

SOLUZIONI Compito A

06/09/06

- 5) (a) Si disegni il dominio $D = \{(x, z) : z \geq x^2, z \leq x + 2, x \geq 0\}$ e se ne calcoli l'area.
 (b) Si disegni il solido E ottenuto ruotando D intorno all'asse z e se ne calcoli il volume.
 (c) Si calcoli il flusso uscente dalla frontiera di E del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, y, 3z)$.
SOL. (a) Area $D = \int_0^2 x + 2 - x^2 dx = 10/3$
 (b) Per il teorema di Guldino si ha

$$VolE = 2\pi \int_D x dx dz = \frac{16}{3}\pi.$$

(c)

$$Flusso\mathbf{F} = \operatorname{div}\mathbf{F} \cdot VolE = 32\pi.$$

- 2) Sia data la forma

$$\omega(x, y, z) = \frac{1}{(y+z)} dx + \frac{(z-x)}{(y+z)^2} dy - \frac{(x+y)}{(y+z)^2} dz.$$

- a. Si dimostri che è esatta in un semipiano che contiene $(0, 0, 1)$;
 b. si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \sin t \\ z(t) = \sin^3(t) + 1 \end{cases}$$

e $0 \leq t \leq \pi$, percorsa secondo le t crescenti.

SOL.

- a. Si ha $Dom(\omega) = \{(x, y, z) : y + z \neq 0\}$. Dette L, M, N rispettivamente la prima, seconda e terza componente di ω si ha

$$L_y = M_x = -\frac{1}{(y+z)^2}, \quad L_z = N_x = -\frac{1}{(y+z)^2}, \quad M_z = N_y = \frac{2x+y-z}{(y+z)^3}.$$

Pertanto la forma è chiusa ed essendo $(0, 0, 1)$ contenuto nel semipiano $z > -y$ che è un sottoinsieme semplicemente connesso di $Dom(\omega)$ la forma è anche esatta in tale semipiano.

- b. Per il calcolo dell'integrale conviene calcolare una primitiva V di ω . Si vede facilmente che $V(x, y, z) = \frac{x-z}{y+z}$. Per $t = 0$ si ha in γ il punto $A = (0, 0, 1)$, per $t = \pi$ il punto $B = (-\pi, 0, 1)$ e

$$\int_{\gamma} \omega = V(B) - V(A) = -\pi.$$

- 3) Si dia la definizione di superficie regolare e la definizione di area di una superficie regolare.

Sol. Vedasi dispensa.

SOLUZIONI Compito B
13 luglio 2006

- 1) Sia data la forma

$$\omega(x, y, z) = \frac{y-z}{(x+y)^2} dx - \frac{(z+x)}{(x+y)^2} dy + \frac{1}{(x+y)} dz.$$

- a. Si dimostri che è esatta in un semipiano che contiene $(1, 0, 0)$;
b. si calcoli $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è la curva di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = \sin^3(t) + 1 \\ y(t) = t \sin t \\ z(t) = t \cos t \end{cases}$$

e $0 \leq t \leq \pi/2$, percorsa secondo le t crescenti.

SOL.

- a. Si ha $Dom(\omega) = \{(x, y, z) : y + x \neq 0\}$. Dette L, M, N rispettivamente la prima, seconda e terza componente di ω si ha

$$L_y = M_x = \frac{2z+x-y}{(y+x)^2}, \quad L_z = N_x = -\frac{1}{(y+x)^2}, \quad M_z = N_y = \frac{1}{(y+x)^3}.$$

Pertanto la forma è chiusa ed essendo $(1, 0, 0)$ contenuto nel semipiano $x > -y$ che è un sottoinsieme semplicemente connesso di $Dom(\omega)$ la forma è anche esatta in tale semipiano.

- b. Per il calcolo dell'integrale conviene calcolare una primitiva V di ω . Si vede facilmente che $V(x, y, z) = \frac{z-y}{y+x}$. Per $t = 0$ si ha in γ il punto $A = (1, 0, 0)$, per $t = \pi/2$ il punto $B = (2, \pi/2, 1)$ e

$$\int_{\gamma} \omega = V(B) - V(A) = -\pi/(4 + \pi).$$

- 2) (a) Si disegni il dominio $D = \{(y, z) : z \geq y^2, z \leq y + 6, y \geq 0\}$ e se ne calcoli l'area.
 (b) Si disegni il solido E ottenuto ruotando D intorno all'asse z e se ne calcoli il volume.
 (c) Si calcoli il flusso uscente dalla frontiera di E del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, 3y, z)$.
SOL. (a) $\text{Area}D = \int_0^3 y + 6 - y^2 dy = 27/2$.
 (b) Per il teorema di Guldino si ha

$$\text{Vol}E = 2\pi \int_D y dy dz = \frac{63}{2}\pi.$$

(c)

$$\text{Flusso}\mathbf{F} = \text{div}\mathbf{F} \cdot \text{Vol}E = 189\pi.$$

- 3) Si dia la definizione di curva regolare e di integrale curvilineo al differenziale d'arco.
SOL. Vedasi dispensa.