Ingegneria Edile

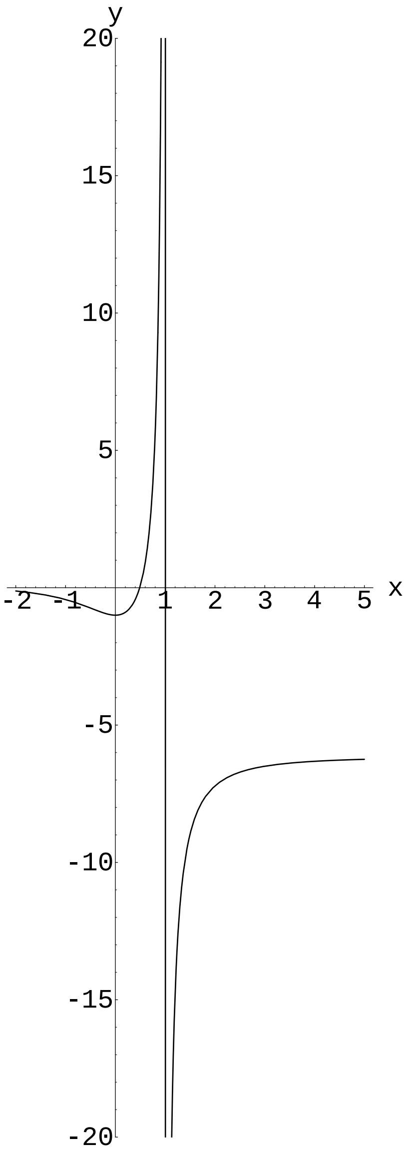
TEMA A Padova 09/07/2008

SOLUZIONI

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{3x-1}{1-x} - 2\arctan x.$$

SOL. Dom$f = \{x \in \mathbf{R} : \ x \neq 1\}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3-\pi$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3+\pi$. Asintoto orizzontale dx. $y = -3-\pi$, asintoto orizzontale sx.$y = -3+\pi$. $f'(x) = \frac{4x}{(x-1)^2(1+x^2)}$. $x=0$ pto di minimo, funzione crescente in $(1,+\infty)$ e in $(0,1)$, decrescente in



$(-\infty, 0)$.

2) Calcolare

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x+1)^2 |\sin x|\, dx.$$

SOL. Integrando per parti $\int (x+1)^2 \sin x\, dx = (1-2x-x^2)\cos x + (2+2x)\sin x$ da cui

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x+1)^2 |\sin x|\, dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (x+1)^2 \sin x\, dx + \int_{0}^{\pi} (x+1)^2 \sin x\, dx =$$

$$-\left[(1-2x-x^2)\cos x + (2+2x)\sin x\right]_{-\pi/2}^{0} + \left[(1-2x-x^2)\cos x + (2+2x)\sin x\right]_{0}^{\pi} =$$

$$\pi - 3 + \pi^2 + 2\pi - 2 = \pi^2 + 3\pi - 5.$$

---

3) a) Determinare il polinomio $P(x)$ di grado minimo tale che

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\log^2(1+\sin x) - P(x)}{(x-\pi)^3} = 0.$$

SOL. Si deve scrivere la formula di Taylor di $\log^2(1+\sin x)$ in $x=\pi$ oppure sfruttare gli sviluppi asintotici in $t=0$ dopo aver effettuato il cambio di variabile $t = x-\pi$. Si ottiene $P(x) = (x-\pi)^2 + (x-\pi)^3$.

b) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+5} - \sqrt[3]{n+2}}{n^\alpha}.$$

SOL. Razionalizzando si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+5} - \sqrt[3]{n+2}}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{(\sqrt[3]{(n+5)^2} + \sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n+5} + \sqrt[3]{(n+5)^2})n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se}\, \alpha > -\frac{2}{3}, \\ +\infty & \text{se } \alpha < -\frac{2}{3}, \\ 1 & \text{se } \alpha = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

---

4) Si enunci e dimostri il teorema fondamentale del calcolo integrale.

---

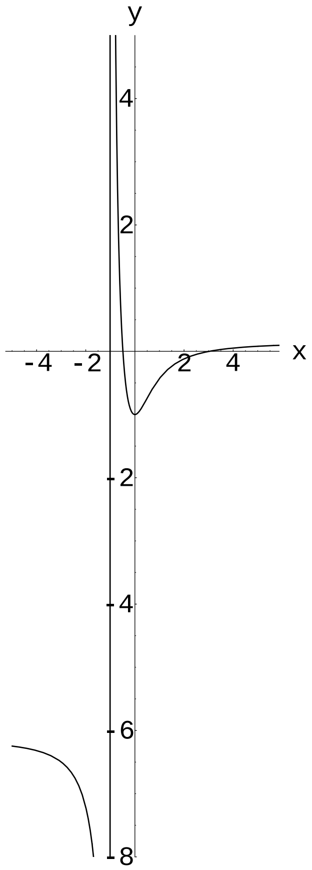
5) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Dimostrare che esiste un punto di minimo assoluto per f.

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile

TEMA B Padova 09/07/2008

1) Studiare la funzione

$$f(x) = 2\arctan x - \frac{3x+1}{1+x}.$$



SOL. $\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : \ x \neq -1\}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3+\pi$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3-\pi$. Asintoto orizzontale sx. $y = -3-\pi$, asintoto orizzontale dx.$y = -3+\pi$. $f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^2(1+x^2)}$. $x = 0$ pto di minimo, funzione crescente in $(0, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$.

---

2) Calcolare

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x-1)^2 |\cos x| \, dx.$$

SOL. Integrando per parti $\int (x-1)^2 \cos x \, dx = (-1-2x+x^2)\sin x + (-2+2x)\cos x$ da

cui

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x-1)^2 |\cos x| \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} (x-1)^2 \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (x-1)^2 \cos x \, dx =$$

$$\left[(-1-2x+x^2)\sin x+(-2+2x)\cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \left[(-1-2x+x^2)\sin x+(-2+2x)\cos x\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} =$$

$$-2+\pi^2/2-(2+4\pi-5\pi^2/2) = 3\pi^2-4\pi-4.$$

---

3) a) Determinare il polinomio $P(x)$ di grado minimo tale che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log^2(1+\cos x)-P(x)}{(x-\pi/2)^3} = 0.$$

SOL. Si deve scrivere la formula di Taylor di $\log^2(1+\cos x)$ in $x=\pi/2$ oppure sfruttare gli sviluppi asintotici in $t=0$ dopo aver effettuato il cambio di variabile $t=x-\pi/2$. Si ottiene $P(x)=(x-\pi/2)^2+(x-\pi/2)^3$.

b) Calcolare al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+7}-\sqrt[3]{n+5}}{n^\alpha}.$$

SOL. Razionalizzando si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+7}-\sqrt[3]{n+5}}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(\sqrt[3]{(n+7)^2}+\sqrt[3]{n+7}\sqrt[3]{n+5}+\sqrt[3]{(n+5)^2})n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se}\,\alpha>-\frac{2}{3}, \\ +\infty & \text{se } \alpha<-\frac{2}{3}, \\ 2/3 & \text{se } \alpha=-\frac{2}{3}. \end{cases}$$

---

4) Si enunci e dimostri il teorema della media integrale.

---

5) Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Dimostrare che esiste un punto di massimo assoluto per f.