MATEMATICA 1
Ingegneria Edile e Civile
Prof. P. Ciatti, Prof. C. Sartori

TEMA A Padova 13/12/2006

1) Studiare la funzione

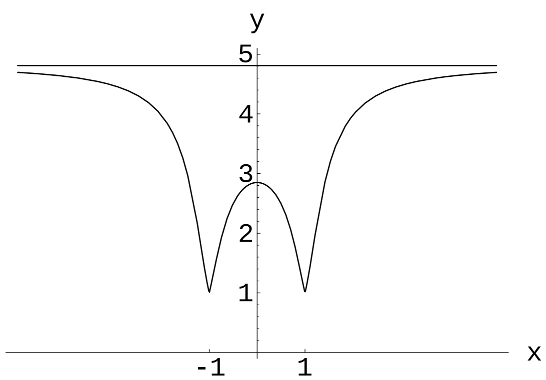
$$f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{arctg}(\sqrt{3}|x^2-1|)}.$$

(Dominio, limiti notevoli di f e f', crescenza e decrescenza, massimi e minimi, asintoti. Abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.)

SOL. f è pari. Dom$f = \mathbf{R}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$,

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{arctg}(\sqrt{3}|x^2-1|)} \frac{2\sqrt{3}x}{1+3(x^2-1)^2} & \text{se } |x| > 1 \\ \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}(\sqrt{3}|x^2-1|)} \frac{2\sqrt{3}x}{1+3(x^2-1)^2} & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

La funzione è crescente per $x > 1$ e $-1 < x < 0$ decrescente altrove. $x = 0$ pto di max , $f(0) = \mathrm{e}^{\pi/3}$, $x = \pm 1$ punti di minimo $f(\pm 1) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -2\sqrt{3}$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2\sqrt{3}$. Asintoto orizzontale $y = \mathrm{e}^{\pi/2}$.



2) Sia

$$F(x) = \int_0^x \log(1 + \frac{1}{2}t^2) - 1 + \cos t \, dt,$$

si calcoli il primo termine non nullo della formula di Taylor in $x = 0$ e si decida la natura del punto $x = 0$.

SOL. Si ha $\log(1+\frac{1}{2}t^2)-1+\cos t = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2 - 1 + 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4) = -\frac{1}{12}t^4 + o(t^4)$ per $t \to 0$ da cui $F(x) = -\frac{1}{60}x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$. $x = 0$ è punto di flesso con tangente orizzontale.

3) Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile e $c \in (a, b)$. Dimostrare che se c è punto di massimo per f allora $f'(c) = 0$.

4) Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < a^2$ e $f(b) > b^2$. Dimostrare che esiste un punto $c \in (a, b)$ in cui il grafico della funzione incontra quello della parabola $y = x^2$ cioè un punto tale che $f(c) = c^2$.

SOL. Si applica il teorema sugli zeri delle funzioni continue alla funzione $g(x) = f(x) - x^2$.

5) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1 - x^2}{e^{\sin x} - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$$

SOL. Si ha

$$e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \\ + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4),$$

$$\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4),$$

$$e^{\sin^2 x} = e^{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = 1 + (x^2 - \frac{x^4}{3}) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)^2 + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4),$$

da cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1 - x^2}{e^{\sin x} - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) - 1 - x^2}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6}x^4}{-\frac{1}{8}x^4} = -\frac{4}{3}$$

6) Si dimostri che una funzione crescente e continua in un intervallo ha inversa che è crescente e continua.

TEMA B Padova 13/12/2006

1) Studiare la funzione

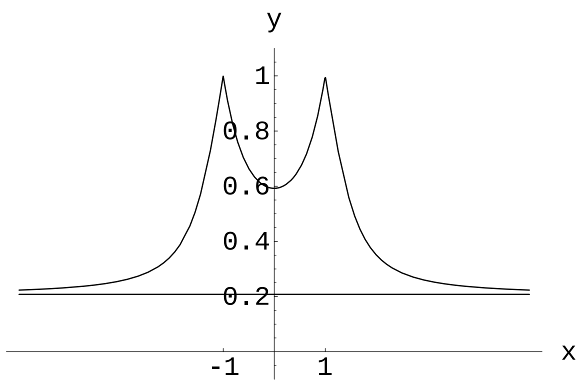
$$f(x) = \mathrm{e}^{-\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}|x^2-1|)}.$$

(Dominio, limiti notevoli di f e f', crescenza e decrescenza, massimi e minimi, asintoti. Abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.)

SOL. f è pari. Dom$f = \mathbf{R}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$,

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}|x^2-1|)} \frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}x}{1+1/3(x^2-1)^2} & \text{se } |x| > 1 \\ \\ \mathrm{e}^{-\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}|x^2-1|)} \frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}x}{1+1/3(x^2-1)^2} & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

La funzione è crescente per $0 < x < 1$ e $x < -1$ decrescente altrove. $x = 0$ pto di min , $f(0) = \mathrm{e}^{-\pi/6}$, $x = \pm 1$ punti di massimo $f(\pm 1) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -2\frac{\sqrt{3}}{3}$. Asintoto orizzontale $y = \mathrm{e}^{-\pi/2}$.



2) Sia

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2} - \frac{3}{2} + \cos(t)\, dt,$$

si calcoli il primo termine non nullo della formula di Taylor in $x = 0$ e si decida la natura del punto $x = 0$.

SOL. Si ha $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2} - \frac{3}{2} + \cos(t) = \frac{1}{2}\left(1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4\right) - \frac{3}{2} + (1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4)) =$

$\frac{7}{24}t^4 + o(t^4)$ per $t \to 0$ da cui $F(x) = \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$. $x = 0$ è punto di flesso con tangente orizzontale.

3) Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile e $c \in (a, b)$. Dimostrare che se c è punto di minimo per f allora $f'(c) = 0$.

4) Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < a/2$ e $f(b) > b/2$. Dimostrare che esiste un punto $c \in (a, b)$ in cui il grafico della funzione incontra quello della retta $y = x/2$ cioè un punto tale che $f(c) = c/2$.

SOL. Si applica il teorema sugli zeri delle funzioni continue alla funzione $g(x) = f(x) - x/2$.

5) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin^2 x) - x^2}{x(\log(1 + \sin x) - x + \frac{x^2}{2})}$$

SOL. Si ha

$$\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4),$$

$\log(1 + \sin^2 x) = \log(1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)) = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^2 =$
$x^2 - \frac{5x^4}{6} + o(x^4)$,
$\log(1 + \sin x) = \log\left(1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\right) =$
$\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin^2 x) - x^2}{x(\log(1 + \sin x) - x + \frac{x^2}{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{6}x^4 + o(x^4)}{x\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{6}x^4}{+\frac{x^4}{6}} = -5$$

6) Si dimostri che una funzione decrescente e continua in un intervallo ha inversa che è decrescente e continua.

TEMA C Padova 13/12/2006

1) Studiare la funzione

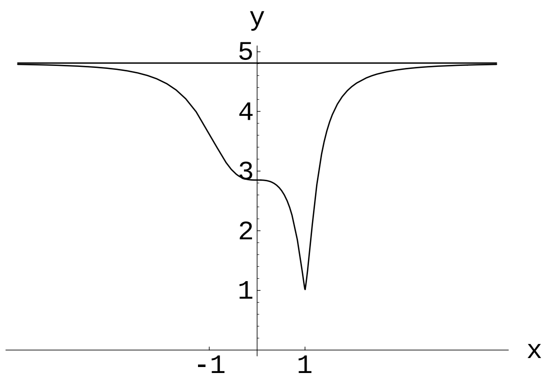
$$f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}|x^3-1|\right)}.$$

(Dominio, limiti notevoli di f e f', crescenza e decrescenza, massimi e minimi, asintoti. Abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.)

SOL. Dom$f = \mathbf{R}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$,

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}(\sqrt{3}|x^3-1|)} \frac{3\sqrt{3}x^2}{1+3(x^3-1)^2} & \text{se } x > 1 \\ \\ -\mathrm{e}^{-\operatorname{arctg}(\sqrt{3}|x^3-1|)} \frac{3\sqrt{3}x^2}{1+3(x^3-1)^2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

La funzione è crescente per $x > 1$ decrescente altrove. $x = 0$ pto di flesso a tangente orizzontale , $f(0) = \mathrm{e}^{\pi/3}$, $x = 1$ punto di minimo $f(1) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -3\sqrt{3}$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 3\sqrt{3}$. Asintoto orizzontale $y = \mathrm{e}^{\pi/2}$.



2) Sia

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} - 1 + \sin(t^2)\, dt,$$

si calcoli il primo termine non nullo della formula di Taylor in $x = 0$ e si decida la natura del punto $x = 0$.

SOL. Si ha $\mathrm{e}^{t^2} - 1 - \sin(t^2) = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 + o(t^4) - t^2 + \frac{1}{6}t^6 + o(t^6) = \frac{1}{2}t^4 + o(t^4)$ per $t \to 0$ da cui $F(x) = \frac{1}{10}x^5 + o(x^5)$, per $x \to 0$. $x = 0$ è punto di flesso con tangente orizzontale.

3) Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Dimostrare che se $f'(x) = 0$ $\forall x$ allora f è costante.

4) Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < a^3$ e $f(b) > b^3$. Dimostrare che esiste un punto $c \in (a, b)$ in cui il grafico della funzione incontra quello della funzione $y = x^3$ cioè un punto tale che $f(c) = c^3$.

SOL. Si applica il teorema sugli zeri delle funzioni continue alla funzione $g(x) = f(x) - x^3$.

5) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + (1 - \cos x)^2) - \frac{1}{4}x^4}{x^2(\log\cos x + \frac{1}{2}x^2)}$$

SOL. Si ha

$$(1 - \cos x)^2 = \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right)^2 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4!}x^6 + o(x^6),$$

$$\log(1 + (1 - \cos x)^2) = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4!}x^6 + o(x^6),$$

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\right) =$$
$$-\left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{x^4}{12} + o(x^4)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 - (1 - \cos x)^2) - \frac{1}{4}x^4}{x^2(\log(\cos x) + \frac{1}{2}x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4!}x^6 + o(x^6)}{x^2\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{12} + o(x^4) + \frac{1}{2}x^2\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4!}x^6}{-\frac{1}{12}x^6} = \frac{1}{2}.$$

6) Si dimostri che una funzione decrescente e continua in un intervallo ha inversa che è decrescente e continua.

1) Studiare la funzione

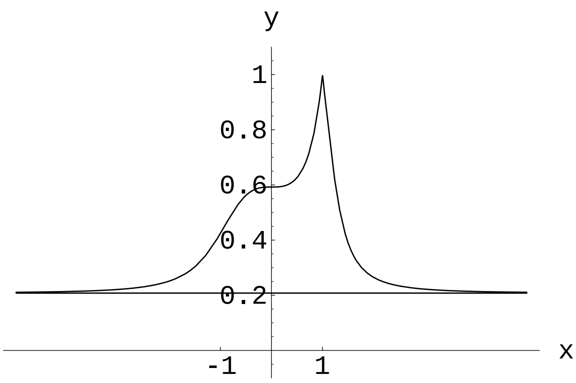
$$f(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}|x^3-1|\right)}.$$

(Dominio, limiti notevoli di f e f', crescenza e decrescenza, massimi e minimi, asintoti. Abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.)

SOL. f è pari. Dom$f = \mathbf{R}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$,

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}|x^3-1|\right)} \frac{\sqrt{3}\,x^2}{1+1/3(x^3-1)^2} & \text{se } x < 1 \\ \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}|x^3-1|\right)} \frac{\sqrt{3}\,x^2}{1+1/3(x^3-1)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

La funzione è crescente per $x < 1$ decrescente altrove. $x = 0$ pto di flesso a tangente orizzontale , $f(0) = \mathrm{e}^{-\pi/6}$, $x = 1$ punto di massimo $f(1) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \sqrt{3}$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\sqrt{3}$. Asintoto orizzontale $y = \mathrm{e}^{-\pi/2}$.



2) Sia

$$F(x) = \int_0^x \log(1+t^2) - \sin(t^2)\,dt,$$

si calcoli il primo termine non nullo della formula di Taylor in $x = 0$ e si decida la natura del punto $x = 0$.

SOL. Si ha $\log(1+t^2) - \sin(t^2) = t^2 - \frac{1}{2}t^4 + o(t^4) - t^2 + \frac{1}{6}t^6 + o(t^6) = -\frac{1}{2}t^4 + o(t^4)$ per $t \to 0$ da cui $F(x) = -\frac{1}{10}x^5 + o(x^5)$, per $x \to 0$. $x = 0$ è punto di flesso con tangente orizzontale.

3) Siano $f,\ g : [a,b] \to \mathbf{R}$ due funzioni continue, derivabili in (a,b). Dimostrare che se $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$ allora $f(x) < g(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

4) Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < a/3$ e $f(b) > b/3$. Dimostrare che esiste un punto $c \in (a,b)$ in cui il grafico della funzione incontra quello della retta $y = x/3$ cioè un punto tale che $f(c) = c/3$.

SOL. Si applica il teorema sugli zeri delle funzioni continue alla funzione $g(x) = f(x) - x/3$.

5) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{1-\cos^2 x} - 1 - x^2}{\mathrm{e}^{1-\cos x} - 1 - \frac{1}{2}x^2}$$

SOL. Si ha

$$\begin{array}{l}
\cos^2 x = (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4))^2 = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4),\\
\mathrm{e}^{1-\cos^2 x} = 1 + (x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) + \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4))^2 + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4),\\
\mathrm{e}^{1-\cos x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)} = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4\right)^2 + o(x^4) =\\
1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)
\end{array}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{1-\cos^2 x} - 1 - x^2}{\mathrm{e}^{1-\cos x} - 1 - \frac{1}{2}x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4) - 1 - x^2}{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) - 1 - \frac{1}{2}x^2} = \frac{\frac{x^4}{6}}{\frac{1}{12}x^4} = 2$$

6) Si dimostri che una funzione crescente e continua in un intervallo ha inversa che è crescente e continua.