SOLUZIONI

20 Settembre 2007 - Versione **A**

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = 3|x| + 9\log\left(2\ \frac{|x|-1}{|x|-2}\right)$$

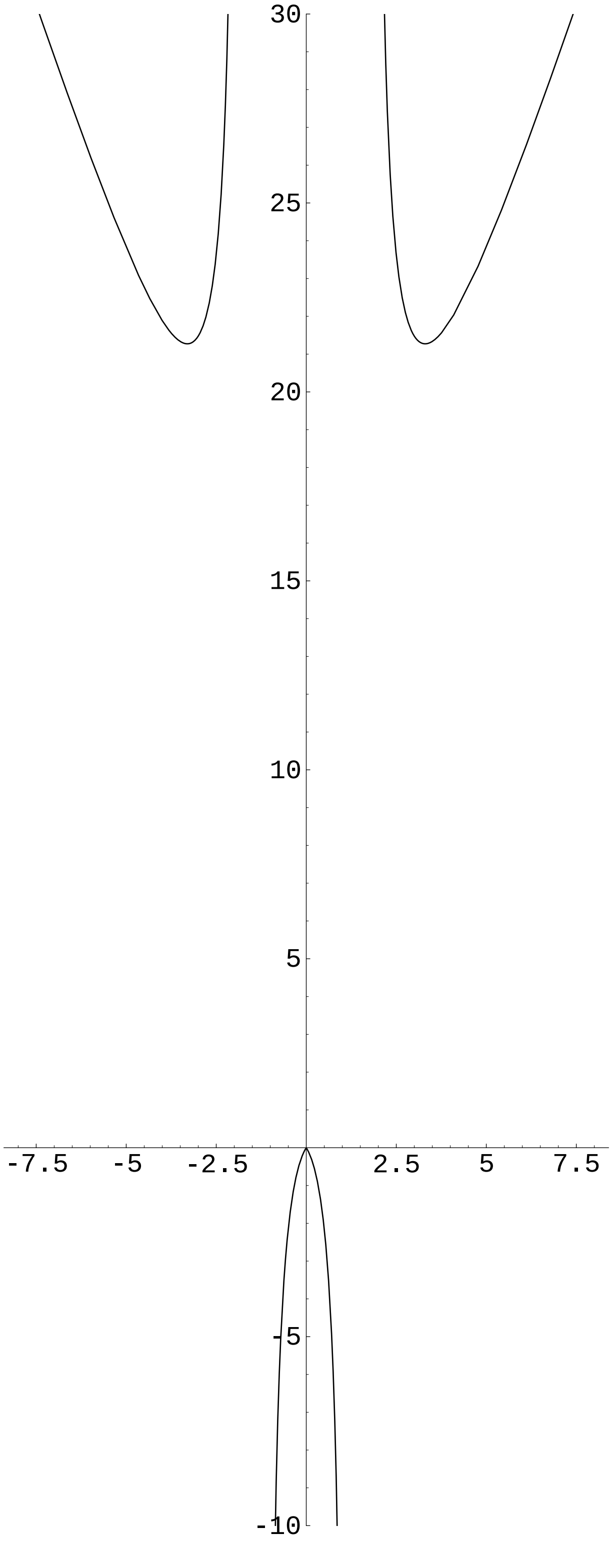
a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.
b) Stabilire se esistono eventuali punti di non derivabilità.
c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x)$.
d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.
SOL. Dom $f = (-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$. Funzione pari. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $y = 3x + 9\log 2$ è asintoto obliquo destro, $y = -3x + 9\log 2$ asintoto sinistro.

$$f'(x) = 3 - \frac{9}{(x-1)(x-2)}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = -3 + \frac{9}{(x+1)(x+2)}, \quad x < 0$$

$x = \pm\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ pto di minimo, $x = 0$ pto di max e angoloso $\lim_{x\to 0^+} f'(x) =$

$-\frac{3}{2}$, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{3}{2}$.



Esercizio 2.
Scrivere lo sviluppo di McLaurin di ordine 24 della funzione

$$f(x) = \cos(x^4).$$

Determinare poi $f^{(16)}(0)$ e $f^{(17)}(0)$.
SOL.

$$\cos(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{4!}x^{16} - \frac{1}{6!}x^{24} + o(x^{24}).$$

$$f^{(16)}(0) = \frac{16!}{4!}, \qquad f^{(17)}(0) = 0.$$

Esercizio 3.
a) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(2\cos\frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^4}\right);$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(2\cos\frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^4}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{12}\frac{1}{n^8} + o\left(\frac{1}{n^8}\right)\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 8 \\ \frac{1}{12} & \text{se } \alpha = 8 \\ 0 & \text{se } \alpha < 8 \end{cases}$$

b) Trovare, se esistono, a, $b \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{15x^3 + x^2}{5x^2 + 1} - (ax + b)\right] = 0.$$

$a = 3 \quad b = \frac{1}{5}$.

Esercizio 4. Dimostrare (o smentire) la seguente affermazione, giustificando la risposta,

$$\log x \le \frac{x^{10}}{10} - \frac{1}{10}, \quad \forall x > 0.$$

SOl. Sia $f(x) = \log x$, $g(x) = \frac{x^{10}}{10} - \frac{1}{10}$. Si ha $f(1) = g(1) = 0$ e

$$f'(x) = \frac{1}{x} < x^9 = g'(x), \quad \text{se } x > 1,$$

e

$$f'(x) = \frac{1}{x} > x^9 = g'(x), \quad \text{se } x < 1.$$

Questo è sufficiente per dire che l'affermazione è VERA per ogni $x > 0$.

Esercizio 5. Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dare la definizione di

$$\lim_{x\to1} f(x) = 3.$$

Esercizio 6. Dimostrare che ogni funzione derivabile in un punto è ivi contiunua ma che il viceversa è falso.

20 Settembre 2007 - Versione **B**

Esercizio 1. Si consideri la funzione

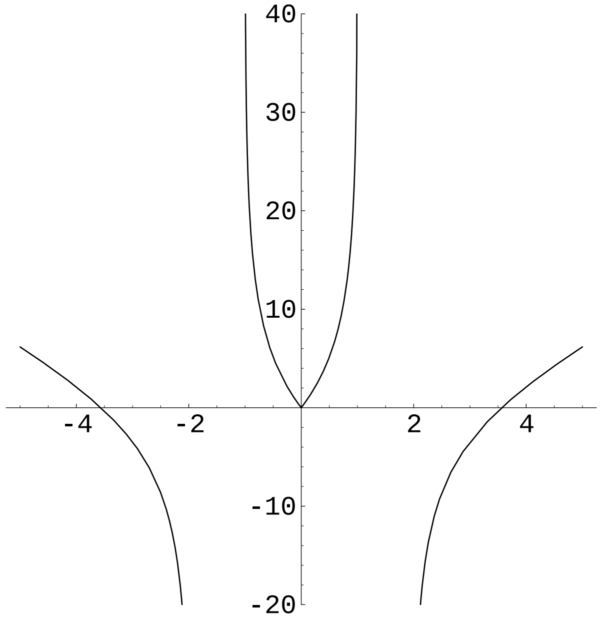
$$f(x) = 3|x| - 9\log\left(2\,\frac{|x|-1}{|x|-2}\right)$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.
b) Stabilire se esistono eventuali punti di non derivabilità.
c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x)$.
d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.
SOL. Dom $f = (-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$. Funzione pari. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $y = 3x - 9\log 2$ è asintoto obliquo destro, $y = -3x - 9\log 2$ asintoto sinistro.

$$f'(x) = 3 + \frac{9}{(x-1)(x-2)}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = -3 - \frac{9}{(x+1)(x+2)}, \quad x < 0$$

$x = 0$ pto di min. e angoloso $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{15}{2}$ e $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{15}{2}$.



Esercizio 2.

Scrivere lo sviluppo di McLaurin di ordine 21 della funzione

$$f(x) = \sin(x^3).$$

Determinare poi $f^{(15)}(0)$ e $f^{(16)}(0)$.
SOL.

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{1}{3!}x^9 + \frac{1}{5!}x^{15} - \frac{1}{7!}x^{21} + o\left(x^{21}\right).$$

$$f^{(15)}(0) = \frac{15!}{5!} \quad f^{(16)}(0) = 0.$$

Esercizio 3.
a) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{|x|^\alpha};$$

SOL.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2}}{|x|^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 4 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 4. \end{cases}$$

b) Trovare, se esistono, a, $b \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - (ax+b)\right] = 0.$$

SOL. $a = 1, \quad b = -1.$

Esercizio 4. Dimostrare (o smentire) la seguente affermazione, giustificando la risposta,

$$\log x \le \frac{x^9}{9} - \frac{1}{9}, \quad \forall x > 0.$$

SOl. Sia $f(x) = \log x$, $g(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{1}{9}$. Si ha $f(1) = g(1) = 0$ e

$$f'(x) = \frac{1}{x} < x^8 = g'(x), \quad \text{se } x > 1,$$

e

$$f'(x) = \frac{1}{x} > x^8 = g'(x), \quad \text{se } x < 1.$$

Questo è sufficiente per dire che l'affermazione è VERA per ogni $x > 0$.

Esercizio 5. Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dare la definizione di

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty.$$

Esercizio 6. Dimostrare che ogni funzione derivabile in un punto è ivi contiunua ma che il viceversa è falso.