Prova d'esame di Matematica C

Compito A

Corso di laurea in ingegneria biomedica

Facoltà di Ingegneria

12 luglio 2005

1) Data la forma

$$\omega(x,y) = Ldx + Mdy = \frac{-y}{x^2+3y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+3y^2}\,dy$$

a. È chiusa essendo $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-x^2+3y^2}{(x^2+3y^2)^2}$.

b. Se γ è l'ellisse di equazioni $x = \cos\theta,\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta,\ \theta \in [0, 2\pi]$, percorsa in senso antiorario si ha

$$\int_\gamma \omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}};$$

c. ω NON è esatta essendo l'integrale precedente positivo;

d. Se C è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 si ha $\int_C \omega = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ per la formula di Gauss - Green nel piano applicata alla regione $\Omega = \{(x,y):\ x^2+3y^2 \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 4\}$. Infatti Ω è la regione interna al cerchio C ma esterna all'ellisse γ la cui frontiera è data da γ e C.Quindi

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \omega = \int_\gamma \omega + \int_C \omega,$$

da cui il risultato.

2) Si consideri il solido S (parte di cono)

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2},\ y \geq 0\}.$$

Si calcoli il flusso uscente attraverso la frontiera di S del campo

$$F(x,y,z) = (x^3, z, y).$$

Applico il teorema della divergenza dove . Si ha

$$\text{Flusso} = \int_S \text{div}F\,dx\,dy\,dz = \int_S 3x^2\,dx\,dy\,dz \underset{\text{per fili}}{\underset{\uparrow}{=}} \int_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ y \geq 0}} 3x^2(1-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy \underset{\text{polari}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$\int_{\substack{\rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi}} 3\rho^3(1-\rho)\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{3}{40}\pi$$

COMPITO B

1) Data la forma

$$\omega(x,y) = Ldx + Mdy = \frac{y}{4x^2+y^2}\,dx + \frac{-x}{4x^2+y^2}\,dy\,dy$$

a. È chiusa essendo $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{4x^2-y^2}{(4x^2+y^2)^2}$.

b. Se γ è l'ellisse di equazioni $x = \cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, percorsa in senso orario si ha

$$\int_\gamma \omega = \pi;$$

c. ω NON è esatta essendo l'integrale precedente positivo;

d. Se C è la circonferenza di centro l'origine e raggio $1/2$ si ha $\int_C \omega = -\pi$ per la formula di Gauss - Green nel piano applicata alla regione $\Omega = \{(x,y):\ 4x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+y^2 \geq 1/4\}$. Infatti Ω è la regione interna al cerchio C ma esterna all'ellisse γ la cui frontiera è data da γ e C.Quindi

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \omega = \int_\gamma \omega + \int_C \omega,$$

da cui il risultato.

2) Si consideri il solido S (parte di cono)

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2},\ x \leq 0\}.$$

Si calcoli il flusso uscente attraverso la frontiera di S del campo

$$F(x,y,z) = (y, y^3, x).$$

Applico il teorema della divergenza dove . Si ha

$$\text{Flusso} = \int_S \mathrm{div}F\,dx\,dy\,dz = \int_S 3y^2\,dx\,dy\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per fili}}}{=} \int_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ x\geq 0}} 3y^2(1-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{polari}}}{=}$$

$$\int_{\substack{\rho\leq 1\\ \frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}}} 3\rho^3(1-\rho)\sin^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{3}{40}\pi$$