Ingegneria Edile

TEMA A Padova 27/8/2008

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri la funzione

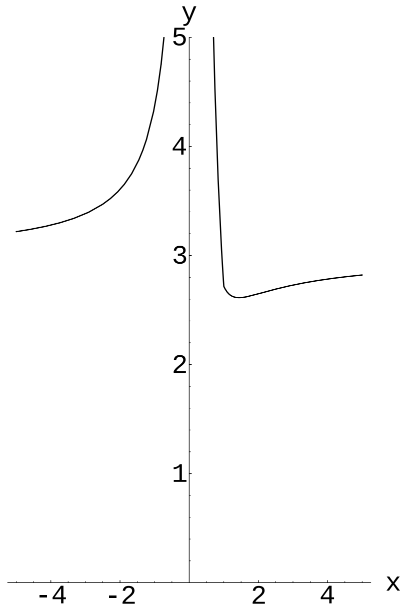
$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2\left|\frac{1}{x} - 1\right|$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.
b) Stabilire se esistono eventuali punti di non derivabilità.
c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x)$.
d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

SOL. Dom$f = \{x \in \mathbf{R} : \ x \neq 0\}$, $\lim_{x\to 0} f = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f = 3$. $y = 3$ è asintoto orizzontale, $x = 0$ è asintoto verticale.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - 2\frac{1}{x^2}, & \text{se } 0 < x < 1, \\ -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + 2\frac{1}{x^2} & \text{se } x < 0, \ x > 1 \end{cases}$$

$f' < 0$ per $0 < x < 1$ e $1 < x < \frac{1}{\log 2}$. $x = \frac{1}{\log 2}$ è pto di minimo. $f\left(\frac{1}{\log 2}\right) = 4 - 2\log 2$. $x = 1$ è punto di non derivabilità in quanto $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -e - 2$ e $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -e + 2$.



Esercizio 2.
Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 13 della funzione

$$F(x) = \int_0^x \sin^2(x^2)\, dx.$$

Determinare poi $F^{(4)}(0)$ e $F^{(5)}(0)$.

SOL. $\sin^2(x^2) = \left(x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} + o(x^{13})\right)^2 = x^4 - \frac{1}{3}x^8 + \frac{2}{45}x^{12} + 0(x^{13})$. Quindi

$$F(x) = \int_0^x x^4 - \frac{1}{3}x^8 + \frac{2}{45}x^{12} + o(x^{13})\, dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{27}x^9 + \frac{2}{45\cdot 13}x^{13} + o(x^{14}).$$

$F^{(4)}(0) = 0$ e $F^{(5)}(0) = \frac{1}{5}\cdot 5! = 4! = 24$.

Esercizio 3.
a) Calcolare

$$\int \tan^4 x\, dx.$$

b) Calcolare, al variare di $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\beta}{3^x + 4^x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

SOL. a) Per $-\pi/2 < x < \pi/2$ si ha

$$\int \tan^4 x\, dx \underset{\tan x = t}{=} \int \frac{t^4}{1+t^2}\, dt = \int t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t =$$

$\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$

b)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\beta}{3^x + 4^x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{\beta}{2+x(\log 3+\log 4)+o(x)}\right)} =$$

$$\begin{cases} +\infty, & \text{se } \beta > 2, \\ 0 & \text{se } \beta < 2, \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{se } \beta = 2. \end{cases}$$

Esercizio 4. Dimostrare (o smentire) la seguente affermazione, giustificando la risposta,

$$\log x \le \frac{x^{10}}{10} - \frac{1}{10}, \quad \forall x > 0.$$

SOL. Sia $f(x) = \log x$ e $g(x) = \frac{x^{10}}{10} - \frac{1}{10}$. Si ha $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = x^9$. Dato che $f'(x) < g'(x)$ per $x > 1$ e $f'(x) > g'(x)$ per $0 < x < 1$, la diseguaglianza è verificata per $x > 0$ dato che $f - g$ ha un massimo per $x = 1$ e $f(1) - g(1) = 0$.

Esercizio 5. Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dare la definizione di

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1.$$

Esercizio 6. Sia $0 < x < 1$ un numero reale. Si consideri $A = \{x^n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Si dimostri che $\sup A = x$ e $\inf A = 0$.

Esercizio 1. Si consideri la funzione

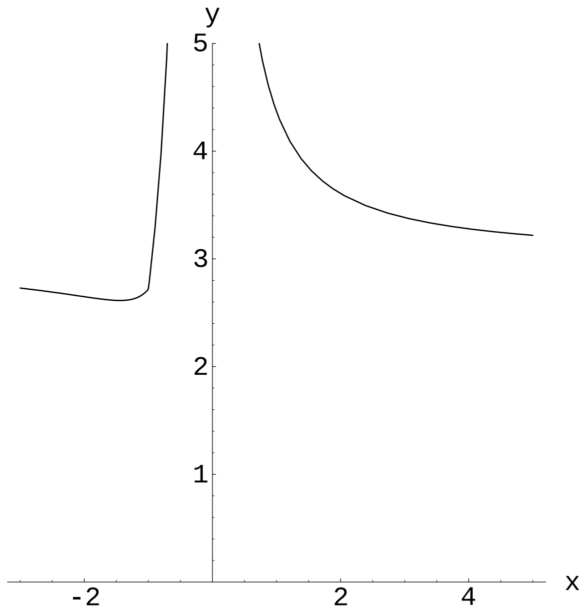
$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + 2\left|\frac{1}{x} + 1\right|$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.
b) Stabilire se esistono eventuali punti di non derivabilità.
c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x)$.
d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

SOL. Dom$f$ $= \{x \in \mathbf{R} : \ x \neq 0\}$, $\lim_{x\to 0} f = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f = 3$. $y = 3$ è asintoto orizzontale, $x = 0$ è asintoto verticale.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + 2\frac{1}{x^2}, & \text{se } -1 < x < 0, \\ \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - 2\frac{1}{x^2} & \text{se } x < -1,\ x > 0 \end{cases}$$

$f' > 0$ per $-\frac{1}{\log 2} < x < 0$ $x = -\frac{1}{\log 2}$ è pto di minimo. $f\left(-\frac{1}{\log 2}\right) = 4 - 2\log 2$. $x = 1$ è punto di non derivabilità in quanto $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -e^{-1} - 2$ e $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = -e^{-1} + 2$.



Esercizio 2.

Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 13 della funzione

$$F(x) = \int_0^x \cos^2(x^2)\, dx.$$

Determinare poi $F^{(4)}(0)$ e $F^{(5)}(0)$.

SOL. $\cos^2(x^2) = \left(1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + o(x^{13})\right)^2 = 1 - x^4 + \frac{1}{3}x^8 - \frac{2}{45}x^{12} + o(x^{13})$. Quindi

$$F(x) = \int_0^x 1 - x^4 + \frac{1}{3}x^8 - \frac{2}{45}x^{12} + o(x^{13})\, dx = x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{2}{45 \cdot 13}x^{13} + o(x^{14}).$$

$F^{(4)}(0) = 0$ e $F^{(5)}(0) = -\frac{1}{5} \cdot 5! = -4! = -24$.

Esercizio 3.
a) Calcolare

$$\int \tan^6 x\, dx.$$

b) Calcolare, al variare di $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3^x + 4^x}{\beta}\right)^{\frac{1}{x}}$$

SOL. a) Per $-\pi/2 < x < \pi/2$ si ha

$$\int \tan^6 x\, dx \underset{\tan x = t}{=} \int \frac{t^6}{1+t^2}\, dt = \int t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + t - \arctan t =$$

$\frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x$

b)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3^x + 4^x}{\beta}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{2 + x(\log 3 + \log 4) + o(x)}{\beta}\right)} =$$

$$\begin{cases} +\infty, & \text{se } \beta < 2, \\ 0 & \text{se } \beta > 2, \\ 2\sqrt{3} & \text{se } \beta = 2. \end{cases}$$

Esercizio 4. Dimostrare (o smentire) la seguente affermazione, giustificando la risposta,

$$\log x \le \frac{x^9}{9} - \frac{1}{9}, \quad \forall x > 0.$$

SOL. Sia $f(x) = \log x$ e $g(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{1}{9}$. Si ha $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = x^8$. Dato che $f'(x) < g'(x)$ per $x > 1$ e $f'(x) > g'(x)$ per $0 < x < 1$, la diseguaglianza è verificata per $x > 0$ dato che $f - g$ ha un massimo per $x = 1$ e $f(1) - g(1) = 0$.

Esercizio 5. Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dare la definizione di

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1.$$

Esercizio 6. Sia $x > 1$ un numero reale. Si consideri $A = \{x^n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Si dimostri che $\sup A = +\infty$ e $\inf A = x$.