Ingegneria Edile

TEMA A Padova 27/8/2008

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri la funzione

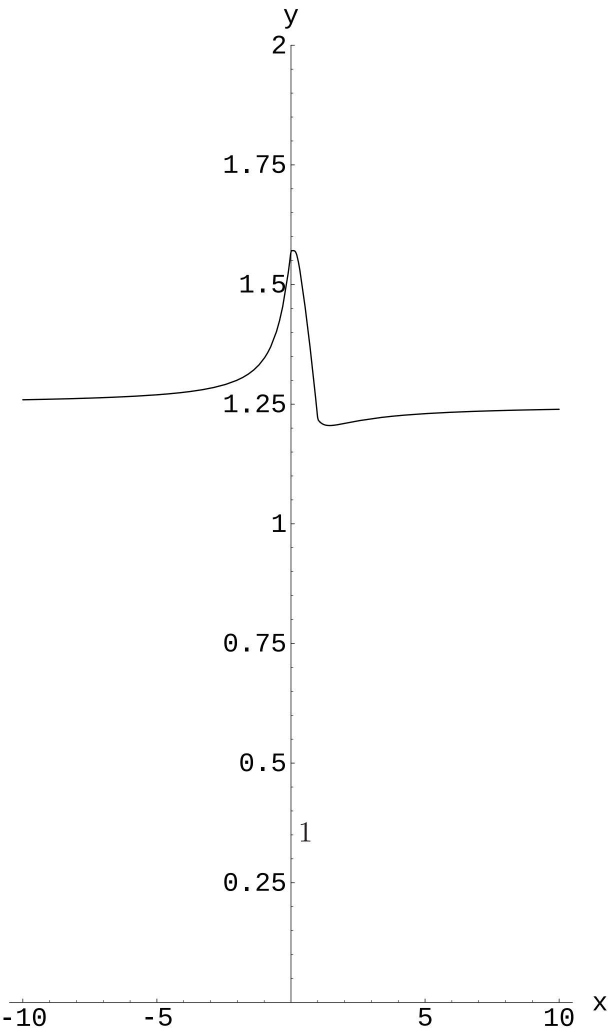
$$f(x) = \arctan\left(e^{\frac{1}{x}} + 2\left|\frac{1}{x} - 1\right|\right)$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.
b) Stabilire se esistono eventuali punti di non derivabilità.
c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x)$.
d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

SOL. Dom$f = \{x \in \mathbf{R} : \ x \neq 0\}$, $\lim_{x\to 0} f = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f = \arctan(3)$. $y = \arctan(3)$ è asintoto orizzontale. La funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1+\left(e^{\frac{1}{x}}+2\left(\frac{1}{x}-1\right)\right)^2}\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + 2\frac{1}{x^2}\right), & \text{se } 0 < x < 1, \\ -\frac{1}{1+\left(e^{\frac{1}{x}}-2\left(\frac{1}{x}-1\right)\right)^2}\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - 2\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x < 0,\ x > 1 \end{cases}$$

$f' < 0$ per $0 < x < 1$ e $1 < x < \frac{1}{\log 2}$. $x = \frac{1}{\log 2}$ è pto di minimo. $f\left(\frac{1}{\log 2}\right) = \arctan\left(4 - 2\log 2\right)$. $x = 1$ è punto di non derivabilità in quanto $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \arctan\frac{1}{1+e^2}\left(-e-2\right)$ e $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \arctan\frac{1}{1+e^2}\left(-e+2\right)$. $x = 0$ è punto di non derivabilità essendo $\lim_{x\to 0^+} f' = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} f' = -\infty$.



Esercizio 2.
Calcolare $a, b \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - (ax+b) = 0.$$

SOL. $y = ax+b$ risulta essere asintoto sinistro di $\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$. Quindi $a = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} = -1$ e $b = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x = 0$.

Esercizio 3.
a) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{2\sin x + \cos^2 x}\, dx.$$

b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$,

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\log\left(\frac{e^x+e}{2}\right) - 1}{x^\alpha - x^{-2\alpha}}.$$

SOL. a)

$$\int \frac{\cos x}{2\sin x + \cos^2 x}\, dx \underset{\sin x = t}{=} \int -\frac{1}{2t+1-t^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}-t) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log(-1+\sqrt{2}+t).$$

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{2\sin x + \cos^2 x}\, dx =$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}-\sin 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log(-1+\sqrt{2}+\sin 1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log(-1+\sqrt{2}).$$

b) Applicando la regola de L'Hospital si ottiene subito

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\log\left(\frac{e^x+e}{2}\right) - 1}{x^\alpha - x^{-2\alpha}} = \frac{1}{6\alpha}.$$

Esercizio 4. Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni di reali tali che $a_n \geq 0$ e $b_n > 0\, \forall n \in \mathbf{N}$.
Dare la definizione di

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad L \in \mathbf{R}.$$

Dimostrare che $L \geq 0$ e dedurre che se $L > 1$ allora esiste $p \in \mathbf{N}$ tale che $a_n > b_n\, \forall n \geq p$.

Esercizio 5 Siano $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ due funzioni continue. Dimostrare che se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$ allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = g(c)$. Dimostrare che la tesi è falsa se una delle due funzioni non è continua.

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile

TEMA B Padova, 24/09//2008

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{-\frac{1}{x}} + 2\left|\frac{1}{x} + 1\right|\right)$$

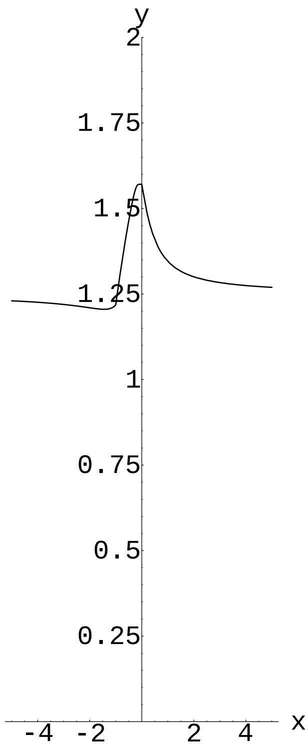
a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.
b) Stabilire se esistono eventuali punti di non derivabilità.
c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x)$.
d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

SOL. Dom$f = \{x \in \mathbf{R} : \ x \neq 0\}$, $\lim_{x\to 0} f = \pi/2$, $\lim_{x\to\pm\infty} f = \arctan(3)$. $y = \arctan(3)$ è asintoto orizzontale. La funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\left(e^{-\frac{1}{x}}-2\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)^2}\left(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + 2\frac{1}{x^2}\right), & \text{se } -1 < x < 0, \\ \frac{1}{1+\left(e^{-\frac{1}{x}}+2\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)^2}\left(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} - 2\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x < -1,\ x > 0 \end{cases}$$

$f' > 0$ per $-\frac{1}{\log 2} < x < 0$ $x = -\frac{1}{\log 2}$ è pto di minimo. $f\left(-\frac{1}{\log 2}\right) = \arctan(4 - 2\log 2)$. $x = 1$ è punto di non derivabilità in quanto $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \arctan(-e^{-1} - 2)$ e $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \arctan(-e^{-1}+2)$. $x = 0$ è punto di non derivabilità essendo $\lim_{x\to 0^-} f' =$

0 e $\lim_{x\to 0^+} f' = -\infty$.



Esercizio 2.
Calcolare $a, b \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^7-1}{x}} - (ax+b) = 0.$$

SOL. $y = ax+b$ risulta essere asintoto sinistro di $\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^7-1}{x}}$. Quindi $a = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x^7-1}{x}} = -1$ e $b = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^7-1}{x}} + x = 0$.

Esercizio 3.
a) Calcolare

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 3\cos x}\, dx.$$

b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$,

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^\alpha - x^{-2\alpha}}{\log\left(\frac{e^x+e}{2}\right) - 1}.$$

SOL.

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 3\cos x}\, dx \underset{\cos x = t}{=} \int \frac{1}{t^2-3t-1} = \frac{1}{\sqrt{13}}\log\left|t - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right| - \frac{1}{\sqrt{13}}\log\left|t - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right|.$$

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 3\cos x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{13}} \log\left|\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right| - \frac{1}{\sqrt{13}} \log\left|\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right| -$$

$\frac{1}{\sqrt{13}} \log\left|\cos 1 - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right| + \frac{1}{\sqrt{13}} \log\left|\cos 1 - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right|.$

b) Applicando la regola de L'Hospital si ottiene subito

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^\alpha - x^{-2\alpha}}{\log\left(\frac{e^x+e}{2}\right) - 1} = 6\alpha.$$

Esercizio 4. Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni di reali tali che $a_n \geq 0$ e $b_n > 0\, \forall n \in \mathbf{N}$. Dare la definizione di

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad L \in \mathbf{R}.$$

Dimostrare che $L \geq 0$ e dedurre che se $L < 1$ allora esiste $p \in \mathbf{N}$ tale che $a_n < b_n\, \forall n \geq p$.

Esercizio 5 Siano $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ due funzioni continue. Dimostrare che se $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = g(c)$. Dimostrare che la tesi è falsa se una delle due funzioni non è continua.