SOLUZIONI

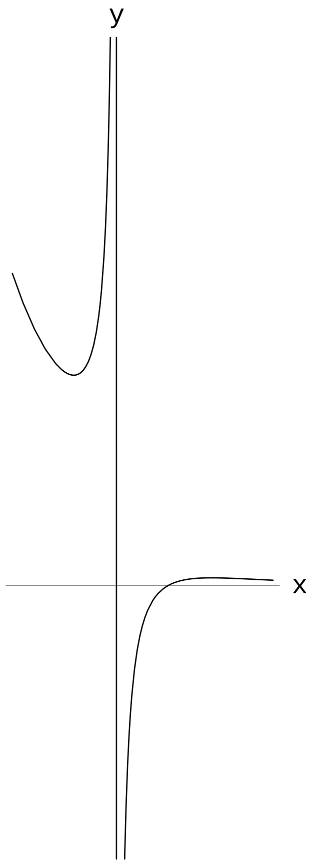
TEMA A Padova 13/12/2007

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x}e^{-2x}.$$

(Dominio, limiti notevoli di f, crescenza e decrescenza, massimi e mi-nimi, asintoti. Abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.)

SOL. Dom $f = \{x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$. $\lim_{x\to+\infty} f = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f = +\infty$. $f' = \frac{-2x^2+2x+1}{x^2}e^{-2x}$. $f' > 0$ se $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < 0$, $0 < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ pto di minimo, $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ pto di max. min$= f(\frac{1-\sqrt{3}}{2}) = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}e^{-1+\sqrt{3}}$, max$= f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}e^{-1-\sqrt{3}}$.



---

2) Si calcoli, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{(3x^\alpha)} - 1 - \sin^2 x}{\log(1+2x^2)}.$$

SOL. Osservo che per $\alpha > 0$, $x^\alpha \log x \to 0$ per $x \to 0$, da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{(3x^\alpha)} - 1 - \sin^2 x}{\log(1+2x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{(3x^\alpha \log x)} - 1 - \sin^2 x}{\log(1+2x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 + 3x^\alpha \log x - 1 - x^2 + o(x^\alpha \log x) + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^\alpha \log x + o(x^\alpha \log x)}{2x^2 + o(x^2)} = -\infty \quad \text{se } \alpha \le 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2} \quad \text{se } \alpha > 2.$$

---

3) *(Orale)* Si enunci e dimostri il teorema della media integrale per funzioni continue.

---

4) Sia f una funzione con derivata seconda continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f'' = -2$. Si calcoli

a) $\lim_{x\to+\infty} f'$, b) $\lim_{x\to+\infty} f$.

---

5) Scrivere la formula di Mac Laurin del sesto ordine delle funzioni

a) $f(x) = 1 - \cos x$, b) $g(x) = e^{\left(1-\cos x - \frac{1}{6!}x^6\right)}$.

Dire se g è concava o convessa in un intorno di $x = 0$ e calcolare $g^{(6)}(0)$.
SOL.

$$f(x) = (1-\cos x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6);$$

$$g(x) = e^{\left(1-\cos x - \frac{1}{6!}x^6\right)} = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4\right)^3 + o(x^6) =$$

$$1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4!}x^6\right) + \frac{1}{6}\frac{1}{2^3}x^6 + o(x^6) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^6).$$

La funzione è convessa vicino a $x = 0$ e $g^{(6)}(0) = 0$.

---

6) Tra tutte le primitive di $\frac{e^{2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$ calcolare quella che vale 1 in $x = 0$.
SOL.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\,dx \underset{e^{2x}=t}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{1}{2}\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\,dt = \frac{1}{4}\log(t^2+1) + C = \frac{1}{4}\log(e^{4x}+1) + C.$$

Si trova poi $C = 1 - \frac{1}{4}\log 2$.

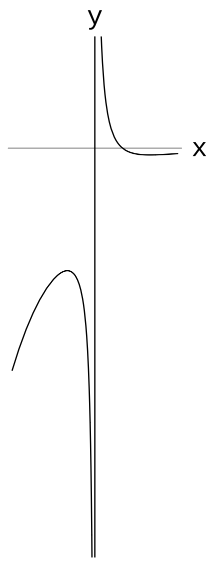
MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA B Padova 13/12/2007

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1-x}{x} e^{-2x}.$$

(Dominio, limiti notevoli di f, crescenza e decrescenza, massimi e mi-nimi, asintoti. Abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.)
SOL. Dom $f = \{x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$. $\lim_{x\to+\infty} f = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f = -\infty$. $f' = h\frac{2x^2-2x-1}{x^2}e^{-2x}$. $f' > 0$ se $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ pto di max, $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ pto di min. max$=$ $f(\frac{1-\sqrt{3}}{2}) = -\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}e^{-1+\sqrt{3}}$, min$=$ $f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) = -\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}e^{-1-\sqrt{3}}$.



---

2) Si calcoli, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+2x^2)}{x^{(3x^\alpha)} - 1 - \sin^2 x}.$$

SOL. Osservo che per $\alpha > 0$, $x^\alpha \log x \to 0$ per $x \to 0$, da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+2x^2)}{x^{(3x^\alpha)} - 1 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+2x^2)}{e^{(3x^\alpha \log x)} - 1 - \sin^2 x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2 + o(x^2)}{1 + 3x^\alpha \log x - 1 - x^2 + o(x^\alpha \log x) + o(x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{3x^\alpha \log x + o(x^\alpha \log x)} = 0 \quad \text{se } \alpha \leq 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = -2 \quad \text{se } \alpha > 2.$$

---

3) *(Orale)* Si enunci e dimostri il teorema fondamentale del calcolo integrale.

---

4) Sia f una funzione con derivata seconda continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f'' = 3$. Si calcoli

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f$.

---

5) Scrivere la formula di Mac Laurin del sesto ordine delle funzioni

a) $f(x) = \cos x$, b) $g(x) = \log\left(\cos x + \frac{1}{6!}x^6\right)$.

Dire se g è concava o convessa in un intorno di $x = 0$ e calcolare $g^{(6)}(0)$.
SOL.

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6);$$

$$g(x) = \log\left(\cos x + \frac{1}{6!}x^6\right) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right)^3 + o(x^6) =$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4!}x^6\right) - \frac{1}{3}\frac{1}{2^3}x^6 + o(x^6) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + o(x^6).$$

La funzione è concava vicino a $x = 0$ e $f^{(6)}(0) = -\frac{6!}{48} = -15$.

---

6) Tra tutte le primitive di $\frac{e^{3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$ calcolare quella che vale 1 in $x = 0$.
SOL.

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ e^{3x}=t}}{=} \int \frac{1}{3}\frac{1}{t + \frac{1}{t}}\, dt = \frac{1}{6}\log(t^2 + 1) + C = \frac{1}{6}\log(e^{6x} + 1) + C.$$

Si trova poi $C = 1 - \frac{1}{6}\log 2$.

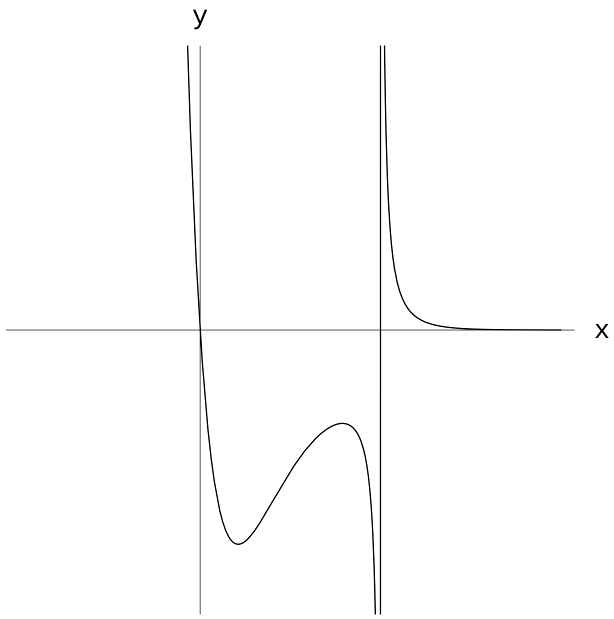
MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA C Padova 13/12/2007

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x-1}e^{-6x}.$$

(Dominio, limiti notevoli di f, crescenza e decrescenza, massimi e mi-nimi, asintoti. Abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.)
SOL. Dom $f = \{x \in \mathbf{R}, x \neq 1\}$. $\lim_{x\to+\infty} f = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f = -\infty$. $f' = \frac{-6x^2+6x-1}{(x-1)^2}e^{-6x}$. $f' > 0$ se $\frac{3-\sqrt{3}}{6} < x < \frac{3+\sqrt{3}}{6}$. $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ pto di max, $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ pto di min, max$= f(\frac{3+\sqrt{3}}{6}) = -\frac{(3+\sqrt{3})^2}{6}e^{-3-\sqrt{3}}$, min$= f(\frac{3-\sqrt{3}}{6}) = -\frac{(\sqrt{3}-3)^2}{6}e^{-3+\sqrt{3}}$.



---

2) Si calcoli, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{(x^2)}-1}{x^{(3x^\alpha)} - \cos x}.$$

SOL.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{(x^2)}-1}{x^{(3x^\alpha)}-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+o(x^2)}{e^{3x^\alpha \log x}-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+o(x^2)}{1+3x^\alpha \log x+o(x^\alpha \log x)-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+o(x^2)}{3x^\alpha \log x+o(x^\alpha \log x)} = 0 \quad \text{se } \alpha \le 2; \\ \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+\o(x^2)} = 2 \quad \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

---

3) *(Orale)* Si enunci e dimostri il teorema fondamentale del calcolo integrale.

---

4) Sia f una funzione con derivata seconda continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f'' = -2$. Si calcoli

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f$.

---

5) Scrivere la formula di MacLaurin del quarto ordine delle funzioni

a) $f(x) = e^x-1$, b) $g(x) = \cos\left(e^x-1-\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{4!}x^4\right)$.

Dire se g è concava o convessa in un intorno di $x=0$ e calcolare $g^{(4)}(0)$.
SOL. $f(x) = (e^x-1) = x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$;

$$g(x) = \cos\left(e^x-1-\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{4!}x^4\right) = \cos\left(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^4)\right) =$$

$$1-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x+\frac{1}{2}x^2+o(x^4)\right)^4 =$$

$$= 1-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4\right)+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4) = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{12}x^4+o(x^4).$$

g è concava vicino a $x=0$ e $g^{(4)}(0) = -\frac{4!}{12} = -2$.

---

6) Tra tutte le primitive di $\frac{e^{-3x}}{e^{3x}-e^{-3x}}$ calcolare quella che vale 0 in $x=1$.
SOL.

$$\int \frac{e^{-3x}}{e^{3x}-e^{-3x}}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ e^{-3x}=t}}{=} \int -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\frac{1}{t}-t}\,dt = \frac{1}{6}\log|-t^2+1|+C = \frac{1}{6}\log(-e^{-6x}+1)+C.$$

Si trova poi $C = -\frac{1}{6}\log\left(1-e^{-6}\right)$.

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

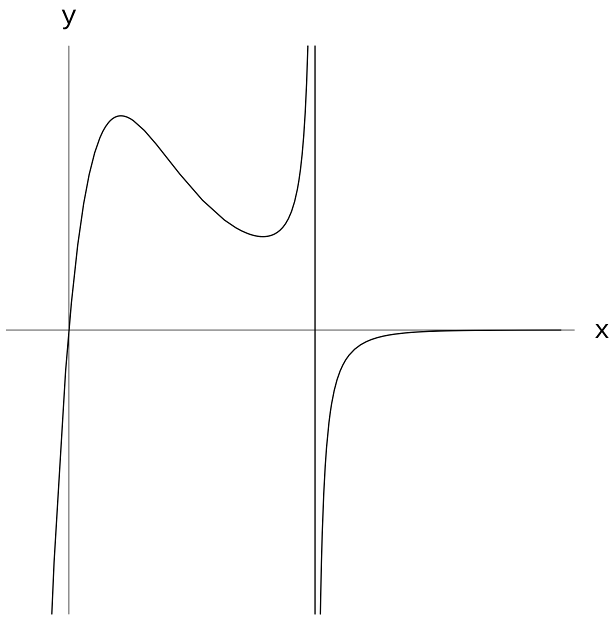
TEMA D | Padova 13/12/2007

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1-x}e^{-6x}.$$

(Dominio, limiti notevoli di f, crescenza e decrescenza, massimi e mi-nimi, asintoti. Abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.)

SOL. Dom $f = \{x \in \mathbf{R}, x \neq 1\}$. $\lim_{x\to+\infty} f = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$, $\lim_{x\to1^+} f = -\infty$, $\lim_{x\to1^-} f = +\infty$. $f' = \frac{6x^2-6x+1}{(x-1)^2}e^{-6x}$. $f' > 0$ se $x < \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ e $1 > x > \frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $x > 1$. $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ pto di min, $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ pto di max, min$= f(\frac{3+\sqrt{3}}{6}) = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{6}e^{-3-\sqrt{3}}$, max$= f(\frac{3-\sqrt{3}}{6}) = \frac{(\sqrt{3}-3)^2}{6}e^{-3+\sqrt{3}}$.



---

2) Si calcoli, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^{(3x^{\alpha})} - \cos x}{e^{(x^3)} - 1}.$$

SOL.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{(3x^\alpha)} - \cos x}{e^{(x^3)} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x^\alpha \log x} - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^3 + o(x^3)} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 + 3x^\alpha \log x + o(x^\alpha \log x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + ø(x^2)}{x^3 + o(x^3)} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^\alpha \log x + o(x^\alpha \log x)}{x^3 + o(x^3)} = -\infty \quad \text{se } \alpha \leq 2; \\ \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + ø(x^2)}{x^3 + o(x^2)} = +\infty \quad \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

---

3) *(Orale)* Si enunci e dimostri il teorema della media integrale per funzioni continue.

---

4) Sia f una funzione con derivata seconda continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f'' = -2$. Si calcoli

a) $\lim_{x\to+\infty} f'$, b) $\lim_{x\to+\infty} f$.

---

5) Scrivere la formula di MacLaurin del quarto ordine delle funzioni

a) $f(x) = \log(1+x)$, b) $g(x) = \cos\left(\log(1+x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)$.

Dire se g è concava o convessa in un intorno di $x = 0$ e calcolare $g^{(4)}(0)$.
SOL. $f(x) = \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$;

$$g(x) = \cos\left(\log(1+x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right) = \cos\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)\right) =$$

$$1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4\right) + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4).$$

g è concava vicino a $x = 0$ e $g^{(4)}(0) = -\frac{4!}{12} = -2$.

---

6) Tra tutte le primitive di $\frac{e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$ calcolare quella che vale 0 in $x = 1$.
SOL.

$$\int \frac{e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}\,dx \underset{e^{-2x}=t}{\overset{\uparrow}{=}} \int -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{t} - t}\,dt = \frac{1}{4}\log|-t^2+1| + C = \frac{1}{4}\log(-e^{-4x}+1) + C.$$

Si trova poi $C = -\frac{1}{4}\log\left(1 - e^{-4}\right)$.