SOLUZIONI

Matematica I 11 Settembre 2007 - Versione **A**

Esercizio 1. Si consideri la funzione

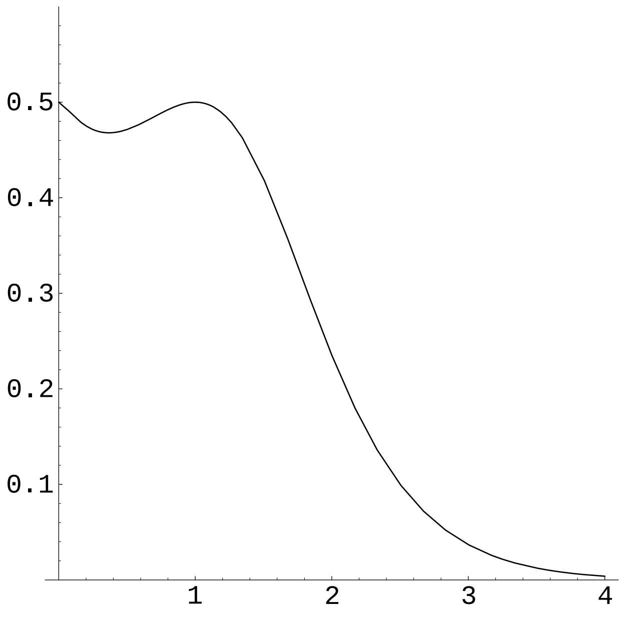
$$f(x) = \frac{e^{x \log x}}{1 + e^{2x \log x}} \,.$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.
b) Stabilire se esistono eventuali punti di non derivabilità.
c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x)$.
d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

SOL. Dom$f = \mathbf{R}$. $lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$. $y = 0$ asintoto orizzontale.

$$f'(x) = \frac{e^{x \log x}(1 - e^{2x \log x})(1 + \log x)}{(1 + e^{2x \log x})^2}$$

$x = 1/e$ pto di min, $x = 1$ pto di max, $lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.



Esercizio 2.
Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{\frac{1}{x}}-1}{\arctan(x^\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -1 \\ \log 3 & \text{se } \alpha = -1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < -1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5x^2-1}{x^\alpha} \sin(x\log x)\,(1-\cos x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 3 \end{cases}$$

Esercizio 3.
Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x - 1}\,dx \underset{\underset{\cos x = t}{\uparrow}}{=} -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^4-1}\,dt = \int -1+\frac{2}{1+t^2}\,dt = -t+2\arctan t =$$

$-\cos x + 2\arctan\cos x$.

Esercizio 4. Si consideri

$$F(x) = \int_{\alpha x}^{a} f(t)\,dt$$

con $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funzione continua e α parametro reale. Si calcoli la derivata di $F(x)$ dandone una giustificazione teorica.
SOL. Si ha $F'(x) = -\alpha f(\alpha x)$. Infatti $F(x) = G(\alpha x)$ dove $G(x) = \int_x^a f(t)\,dt$. Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che $G'(x) = -f(x)$. Il teorema della derivata delle funzioni composte implica la risposta.

Esercizio 5. Dire se le seguenti equazioni hanno almeno una soluzione reale

a) $$\log x + e^{2x} = 0, \quad x > 0;$$

b) $$\arctan x = \frac{\alpha}{x}, \quad x > \frac{\pi}{4}, \quad \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Giustificare la risposta.
SOL. a) Detta $f(x) = \log x + e^{2x}$ si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e dato che la funzione è continua per $x > 0$ questo è sufficiente, per una conseguenza del teorema degli zeri delle funzioni continue, per garantire l'esistenza di uno zero di f.
b) Detta $f(x) = \arctan x - \frac{\alpha}{x}$ si ha $f(\pi/4) = 1 - \frac{4\alpha}{\pi}$ e $\lim f(x) = \pi/2$. Se $1 - \frac{4\alpha}{\pi} < 0$ cioè $\alpha > \pi/4$ c'è una soluzione per $x > \pi/4$, per una conseguenza del teorema degli zeri delle funzioni continue. Se $\alpha \leq \pi/4$ dato che la funzione è crescente non ci sono soluzioni.

Esercizio 6. Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange.

Ingegneria Ambientale, Civile, Edile

Matematica I 11 Settembre 2007 - Versione **B**

Esercizio 1. Si consideri la funzione

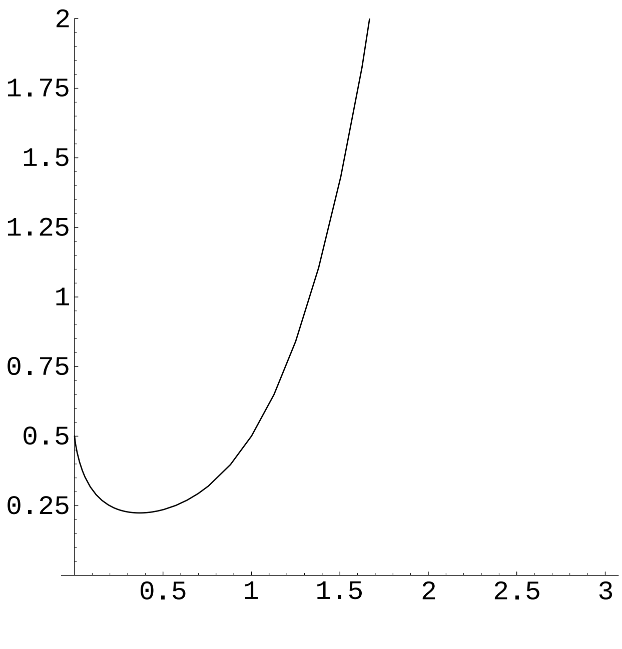
$$f(x) = \frac{e^{x \log x}}{1 + e^{-2x \log x}}.$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.
b) Stabilire se esistono eventuali punti di non derivabilità.
c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x)$.
d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

SOL. Dom$f = \mathbf{R}$. $lim_{x \to 0} f(x) = 1/2$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \frac{e^{x \log x}(1 + 3e^{-2x \log x})(1 + \log x)}{(1 + e^{-2x \log x})^2}$$

$x = 1/e$ pto di min, $lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$.



Esercizio 2.
Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x^\alpha)}{2^{\frac{1}{x}}-1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > -1 \\ \frac{1}{\log 2} & \text{se } \alpha = -1 \\ 0 \quad \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{5x^2-1} \sin(x\log x)\,(1-\cos x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -3 \\ +\infty & \text{se } \alpha \le -3. \end{cases}$$

Esercizio 3.
Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x - 1}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \sin x = t}}{=} \int \frac{(1-t^2)^2}{t^4-1}\,dt = \int 1 - \frac{2}{1+t^2}\,dt = t - 2\arctan t =$$

$\sin x - 2\arctan\sin x$.

Esercizio 4. Si consideri

$$F(x) = \int_a^{\alpha x} f(t)\,dt$$

con $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funzione continua e α parametro reale. Si calcoli la derivata di $F(x)$ dandone una giustificazione teorica.
SOL. Si ha $F'(x) = \alpha f(\alpha x)$. Infatti $F(x) = G(\alpha x)$ dove $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che $G'(x) = f(x)$. Il teorema della derivata delle funzioni composte implica la risposta.

Esercizio 5. Dire se le seguenti equazioni hanno almeno una soluzione reale

a) $$\log x + e^{-x} = 0, \quad x > 0;$$

b) $$\arctan x = \frac{\alpha}{x}, \quad x > \frac{\pi}{4}, \quad \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Giustificare la risposta.
SOL. Vedasi Esercizio 5 del Tema A.

Esercizio 6. Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange.