Prova d'esame di Matematica C

Compito A

Corso di laurea in ingegneria biomedica

Facoltà di Ingegneria

19 settembre 2005

SOLUZIONI

1) Sia

$$\omega(x,y) = L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy = \left(f(\frac{x}{y}) - \frac{3}{x^2}\right)dx - \frac{x^2}{y^2}\,dy$$

dove $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione $\mathcal{C}^1$,

a. imponendo $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$ si trova $f'(\frac{x}{y}) = 2$ da cui $f(\frac{x}{y}) = 2\frac{x}{y}$;

b. ω è esatta in Ω perchè Ω è semplicemente connesso e ω è chiusa;

c. un potenziale di ω è $V(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{3}{x}$;

d. sia γ la curva parametrizzarta da $r(t) = \big(1 + (\sin t)^3, 1 + (\cos t)^2\big)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$; si ha $r(0) = (1,2)$, $r(\frac{\pi}{2}) = (2,1)$ da cui $\int_\gamma \omega = V(2,1) - V(1,2) = 2$.

2) Si determini l'area della parte della superficie conica

$$S = \{(x,y,z):\ z = 1 - \sqrt{x^2+y^2},\ z \ge 0,\ y \ge \sqrt{2}/2\}.$$

Sol. Il vettore normale a S rivolto verso l'alto è dato da $N = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$ il cui modulo è $|N| = \sqrt{2}$. Quindi detta S_1 la parte di S tale che $y \ge \sqrt{2}/2$ si ha

$$\mathrm{area}S_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{area}C_1,$$

dove C_1 è la parte del cerchio $\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1\}$ tale che $y \ge \sqrt{2}/2$. Si calcola facilmente con la geometria elementare che area $C_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ e quindi

$$\mathrm{area}\,S_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

3) Si dia la definizione di forma esatta e si dimostri che una tale forma è chiusa.

COMPITO B

4) Sia

$$\omega(x,y) = L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy = -\frac{y^2}{x^2}\,dx + \left(f(\frac{y}{x}) - \frac{2}{y^2}\right)dy$$

dove $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione $\mathcal{C}^1$,

a. imponendo $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$ si trova $f'(\frac{y}{x}) = 2$ da cui $f(\frac{y}{x}) = 2\frac{y}{x}$.

b. ω è esatta in Ω perchè Ω è semplicemente connesso e ω è chiusa;

c. un potenziale di ω è $V(x,y) = \frac{y^2}{x} + \frac{2}{y}$;

d. sia γ la curva parametrizzarta da $r(t) = \big(1 + (\sin t)^3, 1 + (\cos t)^2\big)$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$; si ha $r(\frac{\pi}{2}) = (2,1)$, $r(\pi) = (1,2)$ da cui $\int_\gamma \omega = V(1,2) - V(2,1) = \frac{5}{2}$.

5) Si determini l'area della parte della superficie conica

$$S = \{(x,y,z) : \ z = \sqrt{x^2+y^2},\ z \leq 1,\ y \leq -\sqrt{2}/2\}.$$

Sol. Il vettore normale a Srivolto verso l'alto è dato da $N = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$ il cui modulo è $|N| = \sqrt{2}$. Quindi detta S_1 la parte di S tale che $y \leq -\sqrt{2}/2$ si ha

$$\text{area} S_1 = \sqrt{2}\, \text{area} C_1,$$

dove C_1 è la parte del cerchio $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ tale che $y \leq -\sqrt{2}/2$. Si calcola facilmente con la geometria elementare che area $C_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ e quindi

$$\text{area}\, S_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

6) Si dia la definizione di forma chiusa e si dimostri con un esempio che una tale forma non è necessariamente esatta.