Compito di logica 28 giugno 2007 – SOLUZIONI

Es. 1. Fornire una derivazione in LJ dei sequenti:

a. $A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{B \vdash B \quad C \vdash C}{B \to C, B \vdash C}}{A \to (B \to C), (A \to B), A \vdash C}}{A \to (B \to C), (A \to B) \vdash (A \to C)}}{A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C)}$$

b. $(A \to B) \vee (A \to C) \vdash \neg B \,\&\, \neg C \to \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \to B, \neg B, A \vdash}}{A \to B, \neg B, A \vdash}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B, \neg B \,\&\, \neg C \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \,\&\, \neg C \to \neg A} \qquad \textit{analogo}}{(A \to B) \vee (A \to C) \vdash \neg B \,\&\, \neg C \to \neg A}$$

c. $\neg(\neg A \vee A) \vdash$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash \neg A \vee A}}{\neg(\neg A \vee A), A \vdash}}{\neg(\neg A \vee A) \vdash \neg A}}{\neg(\neg A \vee A) \vdash \neg A \vee A}}{\neg(\neg A \vee A), \neg(\neg A \vee A) \vdash}}{\neg(\neg A \vee A) \vdash}$$

d. $\exists x A(x) \,\&\, \forall x B(x) \vdash \exists x (A(x) \& B(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(z) \vdash A(z)}{A(z), B(z) \vdash A(z)} \qquad \dfrac{B(z) \vdash B(z)}{A(z), B(z) \vdash B(z)}}{A(z), B(z) \vdash A(z) \& B(z)}}{A(z), B(z) \vdash \exists x (A(x) \& B(x))}}{A(z), \forall x B(x) \vdash \exists x (A(x) \& B(x))}}{\exists x A(x), \forall x B(x) \vdash \exists x (A(x) \& B(x))}}{\exists x A(x) \,\&\, \forall x B(x) \vdash \exists x (A(x) \& B(x))} \ \textit{regola derivata}$$

Es. 2. Si considerino i sequenti:

a. $\neg A \to \neg B \vdash B \to A$

b. $\neg \forall x(A(x) \to B(x)) \vdash \exists x(A(x) \& \neg B(x))$

Darne una derivazione in LJ o in LK. Nel secondo caso, dare una argomentazione che mostri che non sono derivabili in LJ (suggerimento: si ricordi che $\neg\forall\neg C \vdash \exists C$ non è derivabile in LJ)

Sol. a. Se il sequente fosse derivabile in LJ, lo sarebbe per ogni A, B, e quindi anche scegliendo $B = \neg\neg A$. In tal caso particolare si otterrebbe $\neg A \to \neg\neg\neg A \vdash \neg\neg A \to A$ derivabile in LJ. Ma si vede facilmente che $\vdash \neg A \to \neg\neg\neg A$ è derivabile in LJ. Quindi avremmo anche, per composizione, che $\neg\neg A \to A$ sarebbe derivabile, cosa che sappiamo non essere. Il sequente quindi non è derivabile in LJ.

Una derivazione in LK è:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \qquad \dfrac{B \vdash B}{\neg B, B \vdash}}{\neg A \to \neg B, B \vdash A}}{\neg A \to \neg B \vdash B \to A}$$

b. Se il sequente valesse in LJ, scegliendo $B = \bot$ avremmo in particolare che $\neg\forall x(A(x) \to \bot) \vdash \exists x(A(x) \& \neg\bot)$ da cui per la def. di $\neg$ e l'equivalenza $A(x)\&\neg\bot = A(x)\&\top = A(x)$ (che vale in LJ) si avrebbe anche $\neg\forall x(\neg A(x)) \vdash \exists x(A(x)\&\neg\bot)$ che invece si sa non essere derivabile in LJ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash B, A} \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B}{A, B \vdash B}}{A \vdash B, \neg B}}{A(z) \vdash B(z)), A(z)\&\neg B(z))}}{\vdash A(z) \to B(z)), A(z)\&\neg B(z))}}{\vdash A(z) \to B(z)), \exists x(A(x)\&\neg B(x))}}{\vdash \forall x(A(x) \to B(x)), \exists x(A(x)\&\neg B(x))}\ \textit{z non libera nel contesto}}{\neg\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash \exists x(A(x)\&\neg B(x))}$$

Es. 3. Dimostrare che la proposizione $(A \to B \vee C) \to ((A \to C) \vee B)$ è una tautologia classica.

Sol. Basta usare le tavole di verità. Dare una derivazione in LK di $(A \to B \vee C) \to ((A \to C) \vee B)$ non è richiesto.

Es. 4. Dimostrare per induzione il seguente enunciato: per ogni Δ lista finita di proposizioni, se $\vdash \Delta$ è un sequente dimostrabile in LK, allora Δ contiene almeno una proposizione che contiene almeno una volta il connettivo $\to$.

Sol. Da un esame svolto da uno studente: "Intuitivamente si dimostra in quanto affinché un sequente sia dimostrabile si deve partire da assiomi di tipo $A \vdash A$. Dovendo ottenere un sequente di tipo $\vdash \Delta$ per forza o la parte "sinistra" sparisce o va spostata a destra lungo la derivazione.

Quindi si fa induzione sulla struttura della derivazione, cioè sulle regole di derivazione.

Per ipotesi induttiva posso considerare vera la proprietà fino ad un certo punto (l'ultimo passaggio) in modo da dover controllare le regole di derivazione singolarmente. Si nota quindi che nessuna regola di derivazione partendo da Γ non vuoto lo toglie, cioè il Γ rimane. Quindi rimane l'altra possibilità: una regola che porti da "sinistra" a "destra". Si nota che essa esiste ed è solo la regola di $\to$ formazione. Quindi perché un sequente del tipo $\vdash \Delta$ sia dimostrabile deve contenere almeno una volta il connettivo $\to$. L'unico dubbio potrebbe nascere con la negazione, ma si ricorda che essa è definita come l'implicazione del falso, quindi il connettivo $\to$ è presente. "

Le idee ci sono tutte, ma manca una prova rigorosa per induzione; questo non era banale, e ci vuole una seconda idea. Cioè di scegliere come proprietà su cui si fa induzione la seguente: *se* $\Gamma \vdash \Delta$ *è derivabile e* Γ *è vuoto, allora in* Δ *compare almeno una volta* $\to$.

Con l'idea intuitiva espressa prima, ora l'induzione sulle derivazioni ora è facilissima.

Caso base: le foglie di una derivazione sono della forma $A \vdash A$. Sono derivabili, ma il loro Γ non è vuoto, quindi il se... allora... della proprietà da dimostrare vale banalmente.

Passi induttivi. Si osserva che tutte le regole, salvo quelle per $\to$, nel passaggio da premesse alla conclusione non modificano la situazione: se le premesse soddisfano la propriet"a, anche la conclusione, semplicemente percé nessuna di tali regole modifica l'essere Γ vuoto o no e il contenere $\to$ di Δ. Quindi basta considerare $\to$ riflessione e $\to$ formazione. La prima ha sempre Γ non vuoto, la seconda ha sempre Δ con almeno un $\to$. Quindi la proprieta' vale per la conclusione senza nemmeno andare a vedere cosa succede nelle premesse.

Es. 5. Sia T un albero così composto: nodo x_0 = radice; nodo x_1 = successore sinistro di x_0; nodo x_2 = successore destro di x_0; nodo x_3 = successore di x_2.

Siano A, B, C, D proposizioni atomiche, definiamo una valutazione delle proposizioni atomiche su T come segue: $V(A) \equiv \{x_1\}$ $\quad V(B) \equiv \{x_2, x_3\}$ $V(C) \equiv \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ $\quad V(D) \equiv \emptyset$

Naturalmente, qui conviene farsi un disegnino.

a. Sono valide in T le proposizioni $A \to A, (A \to A) \vee B, A \to (B \to A)$? È necessario il modello per poter rispondere? *Le tre proposizioni sono valide semplicemente perché tutte e tre sono derivabili in LJ (la prima per $\to$ fomazione, la seconda per $\vee$ riflessione e $\to$ formazione, la terza per $\to$ formazione e indebolimento). Quindi per il teorema di validità si sa che valgono in ogni modello, senza nemmeno fare un conto. Lo specifico modello è irrilevante.*

b. Sulla base della definizione di V data sopra, trovare le valutazioni di :$A \,\&\, B$, $A \,\&\, C$, $A \vee B$, $A \vee C$, $A \to B$, $C \to B$, $B \to C$, $D \to D$, $\neg D$, $\neg A$, $\neg B$. *Le valutazioni sono:* $V(A \,\&\, B) = \emptyset$, $V(A \,\&\, C) = \{x_1\}$, $V(A \vee B) = \{x_2, x_3\}$, $V(A \vee C) = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, $V(A \to B) = \{x_2, x_3\}$, $V(C \to B) = \{x_2, x_3\}$, $V(B \to C) = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, $V(D \to D) = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, $V(\neg D) = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, $V(\neg A) = \{x_2, x_3\}$, $V(\neg B) = \{x_1\}$.

   Quali fra le precedenti proposizioni sono valide nell'albero T con valutazione V? *Quelle che sono valide in tutti i nodi, quindi solo* $A \vee C$, $B \to C$, $D \to D$ *e* $\neg D$.

c. Quali tra le proposizioni: $A \vee \neg A$, $\quad C \vee \neg C$, $\quad (A \to B) \vee (B \to A)$ sono valide in T ? *Si tratta ancora di vedere quali sono valide in tutti i nodi, e solo la sconda lo è.*

Es. 6. Discutere la validità di:

$$A \to B \vee C = (A \to B) \vee (A \to C)$$

eventualmente trovando un contromodello alle direzioni che non valgono in LJ.

Sol. Una direzione, e cioè $(A \to B) \vee (A \to C) \vdash A \to B \vee C$ è immediataa. Infatti si applica (all'in sù) prima $\vee$ formazione e poi $\to$ formazione per arrivare a $A \to B, A \vdash B \vee C$, che è immediato (per $\vee$ riflessione), e analogamente per $A \to C, A \vdash\to B \vee C$.

L'altra direzione vale solo in LK. Un modo intuitivo per vederlo è questo (esempio di uno studente): se A mi piace una ragazza, e B tale ragazza è bionda e C è mora, allora "se una piace, è bionda o mora" ma non posso dire “se una mi piace è bionda” né “se una mi piace è mora”. Questo porta a vedere unfacile modello di Kripke in cui $A \to B \vee C \vdash (A \to B) \vee (A \to C)$ è falsa. Sia x una radice, e y, z due nodi a partire da x. Sia A valida in y e z, B valida solo in y e C solo in z. Allora $A \to B \vee C$ vale in x (e quindi anche in y e z), mentre $A \to B$ non vale in x (perché $A \to B$ non vale nel suo successore z, in cui vale A ma non B. Analogamente, $A \to C$ non vale in x. Quindi nemmeno $(A \to B) \vee (A \to C)$ vale in x. Quindi abbiamo trovato un modello in cui c'è un nodo in cui l'antecedente vale ma non il conseguente. Quindi il sequente non può essere derivabile.

Es. 7. Ricordate che questo tipo di esercizio non ha una soluzione univoca. Giustificate brevemente ogni scelta e risposta.

“1. Aldo ama tutte le donne fascinose. 2. Tutte le donne intelligenti sono fascinose. 3. Solo le studentesse di logica sono intelligenti. 4. Aldo è felice solo se ha una donna che ama. 5. Le donne intelligenti non stanno con chi non le ama.”

Formalizzate ciascuna delle frasi qui sopra, specificando quali predicati e quali altri segni vengono usati.

Assumendo che 1.–5. siano tutte vere, per ciascuna delle seguenti affermazioni dite se è una conseguenza corretta, specificando in che logica. Fornite una derivazione per le conseguenze che ritenete corrette.

a. *“Aldo non può essere felice.” (specificare a che condizioni Aldo può essere felice)*
b. *“Una studentessa fascinosa sa la logica.”*
c. *“Per essere felice, Aldo deve conoscere una studentessa di logica.”*
d. *“Una donna che segua il corso di logica, è intelligente e fascinosa.”*
e. *“Se Aldo sta con una studentessa di logica, allora è felice.”*

Sol. Scegliamo come predicati: $I(x)$ per x è intelligente, $F(x)$ per x è fascinosa, $A(x, y$ per x ama y, $S(x, y)$ per x sta con y $L(x)$ per x è studentessa di logica $H(x)$ per x è felice (happy). E come termini: $a = Aldo$. Le frasi si rappresentano con:

1. se x è una donna fascinosa, Aldo la ama: $\forall x(F(x) \to A(a, X))$

2. per ogni x, se x è intelligente allora x è fascinosa: $\forall x(I(x) \to F(x))$

Fin qui, non ho tenuto conto del fatto che x si itnede una donna. Allora, o si assume che il dominio di x sia solo le donne, o si aggiunge un predicato $D9x)$ per x è una donna, o altro simile.

3. La frase è un po' ambigua. L'interpretazione più semplice è: se x è intelligente, allora deve essere studentessa di logica. Che si scrive: $\forall x(I(x) \rightarrow L(x))$. Il rovescio, cioè $\forall x(L(x) \rightarrow I(x))$, significa: le studentesse di logica sono intelligenti, che non è affatto detto. Da notare anche l'ambiguità: la frase sembra dire che le uniche persone intelligenti, tra maschi e femmine, sono le femmine che in più siano studentesse di logica.

4. Se Aldo è felice, allora vuol dire che ha una donna che ama: $H(a) \rightarrow \exists x(S(a,x) \wedge A(a,x)$. Anche qui una piccola ambiguità: chi ama chi? Aldo è felice se esiste una donna x che soddisfa: x ama Aldo, oppure Aldo ama x?

5. Se x è una donna intelligente, allora se y non la ama, x non sta con lui y. Cioè: $\forall x, y(I(x) \rightarrow \neg A(y,x) \rightarrow \neg S(x,y))$. Altre varianti sono possibili.

Le 5 frasi da a. a e. sono tutte false, nelle ipotesi 1.-5. Questo si vede molto bene rappresentando la situazione con dei disegni, in cui I, L, F sono gli insiemi delle donne intelligenti, che studiano (=sanno) logica, fascinose, ecc. Commento e consiglio generale: alcuni criteri sono da considerarsi

fondamentali, e ogni esercizio che dimostri che non li ha colti, viene valutato zero. Questi sono:

1. il robot sa usare *solo* le regole formali. Quindi ogni derivazione che usa altre regole, soprattutto se tali regole NON conservano la validità, non ha alcun senso e dimostra che uno non ha colto la differenza tra "buon senso" e sistema formale (o robot). Ogni errore simile è cosi' grave che significa che l'esercizio in cui compare viene valutato zero.

2. uno degli scopi del corso è illustrare l'uso appropriato di certe parole che riguardano la logica, come: espressione, proposizione, asserzione, formula, sequente, premesse-conclusione, antecedente-conseguente, derivazione, inferenza, connettivo, quantificatore, contrazione, formazione, rilfessione, regola, proprietà, individuo, termine, ecc. e certe altre che riguardano la matematica, come: insieme, sottoinsieme, relazione, funzione, ecc. Un esercizio in cui si confondano, viene valutato zero.

A livello formale, se si confonde l'uso di predicati con individui, ad esempio se si scrive un predicato come argomento di una relazione là dove è richiesto un individuo (o termine), l'esercizio sarà valutato zero.

3. uno degli scopi del corso è far vedere come il formalismo sia strettamente collegato al significato intuitivo, di tutti i giorni. A livello dei significati, se uno studente scrive simboli facendo vedere che non si rende conto del significato di quello che scrive (tipo: se x ama Aldo, allora $x = y$), l'esercizio sarà valutato zero.