modo sì, nel senso che si usa un'implicazione $A \to B$ solo quando non si sa che A è vera. Un essere umano difficilmente userà un'implicazione di tipo $A \to B$ se sa già che A è vero; in questo caso, infatti, dirà "siccome A è vero, allora B è vera".

7. La logica intuizionistica.

Nel paragrafo 5, abbiamo già accennato a che tipo di concezione corrispondono le regole di indebolimento e di contrazione. Tali regole le consideriamo valide quando le proposizioni di cui parliamo A, Γ, Δ sono proposizioni nel senso di conoscenze astratte. Infatti, in tal caso è abbastanza naturale pensare all'indebolimento semplicemente come il dire che per dedurre nuove conoscenze non si deve usare tutto quello che si sa, ma è possibile usarne una parte.

La logica che assume queste due regole strutturali è detta *logica intuizionistica.* Per caratterizzarla velocemente, diciamo che, rispetto alla logica di base, ha:

- i contesti a sinistra

[14] Quando parleremo della negazione più avanti vedremo che essa ha un legame stretto con l'implicazione, e quindi non sorprende che vi siano meccanismi simili.

- le regole strutturali viste in precedenza:
  indebolimento
  contrazione
  scambio[15]
- una assunzione sulla proposizione falsa $\perp$ (vedi più avanti)

È bene notare ora (e lo faremo più in dettaglio tra poco) che la composizione è una regola che abbiamo noi e che usiamo per trovare quali istruzioni si devono dare al robot. Si noti, però, che la composizione stessa non è una regola che si possa facilmente dare come istruzione al robot, e a dire il vero non è nemmeno conveniente farlo. Con il teorema dell'eliminazione dei tagli si dimostra che qualsiasi risultato ottenuto dall'applicazione delle nostre regole e dall'uso della composizione si può ottenere anche senza l'uso della composizione.

Le regole strutturali saranno considerate nella loro forma generale, in cui si applicano a liste, in modo che si possano applicare in blocco su quante proposizioni si vogliano:

scambio
$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Lambda \vdash \Delta}{\Gamma, \Lambda, \Sigma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Lambda}{\Gamma \vdash \Delta, \Lambda, \Sigma}$$

indebolimento
$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma}$$

contrazione
$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma}$$

In presenza dei contesti a sinistra, le regole sui connettivi sono:

&-formazione
$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}$$

&-riflessione
$$\frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash B}.$$

Usando indebolimento e contrazione, si può vedere (esercizio) che per & valgono le seguenti derivate:
$$\frac{A, B \vdash \Delta}{A \& B \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \& B}$$

Inoltre:

$\vee$-formazione con contesti
$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

[15] Si ricordi che scambio lo usiamo sempre; non parleremo mai di logica senza la regola dello scambio.

$\vee$-riflessione

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}.$$

$\rightarrow$-formazione

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

$\rightarrow$-riflessione

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B, \Gamma' \vdash \Delta}$$

Infine abbiamo una proposizione $\perp$ che chiamiamo *falso* e la regola che l'accompagna, *ex falso quodlibet* (dal falso segue qualunque cosa), che assumiamo nella forma della regola:

$\perp$-regola

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \Delta.}$$

Questa regola dice che: "Se da certi ingredienti ottieni l'impossibile, allora ottieni quello che vuoi". È una regola che spiega come si deve intendere la proposizione chiamata "impossibile" o "il falso".

Se si assume anche la regola di indebolimento, come stiamo facendo, allora la regola del falso equivale all'assioma:

$$\perp \vdash$$

Infatti, da $\perp \vdash$ per indebolimento si ha $\perp \vdash \Delta$, e quindi per composizione dalla premessa $\Gamma \vdash \perp$ si conclude che $\Gamma \vdash \Delta$.

Viceversa, applicando la regola del falso con $\Gamma = \perp$ e Δ vuoto, si ha subito $\perp\vdash$.

Dalla regola del falso segue quindi che:

$$\Gamma \vdash \perp \quad \text{se e solo se} \quad \Gamma \vdash$$

Questa logica si chiama *logica intuizionistica* e il sistema formale appena dato si chiama **LJ**.

Notate che non si assume la regola di composizione.

Esempio 1. Dimostriamo la proprietà distributiva di $\vee$ rispetto a &:

$$(A\&B) \vee C \doteq (A \vee C)\&(B \vee C)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A\&B \vdash A}}{A\&B \vdash A \vee C} \quad \dfrac{C \vdash C}{C \vdash A \vee C}}{(A\&B) \vee C \vdash A \vee C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{A\&B \vdash B}}{A\&B \vdash B \vee C} \quad \dfrac{C \vdash C}{C \vdash B \vee C}}{(A\&B) \vee C \vdash B \vee C}}{(A\&B) \vee C \vdash (A \vee C)\&(B \vee C)}$$

Si noti che questa proprietà vale anche in una logica più debole, visto che non abbiamo mai usato indebolimento o contrazione.

Esercizio 1. Dimostrare l'altra implicazione cioè

$$(A \vee C)\&(B \vee C) \vdash (A\&B) \vee C$$

Esercizio 2. Dimostrare l'altra proprietà distributiva

$$(A\&C) \vee (B\&C) \doteq (A \vee B)\&C$$

Una proprietà dimostrabile solo se si usa indebolimento è, ad esempio, la seguente:

$$\vdash A \to (B \to A)$$

Tale asserzione si potrebbe "tradurre" dicendo: "Vale A, a maggior ragione se vale anche B".

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}}{A \vdash (B \to B)}}{\vdash A \to (B \to B)}$$

Si lascia come esercizio il dimostrare rigorosamente che questo sequente non è dimostrabile senza l'uso della regola di indebolimento. Anzi, vedremo in seguito che è equivalente alla regola di indebolimento.

8. Il connettivo di negazione e il principio del terzo escluso.

Una logica in cui valgono tutte le regole della logica intuizionistica e in più si assumono contesti a destra, indebolimento a destra, contrazione a destra si chiama *logica classica*. In tale logica si ristabilisce la simmetria nel senso che tutte le regole che si hanno a sinistra sono anche a destra.

Cosa succede in logica classica che non succede in logica intuizionistica? Ad esempio, si può dimostrare che $\Gamma \vdash D_1, \ldots, D_n$ e $\Gamma \vdash D_1 \vee \ldots \vee D_n$ sono equivalenti:

$$\Gamma \vdash D_1, \ldots, D_n \text{ se e solo se } \Gamma \vdash D_1 \vee \ldots \vee D_n$$

Infatti, consideriamo la dimostrazione nel caso $n = 2$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash D_1, D_2}{\Gamma \vdash D_1 \vee D_2, D_2}}{\Gamma \vdash D_1 \vee D_2, D_1 \vee D_2}}{\Gamma \vdash D_1 \vee D_2}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash D_1 \vee D_2 \qquad \dfrac{\dfrac{D_1 \vdash D_1}{D_1 \vdash D_1, D_2} \qquad \dfrac{D_2 \vdash D_2}{D_2 \vdash D_1, D_2}}{D_1 \vee D_2 \vdash D_1, D_2}}{\Gamma \vdash D_1, D_2}$$

Osserviamo che questa equivalenza vale per noi, non per il robot; infatti abbiamo usato la regola di composizione. Inoltre, per dimostrare l'equivalenza abbiamo usato le regole di $\vee$-riflessione con contesto. Pertanto, tale equivalenza non vale in logica intuizionistica.

Definiamo il connettivo di negazione; con il segno $\perp$ indichiamo una proposizione falsa con certezza, o una contraddizione, o una cosa impossibile, che non può valere e la leggiamo *il falso*. Per esempio, "il sole è un pianeta".

Allora la negazione di A è per definizione quella proposizione che è vera se e solo A è falsa, nel senso che da A segue il falso o, più pedantemente, dalla verità di A segue anche la verità della proposizione falsa $\perp$. Detto in altri termini, vogliamo che la proposizione $\neg A$ sia definita dall'equazione:

$$\vdash \neg A \ \mathit{vera} \quad \text{sse} \quad A \ \mathit{vera} \vdash \perp \mathit{vera}$$

o più in generale da

$$\Gamma \vdash \neg A \; vera \quad \text{sse} \quad \Gamma, A \; vera \vdash \bot \; vera$$

Qui però non c'è nulla da risolvere, perché possiamo vedere tale equazione come un caso particolare della equazione definitoria di $\rightarrow$,

$$\Gamma \vdash A \rightarrow B \text{ sse } \Gamma, A \vdash B$$

Infatti, se diciamo che per definizione

$$\neg A \equiv A \rightarrow \bot$$

allora l'equazione per la negazione diventa

$$\Gamma \vdash A \rightarrow \bot \; vera \quad \text{sse} \quad \Gamma, A \; vera \vdash \bot \; vera$$

che è il caso particolare dell'equazione definitoria per $\rightarrow$ in cui B è uguale a $\bot$.

Il fatto che la negazione sia un caso particolare della implicazione ci permette di non definire altre regole, visto che sono quelle di $\rightarrow$, già note. Dobbiamo dare solo le regole per vedere il comportamento di $\bot$.

Qui non parleremo mai della vera essenza della negazione. Stiamo solo dicendo che, definendo questo connettivo unario (che opera su una sola proposizione) cosí come sopra, otteniamo una trattazione convincente del concetto di negazione. Vediamo perché.

Per dire che vale $\neg A$ dobbiamo avere un'informazione positiva e cioè che se A valesse potremmo concludere una cosa impossibile. Questa definizione è una negazione costruttiva, nel senso che dobbimao avere argomenti precisi che ci facciano concludere che A è impossibile, nel senso che da A seguirebbe una cosa già nota come impossibile.

Questa è una definizione "positiva" di $\neg$. La negazione è trasformata in un'implicazione del falso. Siccome una prova dell'implicazione è un criterio che ci fa passare da prove di A a prove di B, allora la prova della negazione ci dà un criterio, in base al quale da una prova di A si ottiene una prova del falso. In questa interpretazione, il fatto che A non valga non vuol dire che valga $\neg A$.

In LK vale

$$A \rightarrow B \vee B \rightarrow A$$

Infatti $A \rightarrow B$ equivale a $\neg A \vee B$ quindi $A \rightarrow B \vee B \rightarrow A$ equivale a $(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)$ che, per l'associatività di $\vee$, equivale a $(\neg A \vee A) \vee (\neg B \vee B)$, che vale in LK. Quindi vale, ad esempio, che se SC=Saddam è un criminale e BG=Bush fa la guerra, in logica classica vale $SC \rightarrow BG \vee BG \rightarrow SC$ cioè o Bush fa la guerra perchè Saddam è un criminale, oppure Saddam è un criminale perchè Bush gli fa guerra.

In molti atteggiamenti di intolleranza si vede la differenza tra negazione forte e negazione debole. Per esempio, se in un paese arriva uno straniero e si verifica un furto, allora è molto probabile che sia accusato lui, in quanto si pensa che: "poiché non è stato nessun altro, allora deve essere stato lui". La negazione usata in questo esempio non è come quella definita sopra, in cui per poter dire che "è stato lui", si devono avere delle prove. Infatti, si arriva alla conclusione positiva "è stato lui" dall'aver negato la colpevolezza dei restanti abitanti del paese.

Definendo la negazione in questo modo, si ottengono intuizionisticamente delle regole semplici. Le regole di deduzione che gestiscono $\neg$ sono ottenute da quelle per $\to$ come caso particolare. La regola di $\to$-formazione (assieme all'equivalenza tra $\Gamma \vdash$ e $\Gamma \vdash \perp$) dà subito come caso particolare la regola derivata

$\neg$-destra

$$\frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Si può anche vedere direttamente:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma, A \vdash \perp}\ \text{indebolimento}}{\Gamma \vdash A \to \perp}\ \to \text{-formazione}$$

A parte il sistema formale con cui istruiremo il robot, intuitivamente $\neg$-formazione dice che un ingrediente si può trasformare in un prodotto se si mette un $\neg$ davanti.

Inoltre, la regola di $\to$-riflessione (ricordando che $\perp \vdash \perp$ vale) dà

$\neg$-sinistra

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash}$$

in base alla quale è anche possibile trasformare un prodotto in un ingrediente. Eccone la dimostrazione:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \perp\vdash\perp}{\Gamma, A \to\perp\vdash\perp}\ \to \text{-formazione}}{\Gamma, A \to\perp\vdash}\ \text{indebolimento}$$

Queste due regole fanno passare una proposizione da sinistra a destra, e viceversa, aggiungendo $\neg$. È possibile passare da sinistra a destra, e viceversa, anche togliendo $\neg$? Ci stiamo chiedendo cioè se vale la legge della doppia negazione, in base a cui

$$A \doteq \neg\neg A$$

La legge della doppia negazione vale solo nella logica classica. Infatti, mentre la derivazione

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash\perp}}{A \vdash \neg\neg A}$$

usa solo le regole appena viste sulla negazione, e quindi vale anche in logica intuizionistica, nella derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash A, \perp}}{\vdash A, \neg A}\ \to \text{-formazione}}{\neg\neg A \vdash A}$$

l'applicazione di $\to$-formazione ha bisogno del contesto a destra, che è A. Si può dimostrare che senza contesti a destra la legge della doppia negazione $\neg\neg A \to A$ non è dimostrabile; in particolare, non vale nella logica intuizionistica.

Un principio equivalente alla doppia negazione è il principio del terzo escluso:

$$\vdash A \vee \neg A$$

Questo principio dice: qualunque sia la proposizione A, è dimostrabile $A \vee \neg A$. Prima vediamo che è dimostrabile in logica classica.

Abbiamo già dimostrato che $\Gamma \vdash \Delta$ equivale a $\Gamma \vdash D_1 \vee \ldots \vee D_n$. Questo dà come caso particolare

$$\Gamma \vdash A, B \ \underline{\textit{sse}} \ \Gamma \vdash A \vee B$$

Quindi

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash \neg A, A}}{\vdash A, \neg A}}{\vdash A \vee \neg A}$$

Si poteva dimostrare anche senza usare questa equivalenza nel seguente modo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash \bot, A}\;\text{indebolimento}}{\vdash A \to \bot, A}\;\neg\text{-destra}}{\vdash \neg A \vee A, A}\;\vee\text{-riflessione con contesto}}{\vdash \neg A \vee A, \neg A \vee A}\;\vee\text{-riflessione con contesto}}{\vdash \neg A \vee A}\;\text{contrazione}$$

Con ciò abbiamo dimostrato che, qualunque sia A, in **LK** vale $\neg A \vee A$.

In **LJ** (circa= BLS) $\vdash A \vee \neg A$ non è dimostrabile. In **LK** (=**LJ** più contesti a destra) è dimostrabile perchè in **LK** le regole a destra hanno il contesto: In **LJ**: $(\Gamma \vdash A) \vdash (\Gamma \vdash A \vee B)$ In **LK**: $(\Gamma \vdash A, \Delta) \vdash (\Gamma \vdash A \vee B, \Delta)$ (questa è la regola da usare con Δ non vuoto).

Nel prossimo paragrafo vedremo perché in logica intuizionistica non è dimostrabile il principio del terzo escluso. La logica intuizionistica, infatti, si caratterizza tecnicamente, e non come concetto, dicendo: è il sistema di logica in cui non vale il principio del terzo escluso.[16] Cioè, fissata la logica **LJ**, cioè considerando le regole per &, $\vee$, $\to$, per $\bot$, identità, indebolimento e contrazione, in essa non è possibile dimostrare che $\vdash A \vee \neg A$.

Facciamo un esempio per illustrare la differenza tra A e la sua doppia negazione. Incontrate una ragazza, vi è simpatica e riuscite a strapparle il numero di telefono. Dopo un po' le telefonate, la invitate a cena e lei risponde: "Non dico di no!". Cosa fate? Prenotate la trattoria? Cosa ben diversa se lei avesse risposto: "Certo che sì!".

Ma la non validità del terzo escluso o della doppia negazione *non si può dimostrare in generale* perché non esiste un assoluto, nemmeno in logica, anzi, tanto meno in logica, soprattutto dopo la lezione di Brouwer.

La logica classica è quella che senz'altro ha avuto più successo in termini di storia: è stata, infatti, riconosciuta come l'unica logica possibile da Aristotele in poi, sino a Brouwer che rappresenta un momento cruciale nella storia della logica, un punto di riferimento a partire dal quale alcune cose hanno cominciato a cambiare. La logica classica rimane la più comune e la più diffusa sia storicamente sia come "consenso": se infatti chiedessimo a qualcuno di spiegare cos'è la logica, di certo il suo pensiero correrebbe immediatamente a quella classica.

[16] Naturalmente questo non vale "in generale" perché non abbiamo mai detto che "questa o quella sono la logica giusta".

Comunque sia, credo che non esista una logica più bella delle altre, perché non abbiamo alcun motivo, almeno scientifico, per preferire una logica ad un'altra. Scegliere una logica invece che un'altra, vuol dire, infatti, mettersi all'interno di un certo, particolarissimo modo di vedere le cose, e cioè significa collocarsi, di volta in volta, all'interno di una diversa ma ben precisa concezione della verità. Una logica segue, dunque, sempre dal concetto di verità che facciamo nostro.

Questo, essenzialmente, il motivo per cui il principio del terzo escluso vale in logica classica e non in logica intuizionistica. D'altra parte, pur non essendo dimostrabile il terzo escluso, in **LJ** è invece dimostrabile ciò da cui "classicamente" quel principio deriva: ossia il principio di non contraddizione. È il principio che dice che $A\&\neg A$ *dà luogo a qualunque cosa*, ovvero

$$A\&\neg A \vdash B$$

che è un modo per dire che non è possibile dimostrare sia A sia $\neg A$. Ecco la derivazione in **LJ**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad \perp \vdash \perp}{A, \neg A \vdash \perp}}{A, \neg A \vdash B}\ \perp\text{-regola}}{A\&\neg A \vdash B}$$

Abbiamo usato la regola sul falso con $\Delta = B$.

9. Indimostrabilità del terzo escluso e teorema di eliminazione dei tagli.

Come è possibile dimostrare che $A\vee\neg A$ non è dimostrabile in **LJ**? Come possiamo aver escluso che ci sia una dimostrazione di $A \vee \neg A$? Siamo sicuri di aver considerato tutte le possibili dimostrazioni?

La risposta è: certo, siamo sicuri! Questa questione è della forma: "è impossibile dimostrare questa tal cosa", ed è pertanto analoga ai seguenti teoremi che dicono:

$\sqrt{2}$ non è razionale
π non è costruibile con riga e compasso e radici
le equazioni di 5^o grado non sono risolubili
il V postulato delle parallele non è dimostrabile

ecc. . . Come vedremo più avanti, la consistenza di una teoria non è dimostrabile dentro la teoria.

Per ottenere la dimostrazione, è fondamentale trattare la logica come un oggetto di studio e quindi capire bene la distinzione fra linguaggio e metalinguaggio, cioè capire che possiamo parlare di **LJ** trattandolo come se fosse una macchinetta. Proprio per questo diciamo **LJ** e non "logica intuizionistica", perché **LJ** è il sistema formale che la descrive, quindi il teorema sarà *su* **LJ**, cioè su uno specifico sistema formale. Una volta dimostrato questo, naturalmente, diremo che se non è dimostrabile in quel sistema formale, non sarà dimostrabile in alcun sistema formale a lui equivalente (nel senso che dimostra le stesse proposizioni). Ma la nostra analisi sarà su quel sistema formale, trattato come linguaggio oggetto.

Possiamo essere sicuri che non ci sia in **LJ** una dimostrazione di $\vdash A\vee\neg A$ semplicemente per il teorema di eliminazione dei tagli. Da questo infatti, segue che se $\vdash A \vee \neg A$ fosse dimostrabile in **LJ**, lo sarebbe con l'uso delle sole regole di **LJ** esclusa la composizione.

Quindi le uniche regole che possano avere come conclusione $\vdash A \vee \neg A$ sono $\vee$-riflessione, contrazione e indebolimento.

Nel primo caso dovremmo avere

$$\frac{\vdash A}{\vdash A \vee \neg A} \quad \text{oppure} \quad \frac{\vdash \neg A}{\vdash A \vee \neg A}$$

Quindi, ottenere $\vdash A \vee \neg A$ per $\vee$-riflessione significa avere $\vdash A$ oppure $\vdash \neg A$ come dimostrabile. Ma né $\vdash A$ né $\vdash \neg A$ sono dimostrabili, perché A è una proposizione arbitraria. Infatti, se fosse $\vdash A$ dimostrabile con A arbitraria, scelta una proposizione B qualunque avremmo come casi particolari che $\vdash B$ e $\vdash \neg B$ sono dimostrabili, e questo, per la regola *modus ponens*, darebbe che $\vdash \perp$ è dimostrabile; questo non può accadere perché nessuna regola ha tale conclusione (dato che la regola di taglio è esclusa). Similmente, se fosse $\vdash \neg A$ dimostrabile, otterremmo che $\vdash \neg B$ e $\vdash \neg\neg B$ dimostrabili, da cui pure $\vdash \perp$.

Anche se si prova ad ottenere $\vdash A \vee \neg A$ per contrazione

$$\frac{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}{\vdash A \vee \neg A}$$

da $\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A$, come nella dimostrazione in logica classica, si è bloccati. Infatti, $\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A$ non è derivabile per $\vee$-riflessione da $\vdash A, A \vee \neg A$ perché questo richiederebbe la presenza del contesto, che qui è $A \vee \neg A$, e le regole di **LJ** non ammettono contesto. E lo stesso se si vuole ottenere $\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A$ da $\vdash \neg A, A \vee \neg A$. E se si prova ad ottenere $\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A$ per indebolimento, si torna al punto di partenza.

Così l'unica possibilità rimasta è ottenere $\vdash A \vee \neg A$ direttamente per indebolimento. Ma anche questo non porta da nessuna parte. Infatti, ottenere $\vdash A \vee \neg A$ per indebolimento significherebbe poi dimostrare il sequente $\vdash$, senza nulla né a destra né a sinistra, e questo chiaramente non è possibile, dato che nessuna regola toglie proposizioni (salvo il taglio, che però non c'è).

In conclusione, non è possibile una prova di $\vdash A \vee \neg A$ in **LJ**.

Fondamentale qui è il fatto di aver usato il teorema di eliminazione dei tagli, secondo cui: *se c'è una prova* Π *che usi la regola del taglio per dimostrare* $\Gamma \vdash \Delta$*, allora c'è anche un'altra prova* Π' *senza taglio che porta alla stessa conclusione.*

Osserviamo che anche questo è un bell'esempio di distinzione fra linguaggio e metalinguaggio, ed è per questo che stiamo ripetendo quanto già detto in precedenza.

Teorema di cut elimination o eliminazione dei tagli *Ogni dimostrazione* Π *con conclusione* $\Gamma \vdash \Delta$ *si trasforma in modo effettivo in una* Π' *senza tagli (cut-free) con conclusione, la stessa,* $\Gamma \vdash \Delta$.

Qui la metafora del robot è molto utile per capire più precisamente questo enunciato. Ma attenzione: il robot non conosce questo teorema e non ha alcun mezzo per derivare la regola del taglio. C'è un modo molto semplice per dimostrare che *il robot non può derivare il cut usando solo le altre regole.*

Infatti, dire che la regola del cut

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$$

è derivabile in **LJ**, significa dire che esiste una derivazione Π che a partire dalle premesse $\Gamma \vdash A$ e $A, \Gamma' \vdash \Delta$ porta alla conclusione $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta$, usando *solo* regole di **LJ** (escluso il cut stesso, ovviamente).

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \vdash A & & A, \Gamma' \vdash \Delta \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta & \end{array}$$

Questo non è possibile. Tale Π non può esistere, perché tutte le regole di **LJ** soddisfano la seguente **proprietà della sottoformula**: ogni regola di deduzione (diversa dal cut) introduce una costante logica o a destra o a sinistra di $\vdash$, ma in ogni caso nella conclusione. In termini negativi, nessuna regola toglie mai alcuna costante logica (salvo il cut). Formalmente, ogni formula (come vedremo in seguito nel capitolo 4, formula è il corrispondente per il robot del nostro concetto di proposizione) che compare nella premessa (o nelle premesse) compare anche nella conclusione, o direttamente o come sottoformula di una formula. Per convincersi di questo, basta "guardare" una qualunque regola, ad esempio la regola di $\to$-riflessione:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta}$$

è evidente che ogni formula che compaia in una delle due premesse, compare anche nella conclusione, o direttamente in Γ, Γ', Δ o come sottoformula di $A \to B$.

Questa proprietà si estende subito alle dimostrazioni: ogni dimostrazione di un certo sequente $\Gamma \vdash \Delta$ può contenere solo sequenti in cui compaiono solo sottoformule di formule in Γ o in Δ.

Quindi la A tagliata dovrebbe comunque comparire nella conclusione $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta$, e questo non è affatto garantito. Quindi il taglio non sarà mai derivabile dentro **LJ**.

Tuttavia *noi*, a livello metalinguistico, dal di fuori, sappiamo che possiamo toglierlo. Usare o non usare il taglio genera gli stessi sequenti dimostrabili: cioè se abbiamo una Π con taglio [17] con una certa conclusione, allora la possiamo trasformare in una Π' senza taglio con la stessa conclusione:

$$\begin{array}{c} \boxed{\Pi} \\ \Gamma \vdash \Delta \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \boxed{\Pi'} \\ \Gamma \vdash \Delta \end{array}$$

Cioè *se* $\Gamma \vdash \Delta$ *è dimostrabile, allora è dimostrabile anche senza taglio.* Pertanto è lecito limitarci alle prove senza taglio. Detto in altri termini, *possiamo limitarci a prove cut-free, senza restrizione di generalità* .

La eliminabilità dei tagli ha una dimostrazione che non è dentro il sistema formale, cioè è una dimostrazione che il robot non conosce e non potrà mai conoscere. Più avanti, non appena avremo i mezzi, questo lo potremo dimostrare, al contrario del robot che non sarà mai in grado di farlo.

[17] Se non si specifica nulla, si intende che può avere qualche applicazione della regola del taglio.

Non esiste alcuna logica, sufficientemente interessante, a meno che non sia un caso confezionato ad hoc, che sia in grado di dimostrare la propria consistenza: questo è uno dei teoremi di limitazione di Gödel. Il fatto interessante è che siano proprio le considerazioni su linguaggio e metalinguaggio a permettere di dire che il robot non sarà mai in grado di dimostrare la propria consistenza.

Questo risultato non è affatto banale. Infatti, ad esempio, un matematico non avvertito della distinzione fra linguaggio e metalinguaggio, farebbe molta fatica - lo dico per esperienza - a capire un simile enunciato, perché in genere non si pensa a cosa si possa esprimere dentro un sistema formale e cosa no.

Si noti che la logica, in quanto studio scientifico svolto da professionisti, è andata ben oltre a quello a cui si arriverebbe semplicemente con il buon senso o quello a cui è giunto Aristotele. Un risultato come il teorema di eliminazione dei tagli, e le sue conseguenze, non è qualcosa a cui si arriva semplicemente pensando a cosa sia ragionevole, ma richiede l'accumulo di competenze, cioè richiede l'uso di strumenti concettuali specifici.

Facciamo un'ulteriore considerazione sui contesti. Abbiamo detto che in **LK**, la logica classica, si hanno contesti arbitrari anche a destra. Questo vuol dire che se **LJ** ha una regola come

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}$$

che è &-formazione a destra, la corrispondente regola classica sarà

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}$$

E similmente per tutte le altre regole. Ad esempio

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta}$$

diventa

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta' \quad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

Qual è la differenza? Nella regola

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}$$

le proposizioni A e B su cui operiamo, come pure il risultato $A\&B$, costituiscono l'unico output del sequente in cui compaiono, cioè stanno sempre da sole. In

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}$$

invece sono accompagnate, a destra, da una lista Δ che si chiama contesto.

La differenza quindi è che nella logica classica possiamo operare su A e B anche quando compaiono con un contesto. In termini di linea di produzione, assumiamo di poter staccare un output dall'altro e di continuare a operare solo su uno di essi. I prodotti sono, infatti, tutti separabili l'uno dall'altro. Questo non è banale: se, ad esempio, mescoliamo olio ed aceto, non è affatto detto che, in secondo momento, riusciremo a separare l'olio dall'aceto. La stessa considerazione si può fare con gli input. Infatti, se si hanno dei minerali di ferro, riuscire ad estrarre da essi il ferro, risulta abbastanza difficoltoso. Quindi, assumere che input e output siano separabili l'uno dall'altro (non solo gli input dagli output, ma all'interno degli input e all'interno degli output) è qualcosa in piú Êe questo risulta dal fatto che, come abbiamo già visto, accettando i contesti a destra, cioè in **LK**, si dimostra il terzo escluso.

10. Due concezioni di verità: intuizionistica e classica.

Adesso cominciamo a vedere come la differenza tra logica intuizionistica e logica classica, che per ora é puramente formale, sia la manifestazione esteriore di una differenza concettuale enorme. Per rendere l' idea di tale differenza, si puó considerare ad esempio la differenza tra fisica relativistica e fisica classica; infatti anche qui una piccola differenza formale (il fattore con la velocità della luce nelle equazioni del moto) corrisponde ad una visione del mondo radicalmente diversa.

Perché si vuole distinguere tra **LK** e **LJ**? E qual è la distinzione? Da Aristotele fino alla fine del secolo XIX, non c'è stato nessun dubbio sistematico sulla logica classica, era considerata l'unica possibile. L.E.J. Brower (1881-1966) nel 1907-1908 (nel 1907 scrisse la tesi di dottorato, nel 1908 un articolo) considera l'esistenza di un'altra logica: dunque, non ce n'è una sola. Egli propone un nuovo modo di fare matemtica usando questa nuova logica (che è quella intuizionistica) ed in tal modo si scontra con Hilbert. Alla fine prevale il punto di vista di Hilbert.[18] La differenza tra **LK** e **LJ** tecnicamente è minima: in **LK** ci sono i contesti a destra per tutti i connettivi, in **LJ** no. Ciò ha conseguenze tutt'altro che trascurabili. In logica classica si dimostra il principio della doppia negazione e quello del terzo escluso.

Abbiamo detto varie volte che un sequente si legge come la trasformazione degli ingredienti Γ nei prodotti Δ ($\Gamma \vdash \Delta$). Nel caso della logica inuizionistica si può vedere che in pratica Δ è sempre una sola proposizione.[19] Questa idea del trasformare ingredienti in un prodotto vale per tutte le logiche; sono le regole strutturali che ci dicono le proprietà di questo processo (per esempio indebolimento vuol dire: posso trascurare qualche ingrediente; contrazione vuol dire: posso copiare, riprodurre i miei ingredienti a piacimento). Quindi è immediato che se valgono sia indebolimento sia contrazione il concetto di asserzione non potrà essere quello di disponibilità di una risorsa, perché non esistono risorse che io posso, da un lato, trascurare e, dall'altro, riprodurre a piacimento. Quindi se ho contrazione e indebolimento il concetto di asserzione che avrò sarà quello di conoscenza ("so che" invece di "ho a disposizione").

Inoltre, in **LJ** ci sono i contesti a sinistra. In primo luogo, si ha così un concetto di implicazione ragionevole, che permette di spostare una proposizione da destra a sinistra (cioè l'equazione definitoria).

In secondo luogo, il robot sa dove deve operare, cioè può scegliere su quale proposizione operare a sinistra. L'interpretazione è sempre quella di

[18]Siamo ancora oggi sostanzialmente dentro un'unica visione.

[19]Non è rilevante, però pensate pure in questi termini, perché il caso in cui ce ne sono di più non è così importante.

trasformare l'avere Γ nell'avere Δ: avere, in questo caso, non vuol dire avere come risorsa, ma avere come conoscenza; quindi $\Gamma \vdash \Delta$ vuol dire che posso passare da un "so che Γ" a un "so che Δ". In particolare, ad esempio per l'implicazione con Γ vuoto, si ha che $A \to B$ è dimostrabile esattamente quando l'asserzione di A comporta l'asserzione di B, quindi esattamente quando da "so che A" deduco "so che B".

Questa idea diventa più precisa, formalizzando il seguente discorso, che adesso è solo a livello intuitivo: il passaggio da "so che Γ" a "so che Δ" è dato da un algoritmo che permette di trasformare una qualunque prova di Γ in una prova di Δ, o meglio sapere $A \to B$ vuol dire avere un algoritmo che trasforma una qualunque prova di A in una prova di B.[20] E lo stesso si può fare per tutti gli altri connettivi. Se prendete & avete: $\vdash A\&B$ sse $\vdash A$ $\underline{e}$ $\vdash B$ quindi una prova di $A\&B$ sarà una prova di A insieme ad una prova di B. Per $\vee$ è più difficile, perché devo averla a sinistra, quindi devo dire $A \vee B \vdash \Delta$ sse $A \vdash \Delta$ $\underline{e}$ $B \vdash \Delta$.

"Non" è un caso particolare di $\to$. Sapere $\neg A$ vuol dire avere un metodo che fa vedere che A è impossibile, cioè che da A segue il falso, perché per definizione $\neg A$ è $A \vdash \bot$.

Quando alle regole della logica di base aggiungiamo regole strutturali come indebolimento e contrazione, ed otteniamo **LJ** e **LK**, logica intuizionistica e logica classica, l'asserzione la possiamo leggere come *una asserzione di verità*. Naturalmente questa finora è solo una parola, che, fino a quando non spiegheremo cosa intendiamo con *A vera*, questa resterà per noi solo una parola. La parola "vero" o "verità" ha un suo significato nella lingua, quindi dobbiamo rispettarlo, come abbiamo fatto finora con tutte le parole: resta però da chiarire cosa intendiamo qui.

La verità di cui vogliamo parlare non è quella rivelata, quella religiosa Êe nemmeno quella assoluta, ma è quella che accompagna il nostro fare scienza e con cui quotidianamente facciamo i conti.

Le cose che possono essere accompagnate dal predicato "vero" sono soltanto le proposizioni; quindi, contemporaneamente, dobbiamo anche spiegare cosa intendiamo con la parola proposizione. Una definizione classica di verità dice: *veritas est adaequatio rei et intellectus* "La verità è un adeguamento fra realtà e intelletto". La verità come *ad-aequatio* vuol dire la verità come adeguamento, sovrapposizione, corrispondenza fra la cosa (*rei*) e l'intelletto, fra lo stato delle cose, e dunque la realtà, e il modo in cui noi le conosciamo e le capiamo, in cui noi le descriviamo. Detto con altre parole, *una proposizione è vera se dice come stanno le cose.*

L'esempio tipico che si da è:

la proposizione 'La neve è bianca' è vera se e solo se la neve è bianca

Si deve fare attenzione, però: la proposizione "la neve è bianca" non è identica a *la neve è bianca* e cioè all'essere effettivamente bianco da parte della neve. Se fosse identica avremmo un circolo vizioso. Ma identica non è. A sinistra ho la verità della proposizione "la neve è bianca" (cioè, la verità della proposizione nel linguaggio oggetto, ovvero ciò che vedo *dal* metalinguaggio), a destra il fatto che la neve è bianca (il metalinguaggio).

[20] Avere un metodo, un algoritmo, una procedura, una qualunque cosa che possiamo raccontare, spiegare.

Questa è la risposta che si dà di solito al significato di "esser vero", di "verità". Questa è la cosiddetta definizione di verità di Tarski (non la mia!).

Poniamo, ad esempio, - e qui cominciamo ad introdurre il mio punto di vista - di essere eschimesi, e in quanto tali sappiamo di avere a disposizione ben diciotto parole corrispondenti a ciò che in italiano si intende con "bianco". Nella frase "la neve è bianca" uno di noi eschimesi ad un certo punto usa una delle diciotto parole con cui si traduce "bianco", che però in questo contesto è sbagliata. A questo punto la neve non sarà "bianca" nel senso descritto nella proposizione

"La neve è bianca" è vera se e solo se la neve è bianca,

ma in quell'altro, e precisamente in quello espresso dalla parola che era stata scelta fra i diciotto vocaboli possibili per indicare quello che un italiano molto grossolanamente chiama "bianco".

Cerchiamo ora di capire se "la neve è bianca" è vera oppure no: questo ci aiuterà pian piano a capire cosa voglia dire, in generale, che una proposizione sia vera.

Da una comprensione migliore della definizione di Tarski, si vedranno meglio le due diverse concezioni di verità. Secondo una di queste concezioni, l'adeguamento fra le cose e l'intelletto *o c'è o non c'è*, e non dipende da noi. Ad esempio, se io dico "la neve è bianca", può essere vera o può essere falsa, a seconda che la neve sia bianca o no, e questo non dipende da me, ma solo dalla neve e dal concetto "assoluto" di bianco. Come chiaramente si sarà notato, in questa concezione non c'è spazio per un soggetto che controlli se le cose si adeguano all'intelletto, perché le cose (incluse quelle che sono nell'intelletto, come le proposizioni e i predicati che usiamo) sono quello che sono e il soggetto non può far altro che cogliere o meno la verità. Questa è la concezione classica: la verità è quella che è, indipendentemente dalla nostra capacità di coglierla. In un certo senso si potrebbe dire che questo è il concetto di verità legato a un essere superiore, sovrumano, onnisciente, per il quale, se le cose stanno in un certo modo, non c'è alcuna difficoltà a coglierle.

L'altra concezione, invece, è quella in cui è essenziale che ci sia un soggetto, che controlli se c'è la verità. Cioè in modo che il soggetto, *veda se quello che dice si adegua alla realtà.* Così, se affermo "'la neve è bianca' sse la neve è bianca", so che la proposizione è vera perché io so che cosa vuol dire "neve" e so che cosa vuol dire "bianca" e le uso in un certo modo, non perché la proposizione "la neve è bianca" è vera in assoluto, ma per il significato che io do alla parola "neve", "bianca" e perché colgo che "bianco" è un predicato che vale per "neve". Questa è la concezione intuizionistica di verità, che tuttavia presenta delle difficoltà. Infatti, se noi leghiamo troppo la verità ad un soggetto, come facciamo a comunicare? Che cosa succede? E se ognuno di noi ha la sua verità, che razza di verità sarebbe? In questo caso, se la verità serve come principio da seguire, si avrebbe il caos. Quindi, dobbiamo aggiungere qualcos'altro.

Consideriamo alcuni esempi:

Mao è (o era) il mandante dell'assassinio di Lin Piao

Lin Piao era il comandante delle forze armate cinesi. Ad un certo punto è entrato in conflitto con Mao ed è morto precipitando con l'aereo. Sappiamo se il mandante fu Mao? Molti hanno detto che l'aereo non precipitò per un incidente,. . . ma che si trattò di una bomba. Possiamo sapere se il mandante fu Mao oppure no?

Non lo sappiamo, è indecidibile, cioè non sappiamo se Mao Mandante (MM) oppure non Mao Mandante ($\neg MM$). MM è comunque una proposizione. Noi tutti comprendiamo il significato di quella proposizione, sebbene non sappiamo se sia vera o no. Forse ci sarà chi non sappia nè chi fosse Lin Piao nè chi fosse Mao; in ogni caso, Êperò, capirebbe ugualmente cosa voglia dire quella proposizione, cioè sappiamo cosa vuol dire verificarla, e cioè venire a sapere che c'era una persona mandata da Mao che ha fatto in modo che Lin Piao morisse. . . o che c'è stato un individuo che era presente e ha visto o sentito Mao. Si può in ogni caso avere una prova diretta o indiretta del fatto che Mao abbia chiesto a qualcuno di mettere una bomba nell'aereo preso da Lin Piao.

Ma dal sapere cosa voglia dire questa proposizione, non segue che sappiamo anche se essa è vera o no. Inoltre, dal fatto che una verifica consista in "una persona che ha sentito Mao dire 'mettete una bomba' nell'aereo di Lin Piao", non segue che questa persona esista. Una possibile prova sarebbe *la tale persona.* Ma questa persona a quanto ne sappiamo non c'è (si potrebbe in futuro venire a sapere che tale persona esiste, ma che è stata ammazzata da Mao, e questo complica ulteriormente le possibilità).

Qui si vedono le due differenti concezioni:

- da un lato c'è una concezione assoluta, che dice: la verità è quello che è indipendentemente - in questo caso - dalla politica e allora o è "Mao ha fatto mettere la bomba" o non lo è, e quindi

$$MM \vee \neg MM$$

risulta vera in ogni caso;

- dall'altro potrebbe esserci qualcuno che afferma che questo non ha senso, per esempio per una considerazione di carattere storico-politico. In questo caso specifico, la verità probabilmente, è irrecuperabile e quindi non ha senso né arrivare a dire che si conosce MM Ênè che si conosce $\neg MM$: questa è una questione indecidibile. In modo più raffinato si potrebbe anche dire di trovarsi nella situazione in cui non si possa verificare né MM Ênè $\neg MM$, perché potrebbe trattarsi di una situazione molto ambigua, già nei fatti.[21] Ad esempio, è possibile che Mao avesse fatto qualche discorso che è stato interpretato in un altro modo da qualcuno che ha creduto di obbedire mettendo la bomba. Pertanto, Mao era responsabile Ê sì o no? Questo sarebbe molto discutibile. Certo potrebbe darsi che, andando a vedere il contorno, ci possa essere una continuità nel passaggio tra MM e $\neg MM$ e non un salto netto (come si potrebbe immaginare), cioè che ci sia *un terzo non escluso*

MM	terzo non escluso	$\neg MM$

[21]Anche se si potesse avere informazione totale sugli eventi della storia, potrebbe darsi che fosse talmente ambigua da rendere comunque difficile decidere cosa realmente sia accaduto.

Consideriamo un altro esempio: "*Sergej Bubka ha saltato 6.50 m*" Quasi tutti sanno chi sia Sergej Bubka. Tuttavia dubito che sia arrivato a 6.50 m, perché 6.50 m è un'altezza fuori dalla norma. Nonostante ciò

Sergej Bubka ha saltato con l'asta 6.50 m

è una proposizione dal significato perfettamente chiaro perché sappiamo perfettamente che cosa significhi verificarla. Infatti, verificare questa proposizione, significa sapere che Bubka usando un'asta regolamentare, ha saltato l'asticella posta ad un'altezza di sei metri e cinquanta centimetri. Come potremmo sapere una cosa simile? Nei modi più impensati, ma tutti abbastanza chiari:

- o perché eravate lì, e allora dovete essere sicuri che quello era Sergej Bubka, che l'asta era regolamentare, che quelli erano 6.50 m, ecc., e che vi dovete fidare dei vostri occhi, dell'esperienza che vi dice che eravate lì al meeting, ecc.
- oppure perché eravate davanti alla televisione finché stavano mostrando il meeting
- oppure perché avete letto il giornale il giorno dopo
- oppure - sempre più debole - perché avete letto un resoconto dei record dell'anno, o cose simili.

Sebbene queste siano tutte verifiche plausibili di quella proposizione, non si può affermare che essa sia vera. Pertanto, c'è molta differenza tra il dire che B è una proposizione e il dire che B è vera:

B *prop* è diverso da B *vera*

Di solito, non si fa questa differenza, perché usualmente se si pronunciano proposizioni, è per affermarle o per negarle Êe non solo per dire "consideriamo la tale proposizione". In logica, però dobbiamo fare anche questo: considerare proposizioni senza necessariamente impegnarci sulla loro verità o falsità.

Possiamo ora vedere, nell'esempio di Bubka, come le due concezioni di verità potrebbero interpretare quella proposizione:

- uno potrebbe dire: "Io so che Bubka ha saltato i 6.50 m perché l'ho visto Êe questa è la prova". Questa interpretazione è quella in cui il soggetto è protagonista, cioè è quella costruttivistica, costruttiva o intuizionistica.
- Un altro potrebbe dire: "Non importa che ci fosse qualcuno presente o meno a poterlo confermare, ma *o Bubka ha saltato o Bubka non ha saltato 6.50 m*". Potrebbe averlo fatto nella tundra siberiana, senza nessun testimone come non averlo provato affatto, in nessun luogo. Eppure questa proposizione resta vera, indipendentemente dal nostro saperlo, indipendentemente perfino dal saperlo di Bubka: potrebbe essere accaduto che una volta egli abbia saltato con l'asticella messa a 5.70 metri, ma essendo particolarmente in forma grazie allo slancio abbia saltato i 6.50 m. Questa è la concezione classica.

Passiamo a considerare n altro esempio. Supponiamo che ci sia una ragazza di nome *Marianne Müller* e consideriamo la seguente proposizione:

Marianne ha un antenato mugnaio

Cosa vuol dire? Se diciamo: "io so che Marianne..." oppure semplicemente "Marianne ha un antenato mugnaio", cosa capiamo? E come facciamo a saperlo? Supponiamo di conoscere un'altra ragazza di nome Rosetta Noto e dire:

Rosetta Noto ha un parente del siracusano

Che vuol dire una cosa simile? Se io affermo: *Rosetta Noto ha un parente del siracusano*, allora con questo intendo naturalmente, che è una mia asserzione e per questo è vera.

Ancora, se ad esempio dico: io non mi chiamo *Sambin* ma "*Samben*" alla francese perché ho un antenato francese, cioè se dico

Sambin ha un antenato francese

Cosa voglio dire? Nel linguaggio italiano, di tutti i giorni, con questa frase intendo che sono a conoscenza del fatto che tra i miei antenati c'è un francese. Se invece dicessi: *non è escluso che io abbia un antenato francese* vorrei dire che da quel che ne so io, non risulta ma non è escluso (c'è anche una cittadina di nome Sambin in Francia).

E la stessa cosa vale per l'esempio del mugnaio; se Marianne, ad esempio, dice

io ho un antenato mugnaio (1)

allora, con questo vuol dire che è a conoscenza del fatto che nella sua discendenza, nel suo albero genealogico, c'era un antenato mugnaio.

Attenzione, però! Sarebbe diverso se lei invece avesse detto:

non è escluso che io abbia un antenato mugnaio (2)

e l'indizio noi l'abbiamo: è il cognome, si chiama Müller, che vuol dire esattamente "mugnaio".

E siamo esattamente nella situazione in cui (2) è vera e (1) no.

Il punto è che (1) è del tipo

ha un antenato mugnaio AM

e (2) è di tipo

non è escluso che abbia un antenato mugnaio $\neg\neg AM$

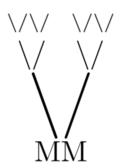
e le stiamo distinguendo in modo netto. Nella logica classica le due proposizioni, AM e $\neg\neg AM$, sarebbero identiche. Infatti, abbiamo già visto che in **LK**, A e $\neg\neg A$ sono identiche, poichè vale sia

$$\neg\neg A \vdash A$$

sia

$$A \vdash \neg\neg A$$

mentre in **LJ** vale soltanto $A \vdash \neg\neg A$. Da questo segue che **LK** non è in grado di distinguere fra queste due proposizioni.



MM è Marianne Müller, e tutto ciò che sta al di sopra di MM rappresenta il suo albero genealogico.

Supponiamo ora di arrivare a 30 generazioni indietro rispetto a Marianne, cioè circa 10 secoli fa, ovvero a ben 2^{30} antenati. Circa un miliardo di antenati fa! Ora non è certo agevole controllare tutti i documenti storici per verificare se i parenti di Marianne, i suoi antenati, fossero mugnai o no. Non solo non è agevole, ma è materialmente impossibile. Quindi si capisce che non c'è alcun modo di scandire questo insieme e, per ciascun parente, andar a vedere se era mugnaio oppure no. Quindi non ci resta che dire:

$$\neg\neg\exists x(x \text{ antenato } \& \text{ mugnaio}(x))$$

Che è ben diverso dal dire:

$$\exists x(x \text{ antenato } \& \text{ mugnaio}(x))$$

Per spiegare questo dal punto di vista intuitivo, immaginiamo un ramo dell'albero genealogico che proceda su fino a 30, e cioè per 30 volte. Tutti gli antenati di Marianne li coloriamo di verde, salvo i mugnai, che coloriamo di rosso. Ma noi non sappiamo se esiste un punto rosso. Ed allora dire:

esiste nell'albero un punto rosso

oppure dire:

non è vero che non esiste un punto rosso

son due cose completamente diverse.