Compito di logica 26 luglio 2007 – SOLUZIONI

Es. 1. Fornire una derivazione in LJ dei sequenti:

a. $(A \to B) \to C) \vdash \neg C \to \neg\neg A$

b. $\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash \neg\exists x(A(x) \ \& \ \neg B(x))$

c. $\vdash \neg\neg(\neg\neg B \to B)$

d. $\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A \ \& \ \neg B \quad$ e $\quad \neg\neg A \ \& \ \neg B \vdash \neg(A \to B)$

Soluzione. Questo esercizio è assolutamente standard. Vedi qui di seguito le derivazioni. Nonostante tutto, alcuni studenti riescono ancora a sbagliare; gli errori più comuni sono:
1. usare regole che non sono previste da LJ. Qui c'è da fare una distinzione: alcuni studenti usano regole non "ufficiali", ma tuttavia valide (nel senso che portano da premesse dimostrabili ad una conclusione dimostrabile). Ad esempio, la regola derivata per &, oppure le regole

$$\frac{A \vdash A}{\neg A \vdash \neg A}, \qquad \frac{B \vdash A}{\neg A \vdash \neg B}$$

che si son viste in qualche compito svolto. Tali regole sono accettabili solo se si *giustificano* in modo esplicito, cioè si deve dire perché sono derivabili in LJ (nel caso con conclusione $\neg A \vdash \neg A$ è già una identità, e la derivazione è inutile, fa solo perdere tempo).

Molto diverso è l'errore di chi applica delle regole totalmente "inventate", che non conservano la derivabilità in LJ. Ecco alcuni esempi di regole "folli", prese da compiti reali (sembra incredibile, vero?):

$$\frac{\neg(A \to B) \vdash \neg B}{\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A \ \& \ \neg B}\ 1. \qquad \frac{A \vdash \neg\neg A \qquad B \vdash B}{A \to B, B \vdash \neg\neg A}\ 2. \qquad \frac{\dfrac{B \vdash B}{\neg B \vdash B}}{\neg\neg B \vdash B}\ 3.$$

Questi errori sono molto più gravi, perché mostrano che non si è capito per nulla lo scopo delle derivazioni, e il loro legame con i ragionamenti corretti. Nel caso 1., è ovvio che non si può concludere che anche C & D segue da un certo Γ, se uno dei due ad es. C seguiva da Γ. Nel caso 2., è chiaro che lo studente non ricorda assolutamente la regola di $\to$ riflessione, ma chiaramente non ha capito che ogni regola ha un senso, non è puro gioco di formule; forse lui pensa che la regola di $\to$ riflessione sia:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Delta \vdash C}$$

Nel caso 3. è lampante che lo studente non ha capito nulla delle regole sulla negazione, e forse in generale sul perché delle regole. Per queste regole "folli", un buon esercizio è trovare una situazione in cui si vede bene che non sono valide, nemmeno classicamente.

Sinceramente non capisco cosa ci sia di difficile nel seguire l'istruzione ripetuta mille volte, fino alla nausea: si devono usare **solo** le regole "ufficiali" di LJ.
2. Dire che le proposizioni non sono dimostrabili, solo perché non si riesce a trovarne la derivazione (tra l'altro, anche contro l'esplicita avvertenza che *sono* dimostrabili in LJ). Vedi la derivazione c. qui sotto.
3. Dare delle supposte derivazioni che finiscono con foglie non dimostrabili, o comunque diverse da identità. Tipicamente, alcuni studenti partono (partendo dall"alto) da sequneeti della forma $B \vdash \perp$ senza ulteriori commenti, che significa che li assumono come validi. Il

passo successivo porta a $\vdash \neg B$, eppure non si rendono conto della “follia””: una derivazione di $\neg B$, *qualunque* sia la proposizione B! Cioè $\neg B$ derivabile, quindi sempre vero, anche se B è $2 + 2 = 4$.

Derivazioni:

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash B}}{\neg A \vdash A \to B} \qquad \dfrac{C \vdash C}{C, \neg C \vdash}}{(A \to B) \to C, \neg C \neg A \vdash}}{(A \to B) \to C, \neg C \vdash \neg\neg A}}{(A \to B) \to C \vdash \neg C \to \neg\neg A}$$

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Az \vdash Az \qquad \dfrac{Bz \vdash Bz}{Bz, \neg Bz \vdash}}{A \to Bz, Az, \neg Bz \vdash}\;\textit{\& derivata}}{Az \to Bz, Az \,\&\, \neg Bz \vdash}}{\forall x(Ax \to Bx), Az \,\&\, \neg Bz \vdash}\;\textit{z non libera nel contesto}}{\forall x(Ax \to Bx), \exists x(Ax \,\&\, \neg Bx) \vdash}}{\forall x(Ax \to Bx) \vdash \neg\exists x(Ax \,\&\, \neg Bx)}$$

c. Questa derivazione non è facile; ma è meglio non scrivere nulla piuttosto che scrivere errori, come usare regole non valide in LJ (è chiaro che in LK la derivazione è immediata) oppure dire che non è derivabile solo perché dopo 10 minuti non ci si riesce. Uno studente ad es. ha scritto:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \neg\neg B \to B}{\neg(\neg\neg B \to B) \vdash}}{\vdash \neg\neg\neg(\neg\neg B \to B)}$$

e poi ha concluso: non è dimostrabile in LJ, perché $\vdash \neg\neg B \to B$ non è dimostrabile. Ma come si vede in realtà una dimostrazione c'era, solo che seguiva un'altra strada. Eccola:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{B, \neg\neg B \vdash B}\;\textit{indebolimento}}{B \vdash \neg\neg B \to B}}{\neg(\neg\neg B \to B), B \vdash}\;\neg\text{Left}}{\neg(\neg\neg B \to B) \vdash \neg B}}{\neg(\neg\neg B \to B), \neg\neg B \vdash B}\;\neg\text{Left}}{\neg(\neg\neg B \to B) \vdash \neg\neg B \to B}}{\neg(\neg\neg B \to B), \neg(\neg\neg B \to B) \vdash}}{\neg(\neg\neg B \to B) \vdash}\;\textit{contrazione}}{\vdash \neg\neg(\neg\neg B \to B)}$$

d. Qui sono richieste due derivazioni, una per ogni direzione:

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash B}\,\neg\text{Left}}{\neg A \vdash A \to B}}{\neg(A \to B), \neg A \vdash}}{\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{B, A \vdash B}}{B \vdash A \to B}}{\neg(A \to B), B \vdash}}{\neg(A \to B) \vdash \neg B}
}{\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A \,\&\, \neg B}
\qquad\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad \dfrac{B \vdash B}{\neg B, B \vdash}}{A, \neg B, A \to B \vdash}}{\neg B, A \to B \vdash \neg A}}{\neg\neg A, \neg B, A \to B \vdash}}{\neg\neg A \,\&\, \neg B, A \to B \vdash}\;\&\ \textit{derivata}}{\neg\neg A \,\&\, \neg B \vdash \neg(A \to B)}
$$

Es. 2. La legge di Pierce dice che $(\neg A \to A) \to A$ vale per ogni A.

a. Fornire una derivazione della legge di Pierce in LK.

b. Dimostrare che invece non è derivabile in LJ (suggerimento: si passi per la derivazione in LJ di $(\neg A \to A) \to A \vdash \neg\neg A \to A$).

Soluzione. Anche questo esercizio è abbastanza standard: si tratta di una proprietà (una proposizione oppure una regola) che vale in LK ma non in LJ. Prima diamo una derivazione della legge di Pierce in LK. Eccola:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash \neg A, A} \qquad A \vdash A}{\neg A \to A \vdash A.A}}{\neg A \to A \vdash A}\,\textit{contrazione}}{\vdash (\neg A \to A) \to A}
$$

Chiaramente, la prova qui sopra è "buona" *solo* in LK, perché usa la regola di contrazione a destra e, ancora peggio, la regola di $\to$ riflessione con un contesto a destra. Ma attenzione: il fatto che la derivazione che abbiamo dato sia buona solo in LK non significa che non si possa trovare un'altra derivazione, che sia buona anche in LJ. Si deve far vedere che tale supposta derivazione in realtà *è impossibile*, cioè ogni possibile tentativo (e non solo uno o due) porta a fallimento.

Per vedere questo, il testo suggerisce di utilizzare una derivazione di $(\neg A \to A) \to A \vdash \neg\neg A \to A$. Come mai? Seguiamo il suggerimento, e poi vediamo. Quindi, prima otteniamo una derivazione di $(\neg A \to A) \to A \vdash \neg\neg A \to A$. Eccola:[1]

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \vdash \neg A}{\neg\neg A, \neg A \vdash A}\,\neg\ \text{Left}}{\neg\neg A \vdash \neg A \to A} \qquad A \vdash A}{(\neg A \to A) \to A, \neg\neg A \vdash A}}{(\neg A \to A) \to A \vdash \neg\neg A \to A}
$$

Ora se fosse che la legge di Pierce è derivabile in LJ, cioè se si avesse $\vdash (\neg A \to A) \to A$ in LJ, allora per composizione (o taglio, o *cut*) con il sequente derivabile appena visto avremmo anche $\vdash \neg\neg A \to A$, che sappiamo già non essere derivabile in LJ. Quindi nemmeno la legge di Pierce può essere derivabile in LJ.

Naturalmente, si può far vedere che $\vdash (\neg A \to A) \to A$ non è derivabile in LJ anche usando i modelli di Kripke, cioè trovando un modello in cui non vale. Quel che segue è preso tale e quale da un compito [con miei commenti].

[1]Attenzione: in tale derivazione si usa il fatto che l'identità $B \vdash B$ è un sequente che si assume in LJ qualunque sia la proposizione B, e quindi ad esempio anche quando è della forma $\neg A$.

Per dimostrare che il sequente non è derivabile in LJ posso cercare di trovare un contromodello di Kripke. Infatti, se è possibile trovare anche un solo modello di Kripke in cui quel sequente non vale, allor il sequente non è derivabile in LJ [per il teorema di validità: se fosse derivabile, sarebbe anche valido ovunque]. Il contromodello può essere per esempio:

$X = \{x_0, x_1, x_2\}$ con x_o radice, e due immediati successori x_1, x_2.

$V(A) = \{x_1, x_2\}$

$V(\neg A) = \emptyset$

$V(\neg A \to A) = \{x_0, x_1, x_2\}$

$V((\neg A \to A) \to A) = \{x_1, x_2\}$ [meglio sarebbe mostrare un po' dei "conti" che permettono di dire questo]

È un contromodello, perché la valutazione finale non contiene tutti i nodi. Quindi il sequente non è derivabile in LJ.

Es. 3. Fornire un argomento rapido per poter concludere che la proposizione

$$(A \to (B \vee C)) \to ((A \to C) \vee (A \to B))$$

è una tautologia classica.

Soluzione. Un metodo rapido è il seguente: basta far vedere che nessuna valutazione può rendere falsa la formula $(A \to (B \vee C)) \to ((A \to C) \vee (A \to B))$. Per rendere falsa una implicazione, si deve rendere vero l'antecedente $A \to (B \vee C)$ e falso il conseguente $(A \to C) \vee (A \to B)$. Per rendere falsa la disgiunzione $(A \to C) \vee (A \to B)$ devono essere falsi entrambi i disgiunti $A \to C$ e $A \to B$, e quindi deve essere $A = 1$ e $C = B = 0$. Ma con $A = 1$ e $C = B = 0$ si ha che anche $A \to (B \vee C)$ risulta falso, mentre si voleva che fosse vero. Quindi la valutazione che rende falsa la formula data è impossibile, e quindi la formula è sempre vera, cioè è una tautologia.

Ancora più veloce è la dimostrazione di una asserto più forte, cioè che $(A \to (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \to C) \vee (A \to B))$ è una tautologia. Infatti, per dimostrare che i due termini hanno lo stesso valore per ogni valutazione basta provare che uno è falso se e solo se l'altro è falso. Ma questo è immediato: (ripetendo in parte quanto abbiamo visto sopra) infatti $A \to (B \vee C)$ è falsa se e solo se $A = 1$ e $C = B = 0$, e pure $(A \to C) \vee (A \to B)$ è falsa se e solo se $A = 1$ e $C = B = 0$.

Per molti studenti, il metodo più rapido è quello di scrivere tutta la tavola di verità; nessuna obiezione, ma è un po noioso...

Riporto qui per intero lo svolgimento dello studente Alcuino Szparabahlewitz,[2] sia perché contiene un brutto errore (che per fortuna non si incontra spesso),[3] sia perché mi permette di chiarire alcune questioni su cui spesso gli studenti non hanno le idee chiare. Lo svolgimento di Alcuino è: *la proposizione* $(A \to (B \vee C)) \to ((A \to C) \vee (A \to B))$ *è una tautologia classica infatti con un esempio pratico è facilmente verificabile che: se ho fame mangio al bar oppure al ristorante, allora se ho fame mangio al bar oppure se ho fame mangio al ristorante.*

Una scrittura come $(A \to (B \vee C)) \to ((A \to C) \vee (A \to B))$ diventa una proposizione specifica quando si dice esplicitamente quali sono le proposizioni A, B e C. Se non si sa chi sono A, B e C, si ha solo uno schema per potenziali proposizioni, ovvero una formula.

Pur non sapendo quali sono A, B e C si riesce lo stesso a dire qualcosa di un dato schema. Ad esempio, potrebbe essere derivabile in LJ o in LK (perché si parte da assiomi

[2] Il compito è autentico, il nome naturalmente no.

[3] L'ho trovato però in almeno due casi, forse di studenti che hanno copiato tra loro, dimostrando che copiare vuol dire fidarsi di un altro e fare errori senza saperlo.

$A \vdash A$ o $B \vdash B$ che valgono anche senza sapere chi sono A e B). O potrebbe essere una tautologia classica; questo significa che lo schema assume valore vero qualunque siano le proposizioni A, B, C,... Alcuino assume (senza dirlo esplicitamente) che $A=$ ho fame, $B=$ mangio al bar, $C=$ mangio al ristorante. Cioè assegna una proposizione specifica alle lettere A, B e C. Cioè trova un *esempio* in cui (secondo lui) lo schema risulta vero. E quindi confonde il caso in cui ogni possibilie interpretazione è vera, col caso in cui ne esite almeno una in cui è vera. Il suo ragionamento è lo stesso che: $R \to M$, dove $R=$ è rosso, e $M=$ me lo mangio, è una tautologia, perché il radicchio è rosso, e io me lo mangio. Provi a considerare il caso di un fungo amannita muscaria, che è rosso ed è mortale: se lo mangia? No. Allora $R \to G$ non vale sempre, e non è una tautologia.

Dato che nella logica classica ogni proposizione assume solo due valori, vero e falso, per sapere che un certo schema è vero non importa sapere che proposizioni sono A, B, C, infatti basta sapere che valore di verità hanno. E dato che i valori sono solo due, 0 e 1, per sapere che un certo schema vale qualunque siano A, B, C,... , basta controllare che assume valore uno qualunque sia il valore assegnato ad A, B, C,... Questo è quello che si fa appunto con le tavole di verità, o altri metodi che sono conseguenza delle tavole di verità.

Per sapere che un certo schema è una tautologia, si deve sapere che dà luogo al valore uno *qualunque* sia l'assegnazione dei valori ad A, B, C,... Basta anche *una sola* valutazione in cui lo schema non dà valore uno, per dire che non è una tautologia. E anche per poter concludere che non sarà mai dimostrabile in LK: infatti, se fosse derivabile in LK, per il teorema di validità sarebbe anche vero per qualunque assegnazione dei valori di verità ad A, B, C,... , cioè sarebbe una tautologia.

L'errore di Alcuino è brutto perché confonde la verità in *ogni* valutazione (che per il teorma di validità e completezza alla fine coincide con la dimostrabilità; e questo vale in LK se i modelli sono le assegnazioni di tipo 0 e 1, in LJ se i modelli sono quelli di Kripke) con la verità in *una* valutazione. La verità di uno schema in una certa valutazione serve solo per dire che la sua negazione non può essere dimostrabile. O meglio: la falsità di uno schema in una certa interpretazione è quel che basta per dire che lo schema non è dimostrabile.

Ultima osservazione: a parte l'errore di confondere esiste con per ogni, Alcuino sceglie proprio male l'esempio stesso.

Infatti, a me sembra che sia falso, nella vita di tutti i giorni. Supponiamo che io non abbia una cucina in casa, e che in effetti devo sempre mangiar fuori, o al bar, o al ristorante, o in pizzeria ecc. Allora certamente quando ho fame mangio al bar, o al ristorante, o in pizzeria,ecc. Ma è falso che valga almeno una delle seguenti: quando ho fame mangio al bar, quando ho fame mangio al ristorante, quando ho fame mangio in pizzeria. Infatti, voglio rimanere libero di scegliere volta per volta cosa fare.[4] Questa situazione reale è ben espressa dalla logica intuizionistica, in cui infatti lo schema $(A \to (B \vee C)) \to ((A \to C) \vee (A \to B))$ non sempre vale (e quindi non è derivabile). Infatti, proprio con l'idea del mangiare fuori in vari luoghi, non è difficile costruire un modello di Kripke in cui è falso (suggerimento: sia T con una radice x e due successori y e z; A vale in y e z, mentre B vale solo in y e C solo in z, per cui si vede che $A \to (B \vee C)$ vale ovunque, mentre $(A \to C) \vee (A \to B)$ non vale in x, per cui tutta l'implicazione $(A \to (B \vee C)) \to ((A \to C) \vee (A \to B))$ non vale in x e perciò non è derivabile in LJ).

[4] L'altro studente sceglie A=mi piacciono le ragazze, $B=$ ragazza bionda, $C=$ ragazza mora, e presumo intenda: $Ax= x$ è una ragazza che mi piace, $Bx= x$ è bionda, $C= x$ è mora (che noia: almeno avesse trovato un esempio nuovo). Allora i suoi gusti sono tali che se una ragazza gli piace, deve essere bionda o mora, ma presumo che non necessariamente gli piacciano solo le bionde o solo le more.

Es. 4. Sia G una proposizione fissata. Sia data l'equazione definitoria:

$$\Gamma \vdash A \star B \quad \text{se e solo se} \quad \Gamma, G \vdash A \quad \text{e} \quad \Gamma \vdash B$$

a. Risolvere tale equazione (cioè trovare regole "buone" che equivalgono all'equazione).
b. Il nuovo connettivo $\star$ può essere definito in LJ a partire dai soliti connettivi?

Soluzione (presa tale e quale dal compito svolto da uno studente; i miei ulteriori commenti sono tra quadre [ ]).
a. Il nuovo connettivo $\star$ presenta una equazione definitoria molto simile all'equazione definitoria della &. Per ricavare le regole "buone", formali si può procedere allo stesso modo.

$$\Gamma \vdash A \star B \quad \text{se e solo se} \quad \Gamma, G \vdash A \quad \text{e} \quad \Gamma \vdash B$$

Prima $\Leftarrow$, poi $\Rightarrow$.

Per risolvere l'equazione definitoria si può partire ad analizzarla da destra a sinistra trovando così la regola di $\star$-formazione. Poi passando all'analisi da sinistra a destra si ottengono gli assiomi di $\star$ e la regola di $\star$-riflessione implicita. Infine, mediante appunto gli assiomi e la $\star$-riflessione implicita è possibile ricavare la regola di $\star$-riflessione esplicita.

Le regole formali, cioè "buone", che risolvono l'equazione definitoria in ambo i versi sono quelle di $\star$-formazione e di $\star$-riflessione esplicita. Quindi:
$\star$-formazione risulta:

$$\frac{\Gamma, G \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \star B}$$

$\star$-riflessione implicita risulta:

$$\frac{\Gamma \vdash A \star B}{\Gamma, G \vdash A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \star B}{\Gamma \vdash B}$$

Gli assiomi di $\star$ quindi sono:

$$G, A \star B \vdash A \qquad\qquad A \star B \vdash B$$

Infine, la $\star$-formazione esplicita risulta:

$$\frac{\Gamma \vdash G \qquad A \vdash \Delta}{\Gamma, A \star B \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{B \vdash \Delta}{\Gamma, A \star B \vdash \Delta}$$

[Si dovrebbe per completezza aggiungere: 1. gli assiomi si ottengono dalle regole di $\star$-riflessione implicita banalizzando la premessa, cioè ponendo $\Gamma = A \star B$. Dagli assiomi si ricava la $\star$-riflessione esplicita per composizione:

$$\frac{\Gamma \vdash G \qquad \dfrac{A \star B, G \vdash A \qquad A \vdash \Delta}{A \star B, G \vdash \Delta}}{\Gamma, A \star B \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{A \star B \vdash B \qquad B \vdash \Delta}{A \star B \vdash \Delta}$$

2. viceversa, dalla prima riflessione esplicita ponendo $\Delta = A$ e $\Gamma = G$ si ottiene l'assioma $G, A \star B \vdash A$ e dalla seconda riflessione esplicita ponendo $\Delta = B$ si ottiene il secondo assioma $A \star B \vdash B$. E dagli assiomi si ottengono subito le due riflessioni implicite, per composizione.

In questo modo le assunzioni: riflessione implicita, assiomi, riflessione esplicita sono tutte equivalenti. E quindi si assumono formazione e riflessione esplicita, ottenendo un

sistema con regole "buone" (cioè, in cui il connettivo da definire compare solo nella conclusione e mai nelle premesse) ma che equivale al sistema in cui si abbia la validità della equazione definitoria.]
b. Il nuovo connettivo $\star$ può essere definito in LJ dai soliti connettivi, in particolare può essere definito dai connettivi $\rightarrow$ e &. Infatti, la proposizione con connettivo $\star$, $A \star B$ può essere riscritta come $(G \rightarrow A)$ & B, con G una proposizione fissata.

[L'equivalenza tra $A \star B$ e $(G \rightarrow A)$ & B si ottiene come segue. Usando le due regole di $\star$-riflessione esplicita si ha:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{G \vdash G \qquad A \vdash A}{A \star B, G \vdash A}\ \star \text{ riflessione}}{A \star B \vdash G \rightarrow A} \qquad \dfrac{A \vdash A}{A \star B \vdash A}\ \star \text{ riflessione}}{A \star B \vdash (G \rightarrow A)\ \&\ B}$$

Viceversa, usando la regola di $\star$-formazione si ha:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{G \vdash G \qquad A \vdash A}{G \rightarrow A, G \vdash A}}{(G \rightarrow A)\ \&\ B, G \vdash A} \qquad \dfrac{B \vdash B}{(G \rightarrow A)\ \&\ B \vdash B}}{(G \rightarrow A)\ \&\ B \vdash A \star B}\ \star \text{ formazione}$$

Alla stessa conclusione si arriva anche "senza fare conti", cioè usando tutto quello che già si sa. Infatti, si sa che per l'equazione definitoria di $\rightarrow$ l'asserzione $\Gamma, G \vdash A$ equivale a $\Gamma \vdash G \rightarrow A$, e quindi l'equazione definitoria che l'esercizio chiede di risolvere equivale a

$$\Gamma \vdash A \star B \quad \text{se e solo se} \quad \Gamma \vdash G \rightarrow A \quad \text{e} \quad \Gamma \vdash B$$

Ma questa allora è diventato un caso particolare dell'equazione definitoria per &, e quindi si ha subito che $A \star B = (G \rightarrow A)$ & B.]

Es. 5. Sia T un albero così composto: nodo x_0 = radice; nodo x_1 = successore sinistro di x_0; nodo x_2 = successore destro di x_0; nodo x_3 = successore di x_2.

Siano A, B, C, D proposizioni atomiche, la cui valutazione V su T sia data come segue: $V(A) \equiv \{x_2, x_3\}$ $\quad V(B) \equiv \{x_1, x_3\}$ $\quad V(C) \equiv \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ $\quad V(D) \equiv \{x_2, x_3\}$

a. Con la valutazione V data, sono valide in T le proposizioni

$\neg(A\ \&\ \neg A), \quad A \vee \neg A, \quad (A \rightarrow B)\ \&\ A \rightarrow B$?

Per quali è necessario il modello per poter rispondere?

b. Con la valutazione V data sopra, trovare le valutazioni di: $A\ \&\ B$, $\quad A\ \&\ D$, $A \vee B$, $\quad A \rightarrow D$, $\quad C \rightarrow B$, $\quad \neg D$, $\quad \neg(A \rightarrow B)$. Quali fra le precedenti proposizioni sono valide nell'albero T con valutazione V?

c. Come si deve modificare la valutazione V in modo che l'albero T falsifichi $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$ in almeno un nodo?

Soluzione (presa tale e quale dal compito svolto da uno studente; i miei ulteriori commenti sono tra quadre [ ]).
a. $V(\neg A) = \{x_1\}$, $\qquad V(A\ \&\ \neg A) = \emptyset$
$V(\neg(A\ \&\ \neg A)) = \{x_1, x_2, x_3, x_0\}$

Il sequente è valido nel modello T, ma è anche derivabile in LJ, infatti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash}}{A \mathbin{\&} \neg A \vdash}}{\vdash \neg(A \mathbin{\&} \neg A)}$$

Non è necessario il modello T per questo sequente.

$V(\neg A) = \{x_1\}$
$V(A \vee \neg A) = \{x_1, x_2, x_3\}$
Il sequente non è valido in T. Era necessario il modello in questo caso, poiché il sequente è il principio del terzo escluso che non è derivabile in LJ e quindi non è valido in tutti i modelli di Kripke.

$V(A \to B) = \{x_1, x_3\}$
$V((A \to B) \mathbin{\&} A) = \{x_3\}$
$V(((A \to B) \mathbin{\&} A) \to B) = \{x_1, x_2, x_3, x_0\}$
Il sequente è valido in T. Non era necessario il modello per rispondere, poiché è possibile trovare una derivazione in LJ del sequente. Ed un sequente derivabile in LJ è valido in ogni modello di Kripke. Infatti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad B \Vdash B}{(A \to B), A \vdash B}}{(A \to B) \mathbin{\&} A \vdash B}}{\vdash ((A \to B) \mathbin{\&} A) \to B}$$

b.
$V(A \mathbin{\&} D) = \{x_2, x_3\}$ non è valida in T
$V(A \mathbin{\&} B) = \{x_3\}$ non è valida in T
$V(A \vee B) = \{x_1, x_2, x_3\}$ non è valida in T
$V(A \to D) = \{x_1, x_2, x_3, x_0\}$ valida in T
$V(C \to B) = \{x_1, x_3\}$ non è valida in T
$V(\neg D) = \{x_1\}$ non è valida in T
$V(\neg(A \to B)) = \emptyset$ non vale in T
$V(\neg(A \to B)) = \emptyset$ perché $V(A \to B) = \{x_1, x_3\}$, e quindi la sua negazione non può stare in x_2 perché non vale sopra di questo nodo, cioè in x_3, e non può stare in x_0 perché non vale in tutti gli altri nodi sopra di lui.

c.
Il sequente, con la valutazione iniziale, è valido in T. Ma se si prende come valutazione:

$$V(A) = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad V(B) = \emptyset, \quad V(C) = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}, \quad V(D) = \{x_2, x_3\}$$

allora risulta

$$V(A \to B) = \emptyset, \quad V(\neg(A \to B)) = \{x_1, x_2, x_3, x_0\}$$

Quindi
$V((\neg(A \to B) \to A) = \{x_1, x_2, x_3\}$ così il sequente non è valido nell'albero T con la nuova valutazione.

Es. 6. *Il capo dell'opposizione Oppo nella repubblica di Bana aveva rivelato di "corteggiare" alcuni senatori del governo in crisi. [...] Poi ha lanciato il messaggio che* *il governo potrebbe cadere per mano di quei senatori moderati stanchi dello "strapotere" del primo ministro Gove. Oppo non nega, anzi conferma, che sta cercando di attrarre nella sua orbita gli scontenti: "Strizzo l'occhiolino a tutti coloro che sono costernati da questo governo e dal suo malgoverno e posso assicurarvi che sono tanti. Ma non ho alluso a nessuno... e poi queste cose non si possono dire". Infatti, e' proprio la pubblicita' che Oppo sta dando a qualche eventuale defezione tra le file del governo al Senato che insospettisce: se, infatti, le manovre fossero in atto difficilmente sarebbero rese pubbliche mentre la "contrattazione" e' ancora in corso.* (liberamente tratto da un quotidiano)

1. Rappresentare formalmente il contenuto di tale brano.
2. Giustificare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

a. *L'articolista pensa che il governo cadrà.*

b. *Certamente alcuni senatori passeranno all'altro campo.*

c. *Oppo è contraddittorio*

d. *Il governo resisterà a lungo*

e. *Non è escluso che tutti i senatori della maggioranza restino fedeli al governo*

Soluzione. È in preparazione una discussione dettagliata. Per ora, basti osservare che l'unica affermazione corretta è c.

Questo tipo di esercizi hanno lo scopo di saggiare quanto lo studente abbia appreso il linguaggio della logica, tanto da poterlo applicare ad un caso della vita di tutti i giorni (qui era: dimostrare di saper capire il contenuto di un articolo di giornale). Quindi lasciano molto alla opinione e al ragionamento di ciascuno (un compito in cui tutti gli altri esercizi sono disastrosi e questo decente dimostra che lo studente non ha studiato per nulla, e usa solo il suo "buon senso")

Ma resta fondamentale che si deve usare correttamente il linguaggio della logica. Certi errori segnalano l'incomprensione dei concetti di base e del loro "tipo logico", come la sostituzione di una formula là dove puoò stare solo un termine.

In generale, deve rimanere vero che ogni idea deve essere espressa da una formula (ben formata, secondo le nostre regole). Uno studente ad es. scrive:

$$\exists x(\forall s St(s), At(x,s), All(x, St(s))$$

e fianco spiega: "esiste un x che per ogni senatore stanco del governo lo corteggia e diventa suo alleato". Qui gli errori sono addirittura tre: 1. l'uso della virgola dove si presumibilmente vorrebbe &; questo dimostra che non si è capita la distinzione tra proposizione o formula e asserzione (le virgole stanno per congiunzioni tra asserzioni, la & tra proposizioni) 2. le parentesi sembrano fra capire che il raggio d'azione di $\forall s$ si concluda alla prima virgola, mentre in seguito compare ancora s 3. nonstante tutto, l'errore più grave è il non aver capito la distinzione tra termini (espressioni per individui) e proposizioni, dato che lo studente scrive $St(s)$ *dentro* una proposizione, cioè mette una proposizione là dove l'argomento deve essere un individuo.