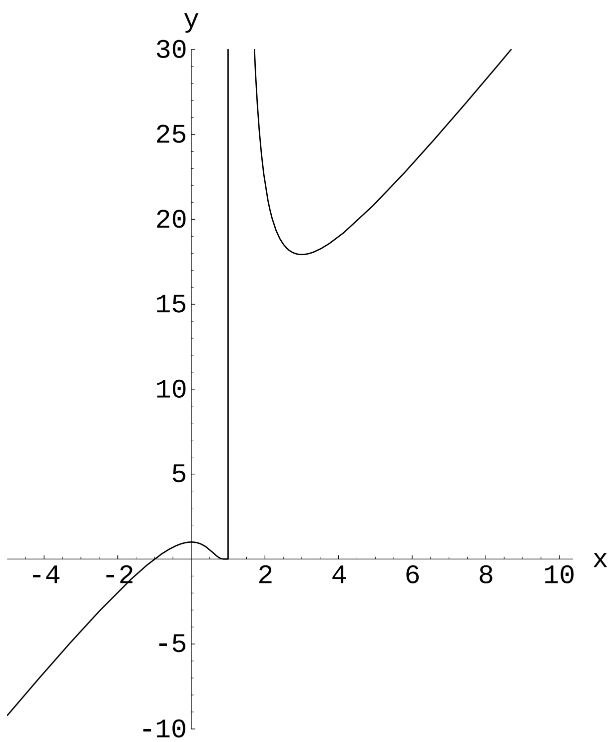
SOLUZIONI

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}.$$

Determinare il numero delle soluzioni reali, al variare di $k \in \mathbf{R}$, dell'equazione $f(x) = k$.

SOL. Dom$f = \{x \in \mathbf{R}\ x \neq 1\}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0$ $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$. $f'(x) = \frac{x^2-3x}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$. $x = 0$ pto di max, $x = 3$ pto di min. $f(0) = 1$, $f(3) = 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.



Quindi

$$\begin{cases} k \leq 0,\ k = 1\ k = 4\mathrm{e}^{3/2} & 1 \text{ sol.} \\ 0 < k < 1,\ k > 4\mathrm{e}^{3/2}, & 2 \text{ sol.} \\ 1 < k < 4\mathrm{e}^{3/2} & \text{no sol..} \end{cases}$$

Esercizio 2.
Calcolare, utilizzando gli sviluppi di McLaurin, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin 2x) + 1 - \sqrt{1+4x}}{x^3}$$

($\log$ indica $\log_e$).
SOL. Si ha

$$\begin{gathered}
\sin 2x = 2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3) \\
\log(1+\sin 2x) = \log(1 + (2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3))) = \\
2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3) - 1/2(2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3))^2 + 1/3(2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3))^3 + o(x^3) = \\
2x - 2x^2 + 4/3x^3 + o(x^3) \\
(1+4x)^{1/2} = 1 + 2x - 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)
\end{gathered}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin 2x) + 1 - \sqrt{1+4x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4/3x^3 - 4x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{8}{3}.$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + 2\sin x + 10}\, dx.$$

SOL.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + 2\sin x + 10}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \sin x = t}}{=} \int \frac{1-t^2}{t^2+2t+10}\, dt = -t + \log(t^2+2t+10) + 3 \text{ arctang} \frac{1+t}{3}$$

e poi si sostituisce di nuovo $t = \sin x$.

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle. Stabilire inoltre

per quali valori dei parametri reali a e b il Teorema di Rolle si applica alla funzione

$$f(x) = (x^2 + 2x - 3)^{(a-1)/7}$$

sull'intervallo $[b, 2]$.

SOL. Deve essere $b < 2$, $[b, 2] \subseteq \mathrm{Dom} f$ e $f(b) = f(2)$. Se $a > 1$ $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : \ x^2 + 2x - 3 \geq 0\} = \{x \leq -3,\ x \geq 1\}$ nessun valore di b è accettabile. Nel caso particolare $(a-1)/7 \in \mathbf{N}$ allora $\mathrm{Dom} f = \mathbf{R}$ e $f(b) = f(2)$ implica $b = -4$.
Se $a = 1$ $\mathrm{Dom} f = \{x \neq -3,\ x \neq 1\}$ nessun valore di b è accettabile. Se $a < 1$, $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : \ x > 1,\ x < -3\}$ nessun valore di b è accettabile.

Esercizio 5. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = x^5 + 4x + 11$$

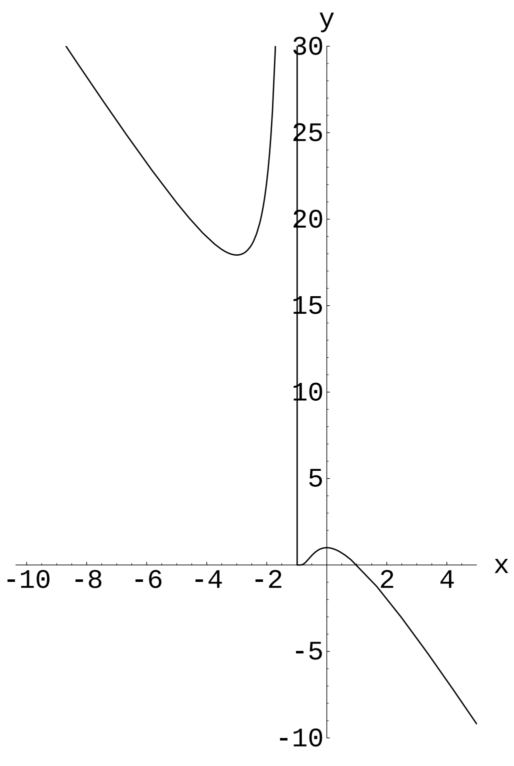
è invertibile sulla retta reale. Detta f^{-1} la funzione inversa di f, calcolare la tangente a f^{-1} nel punto $x = 6$ e stabilire se f^{-1} in $x = 6$ è convessa. (Suggerimento: calcolare la derivata seconda di f^{-1} usando la regola di derivazione della funzione composta.)

SOL. $f'(x) = 5x^4 + 4 > 0$ quindi la funzione è strettamente crescente e invertibile. Si ha $f^{-1}(6) = z$ se $f(z) = 6$ da cui $z = -1$, $(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{9}$, retta tangente: $y + 1 = \frac{1}{9}(x - 6)$. Si ha $(f^{-1})''(6) = -\frac{f''(-1)}{(f'(-1))^3} = 20 \cdot 9^3$ e quindi la funzione è convessa.

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x) = (-x+1)\ \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

Determinare il numero delle soluzioni reali, al variare di $k \in \mathbf{R}$, dell'equazione $f(x) = k$.
SOL. $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R}\ x \neq -1\}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 0$ $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$. $f'(x) = -\frac{x^2+3x}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$. $x = 0$ pto di min, $x = -3$ pto di max. $f(0) = 1$, $f(-3) = 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.



Quindi

$$\begin{cases} k \leq 0,\ k = 1\ k = 4\mathrm{e}^{3/2} & 1 \text{ sol.} \\ 0 < k < 1,\ k > 4\mathrm{e}^{3/2}, & 2 \text{ sol.} \\ 1 < k < 4\mathrm{e}^{3/2} & \text{no sol..} \end{cases}$$

Esercizio 2.
Calcolare, utilizzando gli sviluppi di McLaurin, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x}+\log\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)}{x^3}$$

($\log$ indica $\log_e$).
SOL. Si ha

$$\sin\tfrac{x}{2} = \tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$
$$\log(1+\sin\tfrac{x}{2}) = \log(1+(\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{48}x^3 + o(x^3))) =$$
$$\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{48}x^3 + o(x^3) - 1/2(\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{48}x^3 + o(x^3))^2 + 1/3(\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{48}x^3 + o(x^3))^3 + o(x^3) =$$
$$\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + \tfrac{1}{48}x^3 + o(x^3),$$
$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + \tfrac{x^3}{16} + o(x^3),$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x}+\log\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{16}+\frac{1}{48}x^3}{x^3} = -\frac{1}{24}.$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 5\cos^2 x}\,dx.$$

SOL.

$$\int \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 5\cos^2 x}\,dx \underset{\tan x = t}{\underset{\uparrow}{=}} \int \frac{t^2}{t^2+2t+5}\,dt = t - \log(t^2+2t+5) -$$

$\frac{3}{2}\text{arctan}\left(\frac{t+1}{2}\right)$
e poi si sostituisce di nuovo $t = \tan x$.

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange. Stabilire inoltre per quali valori dei parametri reali a e b il Teorema di Lagrange si applica alla funzione

$$f(x) = (x^2-4)^{(a+1)/3}$$

sull'intervallo $[b, 5]$.
SOL. Se $a > -1$ $\text{Dom}f = \{x \in \mathbf{R} :\ x^2 - 4 \geq 0\} = \{x \leq -2,\ x \geq 2\}$ quindi deve essere $2 \leq b < 5$.
Se $a = -1$ $\text{Dom}f = \{x \in \mathbf{R} :\ x \neq -2, 2\}$ quindi deve essere $2 < b < 5$ Se $a < 1$, $\text{Dom}f = \{x \in \mathbf{R} :\ x < -2,\ x > 2\}$ da cui $2 < b < 5$.

Esercizio 5. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = -x^7 - x + 6$$

è invertibile sulla retta reale. Detta f^{-1} la funzione inversa di f, calcolare la tangente a f^{-1} nel punto $x = 4$ e stabilire se f^{-1} in $x = 4$ è convessa. (Suggerimento: calcolare la derivata seconda di f^{-1} usando la regola di derivazione della funzione composta.)

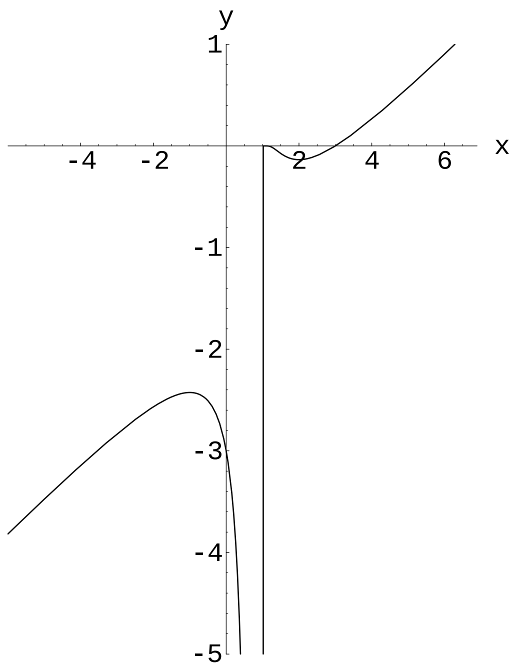
SOL. $f'(x) = -7x^6 - 1 < 0$ quindi la funzione è strettamente decrescente e invertibile. Si ha $f^{-1}(4) = z$ se $f(z) = 4$ da cui $z = 1$, $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = -1/8$, retta tangente: $y-1 = -\frac{1}{8}(x-4)$. Si ha $(f^{-1})''(4) = -\frac{f''(1)}{(f'(1))^3} = -6 \cdot 8^4$ e quindi la funzione è concava.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-3)\ \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}.$$

Determinare il numero delle soluzioni reali, al variare di $k \in \mathbf{R}$, dell'equazione $f(x) = k$.
SOL. Dom$f = \{x \in \mathbf{R}\ x \neq 1\}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = 0$ $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}$. $x = -1$ pto di max, $x = 2$ pto di min. $f(-1) = -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, $f(2) = -\mathrm{e}^{-2}$.



Quindi

$$\begin{cases} k \geq 0,\ k = -\mathrm{e}^{-2}\ k = -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} & 1 \text{ sol.} \\ k < -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\ -\mathrm{e}^{-2} < k < 0, & 2 \text{ sol.} \\ -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} < k < -\mathrm{e}^{-2} & \text{no sol..} \end{cases}$$

Esercizio 2.
Calcolare, utilizzando gli sviluppi di McLaurin, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{1-4x}-1-\log(1-\sin 2x)}$$

(log indica $\log_e$).
SOL. Si ha

$$\sin 2x = 2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$\log(1-\sin 2x) = \log(1-(2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3))) =$$
$$-(2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)) - 1/2(2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3))^2 - 1/3(2x - \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3))^3 + o(x^3) =$$
$$-2x - 2x^2 - 4/3x^3 + o(x^3)$$
$$(1-4x)^{1/2} = 1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 + o(x^3)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{1-4x}-1-\log(1-\sin 2x)} = \frac{x^3}{-4x^3+4/3x^3+o(x^3)} = -\frac{3}{8}.$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 4\cos x + 13}\, dx.$$

SOL.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 4\cos x + 13}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \cos = t}}{=} \int \frac{t^2-1}{t^2+4t+13}\, dt = t - 2\log(t^2+2t+13) - 2\ \mathrm{arctang}\frac{2+t}{3}$$

e poi si sostituisce di nuovo $t = \cos x$.

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle. Stabilire inoltre

per quali valori dei parametri reali a e b il Teorema di Rolle si applica alla funzione

$$f(x) = (x^2 - 4x)^{a/9}$$

sull'intervallo $[b, 3]$.
SOL. Deve essere $b < 3$, $[b,3] \subseteq \mathrm{Dom} f$ e $f(b) = f(3)$. Se $a > 0$ $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : \ x^2 - 4x \geq 0\} = \{x \leq 0,\ x \geq 4\}$ nessun valore di b è accettabile. Nel caso particolare $a/9 \in \mathbf{N}$ allora $\mathrm{Dom} f = \mathbf{R}$ e $f(b) = f(3)$ implica $b = 1$. Se $a = 0$ $\mathrm{Dom} f = \{x \neq -3,\ x \neq 1\}$ nessun valore di b è accettabile. Se $a < 0$, $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : \ x < 0,\ x > 4\}$ nessun valore di b è accettabile.

Esercizio 5. Dimostrare che la funzione

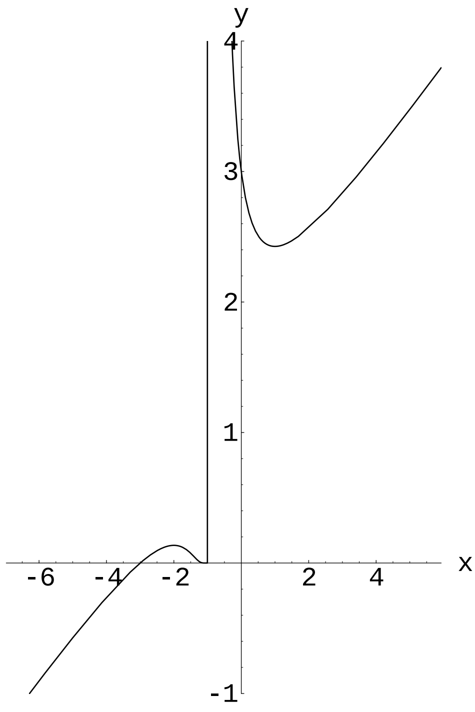
$$f(x) = -x^5 - 8x + 12$$

è invertibile sulla retta reale. Detta f^{-1} la funzione inversa di f, calcolare la tangente a f^{-1} nel punto $x = 21$ e stabilire se f^{-1} in $x = 21$ è convessa. (Suggerimento: calcolare la derivata seconda di f^{-1} usando la regola di derivazione della funzione composta.)
SOL. $f'(x) = -5x^4 - 8 < 0$ quindi la funzione è strettamente decrescente e invertibile. Si ha $f^{-1}(21) = z$ se $f(z) = 21$ da cui $z = 1$, $(f^{-1})'(21) = \frac{1}{f'(1)} = -1/13$, retta tangente: $y - 1 = -\frac{1}{13}(x - 21)$. Si ha $(f^{-1})''(21) = -\frac{f''(1)}{(f'(1))^3} = -20 \cdot 13^3$ e quindi la funzione è concava.

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x) = (x+3)\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{x+1}}.$$

Determinare il numero delle soluzioni reali, al variare di $k \in \mathbf{R}$, dell'equazione $f(x) = k$.
SOL. Dom$f = \{x \in \mathbf{R}\ x \neq -1\}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 0$ $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}$. $x = -2$ pto di max, $x = 1$ pto di min. $f(1) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, $f(-2) = \mathrm{e}^{-2}$.



Quindi

$$\begin{cases} k \leq 0,\ k = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\ k = \mathrm{e}^{-2} & 1 \text{ sol.} \\ 0 < k < \mathrm{e}^{-2},\ 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} < k, & 2 \text{ sol.} \\ \mathrm{e}^{-2} < k < 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} & \text{no sol..} \end{cases}$$

Esercizio 2.
Calcolare, utilizzando gli sviluppi di McLaurin, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\log\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)-\sqrt{1-x}+1}$$

($\log$ indica $\log_e$).
SOL. Si ha

$$\sin\tfrac{x}{2} = \tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$
$$\log(1-\sin\tfrac{x}{2}) = \log(1-(\tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{48}x^3+o(x^3))) =$$
$$-(\tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{48}x^3+o(x^3)) - 1/2(\tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{48}x^3+o(x^3))^2 - 1/3(\tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{48}x^3+o(x^3))^3 + o(x^3) =$$
$$-\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{8}-\tfrac{1}{48}x^3+o(x^3),$$
$$(1-x)^{1/2} = 1-\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{8}-\tfrac{x^3}{16}+o(x^3),$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\log\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)-\sqrt{1-x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\frac{x^3}{16}-\frac{1}{48}x^3} = 24.$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 10\cos^2 x}\,dx.$$

SOL.

$$\int \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 10\cos^2 x}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \tan x = t}}{=} \int \frac{t^2}{t^2+6t+10}\,dt = t - 3\log|t^2+6t+10| +$$

$8\arctan(t+3)$
e poi si sostituisce di nuovo $t = \tan x$.

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange. Stabilire inoltre per quali valori dei parametri reali a e b il Teorema di Lagrange si applica alla funzione

$$f(x) = (x^3-8)^{a/3}$$

sull'intervallo $[b, 5]$.
SOL. Se $a > 0$ $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : \ x^3 - 8 \geq 0\} = \{x \geq \sqrt[3]{2}\}$ quindi deve essere $\sqrt[3]{2} \leq b < 5$.
Se $a = 0$ $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : \ x \neq \sqrt[3]{2}\}\}$ quindi deve essere $\sqrt[3]{2} < b < 5$ Se $a < 0$, $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : \ x > \sqrt[3]{2}\}$ da cui $\sqrt[3]{2} < b < 5$.

Esercizio 5. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = 3x^{13} + x + 1$$

è invertibile sulla retta reale. Detta f^{-1} la funzione inversa di f, calcolare la tangente a f^{-1} nel punto $x = -3$ e stabilire se f^{-1} in $x = -3$ è convessa. (Suggerimento: calcolare la derivata seconda di f^{-1} usando la regola di derivazione della funzione composta

SOL. $f'(x) = 39x^{12} + 1 > 0$ quindi la funzione è strettamente crescente e invertibile. Si ha $f^{-1}(-3) = z$ se $f(z) = -3$ da cui $z = -1$, $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(-1)} = 1/40$, retta tangente: $y + 1 = 1/40(x + 3)$. Si ha $(f^{-1})''(-3) = -\frac{f''(-1)}{(f'(-1))^3} = 39 \cdot 12 \cdot 40^3$ e quindi la funzione è concava.