Prova d'esame di Matematica C

Compito A

Corso di laurea in ingegneria biomedica

Facoltà di Ingegneria

5 settembre 2005

4) Si disegni il solido

$$T = \left\{ (x,y,z) \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1,\, x + \frac{1}{4} \geq \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \right\}$$

e si calcoli il flusso uscente da ∂T del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, z^2 - x, xy^2)$ (sugg.: usare il teorema della divergenza).

Sol. Per il teorema della divergenza si ha

$$\text{Flusso} = 2\text{Vol}T$$

Il calcolo del volume si fa per strati tenendo conto che la sezione T_x di T con l'asse x è data da un'ellisse

$$T_x = \begin{cases} \{(y,z) : \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq x + \frac{1}{4}\} & \text{se } -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \{(y,z) : \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 - x^2\} & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Ricordando che Area(ellisse)$=\pi ab$ dove a, b sono le lunghezze dei semiassi si ha

$$\text{Vol}T = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 6\pi(x + \frac{1}{4})\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6\pi(1 - x^2)\, dx = \frac{7}{2}\pi$$

da cui

$$\text{Flusso} = 7\pi.$$

5) Data la curva $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, \sin t)$, $t \in [0,1]$, si ha

$$\int_\gamma \sqrt{y}\, ds = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{1}{12}\left[5^{\frac{3}{2}} - 1\right],$$

S

$$\int_\gamma x\, dx + x\, dy + z\, dz = 2\sin 1 + \, 2\cos 1 - 2.$$

6) Si dia la definizione di divergenza di un campo vettoriale e si enunci il teorema della divergenza.

Prova d'esame di Matematica C

Compito B

Corso di laurea in ingegneria biomedica

Facoltà di Ingegneria

5 settembre 2005

1) Data la curva $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (2t^2, \sin t, \cos t)$, $t \in [0, \pi]$, si ha

$$\int_\gamma \sqrt{x}\, ds = \int_0^\pi \sqrt{2}t\sqrt{1+16t^2}\, dt = \sqrt{2}/48 \left[(1+16\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right],$$

e

$$\int_\gamma y\, dx + y\, dy + z\, dz = 4\int_0^\pi t \sin t\, dt = 4\pi.$$

2) Si disegni il solido

$$T = \left\{(x, y, z)\, :\, \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{25} \leq 1,\, y + \frac{1}{4} \geq \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{25}\right\}$$

e si calcoli il flusso uscente da ∂T del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + y^3, 2y, xy^2)$ (sugg.: usare il teorema della divergenza).

Sol. Si proceda come nel tema A. Qui le sezioni con l'asse y sono

$$T_y = \begin{cases} \{(x,z) : \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{25} \leq y + \frac{1}{4}\} & \text{se } -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2} \\ \{(x,z) : \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{25} \leq 1 - y^2\} & \text{se } \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Si trova

$$\text{Flusso } = \frac{35}{3}\pi.$$

3) Si dia la definizione di divergenza di un campo vettoriale e si enunci il teorema della divergenza.