Ingegneria Ambientale, Civile, Edile

Matematica I — 10 Luglio 2007 - Versione **A**

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri la funzione

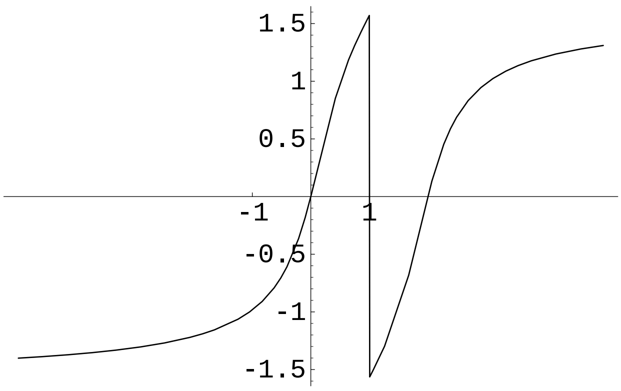
$$f(x) = \arctan \frac{x^2 - 2x}{x - 1}\,.$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.
b) Stabilire se esistono eventuali punti di non derivabilità.
c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x)$.
d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Sol. Dom$f$ $= \{x \in \mathbf{R},\, x \neq 1\}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to1^+} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to1^-} = \frac{\pi}{2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^2} \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}$$

e $f'(x) > 0$ per $x \neq 1$. Quindi la funzione è crescente per $x < 1$ e $x > 1$. Non ci sono max nè min, $\pi/2 = \sup f$, $-\pi/2 = \inf f$.



Esercizio 2.
Scrivere lo sviluppo di McLaurin di ordine otto della funzione

$$g(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}\,.$$

Determinare poi $f^{(7)}(0)$ e $f^{(8)}(0)$.

SOL. Si ha $e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{4}(-1)^k\ \frac{x^{2k}}{k!}$ quindi

$$g(x) = (1-2x^2)\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\ \frac{x^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{4}(-1)^k\ \frac{x^{2k}}{k!} - \sum_{k=0}^{4}(-1)^k\ 2\frac{x^{2k+2}}{k!}$$

Il coefficiente di x^7 è nullo quindi $f^{(7)}(0) = 0$ il ccoefficiente di x^8 è $\frac{1}{4!} + \frac{2}{3!}$ quindi

$$f^8(0) = 8!\left(\frac{1}{4!} + \frac{2}{3!}\right) = \frac{9}{4}\ \frac{8!}{3!} = 3 \cdot 7! = 15120.$$

Esercizio 3.
Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}\arctan(\frac{1}{x})dx\,.$$

SOL.

$\int \frac{1}{x^3}\arctan(\frac{1}{x})dx \underset{\frac{1}{x}=t}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} -\int t\arctan t = -\frac{t^2}{2}\arctan t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\arctan t =$

$-\frac{1}{2x^2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{x}$

e

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}\arctan(\frac{1}{x})dx\ = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{5}{8}\arctan\frac{1}{2}.$$

Esercizio 4. Data $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ funzione continua , dimostrare che

$$f[a,b] = [\min f, \max f].$$

Esercizio 5. Sia $a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim a_n = \dots .$$

Esercizio 6. Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Si dia la definizione di funzione integrale di f e si enunci il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Esercizio 1. Si consideri la funzione

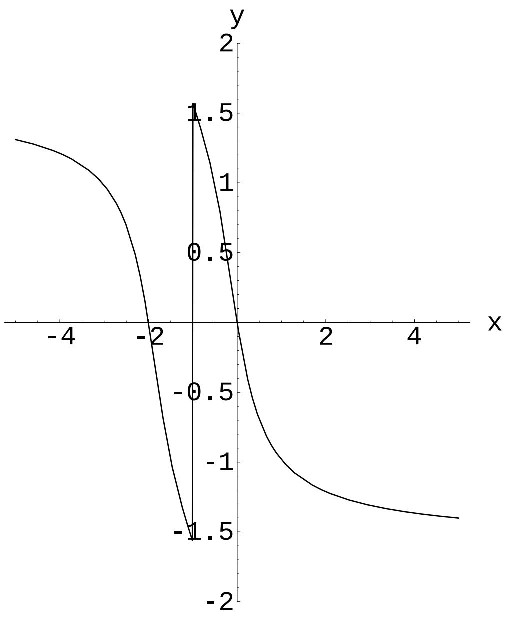
$$f(x) = \arctan - \frac{x^2+2x}{x+1}\,.$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.
b) Stabilire se esistono eventuali punti di non derivabilità.
c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x)$.
d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Sol. Dom$f = \{x \in \mathbf{R},\, x \neq -1\}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to-1^+} = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 1^-} = -\frac{\pi}{2}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x^2+2x}{x+1}\right)^2}\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$$

e $f'(x) < 0$ per $x \neq -1$. Quindi la funzione è decrescente per $x < -1$ e $x > -1$. Non ci sono max nè min, $\pi/2 = \sup f$, $-\pi/2 = \inf f$.



Esercizio 2.
Scrivere lo sviluppo di McLaurin di ordine otto della funzione

$$g(x) = (x^2-1)e^{-2x^2}\,.$$

Determinare poi $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

SOL. Si ha $e^{-2x^2} = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k \frac{(2x^2)^k}{k!} + o(x^6) = \sum_{k=0}^{3}(-2)^k \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^6)$ quindi

$$g(x) = (x^2-1)\left(\sum_{k=0}^{3}(-2)^k \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^6)\right) = \sum_{k=0}^{3}(-2)^k \frac{x^{2k+2}}{k!} - \sum_{k=0}^{3}(-2)^k \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^6)$$

Il coefficiente di x^5 è nullo quindi $f^{(5)}(0) = 0$, il coefficiente di x^6 è $\frac{4}{2!} + \frac{8}{3!} = \frac{10}{3}$ quindi

$$f^6(0) = 6!\frac{10}{3} = 2400.$$

Esercizio 3.
Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx\,.$$

SOL.

$\int \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \underset{\frac{1}{\sqrt{x}}=t}{\underset{\uparrow}{=}} -2\int t \arctan t = 2\left(-\frac{t^2}{2}\arctan t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\arctan t\right) =$
$-\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}$

e

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio 4. Data $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ funzione continua , dimostrare che

$$f[a,b] = [\min f, \max f].$$

Esercizio 5. Sia $a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim a_n = \ldots.$$

Esercizio 6. Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Si dia la definizione di funzione integrale di f e si enunci il teorema fondamentale del calcolo integrale.