MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA 1 Padova 05/11/2007

1) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \log(x^2)}{\log(2^x) + \sqrt{x}}.$$

SOL. Dal principio di confronto per gli infiniti si ha

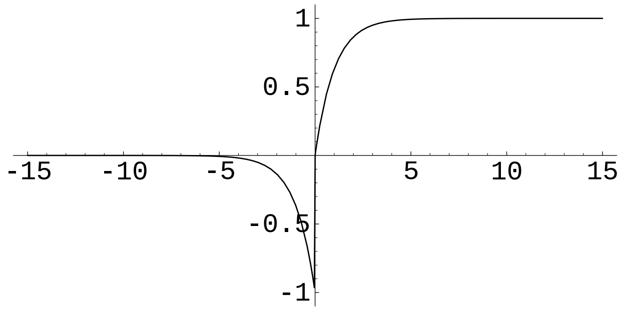
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \log(x^2)}{\log(2^x) + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^\alpha + x}}{x\log 2} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha > 2 \\ \frac{1}{\log 2}, & \text{se } \alpha = 2 \\ 0, & \text{se } \alpha < 2. \end{cases}$$

2) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 1, & x \geq 0 \\ -e^x, & x < 0 \end{cases}$$

a) Abbozzarne il grafico.
b) Determinarne l'immagine.
c) È iniettiva? Giustificare.
d) Se possibile determinare la funzione inversa.

SOL. a)



b) $\mathrm{Im} f =]-1, 1[$.
c) Sì. Infatti per $x \geq 0$ è strettamente crescente e $f(x) \geq 0$. Per $x < 0$ è strettamente decrescente e $f(x) < 0$.
d)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \log(-x), & -1 < x \leq 0 \\ -\log(1-x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

3) Dare la definizione di estremo superiore di un insieme non vuoto di numeri reali A. Caratterizzare $\sup A$ con le due proprietà caratteristiche. Dimostrare che se A ha massimo allora $\max A = \sup A$.

4) Sia $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di numeri reali crescente. Sia $(a_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ la sottosuccessione degli elementi pari. Dimostrare che se $\sup\{a_{2n},\ n\in\mathbf{N}\} = S$ allora è anche $\lim_{n\to+\infty} a_n = S$.

TEMA 2 Padova 05/11/2007

1) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2^x)+\sqrt{x}}{\sqrt{x^\alpha+x}+\log(x^2)}.$$

SOL. Dal principio di confronto per gli infiniti si ha

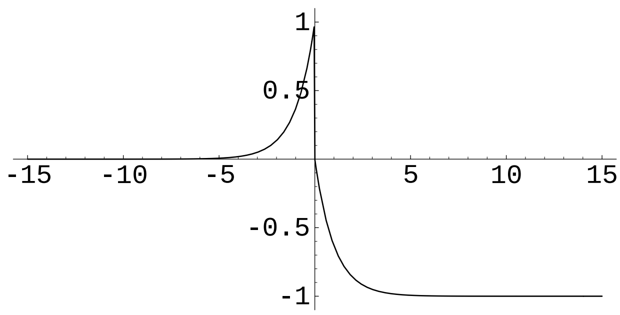
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2^x)+\sqrt{x}}{\sqrt{x^\alpha+x}+\log(x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log 2}{\sqrt{x^\alpha+x}} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha<2 \\ \log 2, & \text{se } \alpha=2 \\ 0, & \text{se } \alpha>2. \end{cases}$$

2) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}-1, & x \geq 0 \\ e^x, & x<0 \end{cases}$$

a) Abbozzarne il grafico.
b) Determinarne l'immagine.
c) È iniettiva? Giustificare.
d) Se possibile determinare la funzione inversa.

SOL. a)



b) $\mathrm{Im} f =]-1,1[$.
c) Sì. Infatti per $x \geq 0$ è strettamente decrescente e $f(x) \leq 0$. Per $x<0$ è

strettamente crescente e $f(x) > 0$.
d)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\log(1+x), & -1 \leq x \leq 0 \\ \log(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

3) Dare la definizione di estremo inferiore di un insieme non vuoto di numeri reali A. Caratterizzare $\inf A$ con le due proprietà caratteristiche. Dimostrare che se A ha minimo allora $\min A = \inf A$.

4) Sia $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di numeri reali decrescente. Sia $(a_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ la sottosuccessione degli elementi di posto pari. Dimostrare che se $\inf\{a_{2n},\ n \in \mathbf{N}\} = i$ allora è anche $\lim_{n\to+\infty} a_n = i$.

TEMA 3 Padova 05/11/2007

1) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x^\alpha+x}} + x^2}.$$

SOL. Per il principio di confronto di infiniti si ha

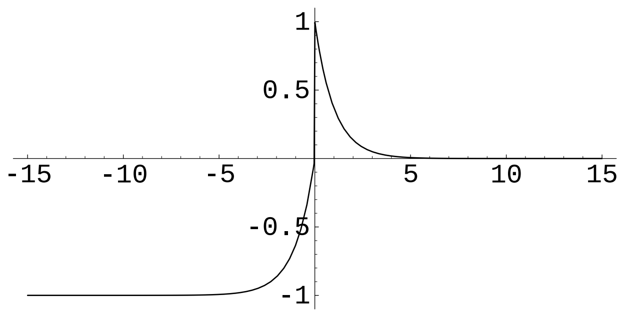
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x^\alpha+x}} + x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\log 2}}{e^{\sqrt{x^\alpha+x}}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2, \\ 0 & \text{se } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

2) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ e^x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Abbozzarne il grafico.
b) Determinarne l'immagine.
c) È iniettiva? Giustificare.
d) Se possibile determinare la funzione inversa.

SOL. a)



b) $\mathrm{Im} f =]-1, 1[$.
c) Sì. Infatti per $x \geq 0$ è strettamente decrescente e $f(x) \leq 0$. Per $x < 0$ è strettamente crescente e $f(x) > 0$.
d)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\log(x), & 0 \leq x < 1 \\ \log(1+x), & -1 < x < 0. \end{cases}$$

3) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dare la definizione di

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare che se f verifica i due limiti sopra scritti allora $\exists M > 0$ tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall x \text{ tale che } |x| > M.$$

4) Sia $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di numeri reali crescente. Sia $(a_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ la sottosuccessione degli elementi di posto dispari. Dimostrare che se $\sup\{a_{2n+1},\ n \in \mathbf{N}\} = S$ allora è anche $\lim_{n \to +\infty} a_n = S$.

TEMA 4 Padova 05/11/2007

1) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x^\alpha + x}} + x^2}{2^x + e^{\sqrt{x}}}.$$

SOL. Per il principio di confronto di infiniti si ha

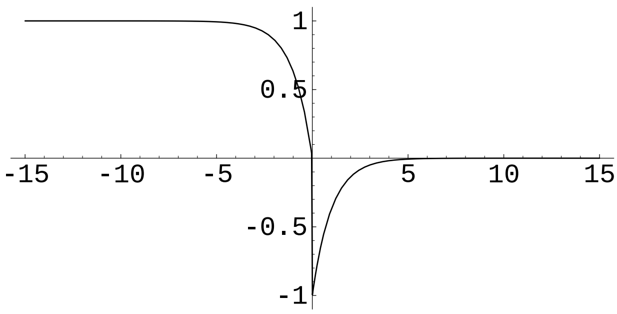
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x^\alpha + x}} + x^2}{2^x + e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x^\alpha + x}}}{e^{x \log 2}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 2, \\ 0 & \text{se } \alpha \leq 2. \end{cases}$$

2) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x > 0, \\ 1 - e^x, & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Abbozzarne il grafico.
b) Determinarne l'immagine.
c) È iniettiva? Giustificare.
d) Se possibile determinare la funzione inversa.

SOL. a)



b) $\mathrm{Im} f =]-1, 1[$.
c) Sì. Infatti per x 0 è strettamente crescente e $f(x) \leq 0$. Per $x < 0$ è strettamente decrescente e $f(x) > 0$.
d)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \log(1-x), & 0 \leq x < 1 \\ -\log(-x), & -1 < x < 0. \end{cases}$$

3) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dare la definizione di

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare che se f verifica i due limiti sopra scritti allora $\exists M > 0$ tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall x \text{ tale che } |x| > M.$$

4) Sia $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di numeri reali decrescente. Sia $(a_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ la sottosuccessione degli elementi di posto dispari. Dimostrare che se $\inf\{a_{2n+1},\ n \in \mathbf{N}\} = i$ allora è anche $\lim_{n \to +\infty} a_n = i$.