MATEMATICA C

Ingegneria Biomedica — Secondo appello — 13.7.2006

TEMA 1

4) Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \Big(\frac{y}{xy-1} - \frac{1}{(xy-1)^2}\Big)\,dx + \Big(\frac{x}{xy-1} - \frac{x^2}{(xy-1)^2}\Big)\,dy$$

nell'aperto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy - 1 < 0\}$.

(a) Si disegni Ω e si provi che ω è esatta in Ω.

(b) Si calcoli un potenziale di ω in Ω.

(c) Si calcoli $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva di parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (t^{3/2}, t^{5/2})$, $t \in [0, 1/2]$.

SOL.

(a) Dette L e M le componenti di ω si ha

$$L_y = M_x = \frac{1}{xy-1} - \frac{xy}{(xy-1)^2} + \frac{2x}{(xy-1)^3}.$$

Essendo chiusa in un semplicemente connesso è esatta.

(b) Si ottiene integrando direttamente le due componenti che un potenziale è dato da

$$V(x,y) = \log|xy-1| + \frac{x}{xy-1}.$$

(c) Si ha $A = r(0) = (0,0)$ e $B = r(1/2) = (1/2\sqrt{2}, 1/4\sqrt{2})$ da cui

$$\int_\gamma \omega = V(B) - V(A) = \log\frac{15}{16} + \frac{8}{15\sqrt{2}}.$$

5) a) Calcolare il flusso di

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+z, 2y, z)$$

uscente dalla frontiera del solido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2 + y^2 \le 2y, \quad 0 \le z \le 4\}.$$

b) Ritrovare il risultato precedente applicando il Teorema della Divergenza.

SOL. a)Il solido è un cilindro con base il cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1. Con coordinate polari con centro in $(0,1)$, l'equazione parametrica della superficie laterale S è

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta, \\ y &= 1 + \sin\theta, \\ z &= z \end{aligned}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 4$. La normale è data da $n = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ da cui il flusso attraverso la superficie laterale è

$$Fl_S = \int_S F \cdot n \, d\sigma = \int_{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 4} \cos^2\theta + z\cos\theta + 2\sin\theta + 2\sin^2\theta \, d\theta \, dz = 12\pi.$$

Si vede che il flusso attraverso la base sul piano $z = 0$ è nullo (essendo la terza componente d F nulla su tale piano) mantre sul piano $z = 4$ si ha

$$Fl_{z=4} = \int_{x^2+y^2 \leq 2y, \ z=4} F \cdot (0,0,1) = \int_{x^2+y^2 \leq 2y} 4 \, dx \, dy = 4\pi.$$

Quindi

$$Fl_{\partial E} = 12\pi + 4\pi = 16\pi.$$

b) Si ha $\mathrm{Div}F = 4$, $\mathrm{Vol}E = 4\pi$ e quindi per Gauss

$$Fl_{\partial E} = 4\pi 4 = 16\pi.$$

6) Si dia la definizione di superficie regolare e si dia la definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

TEMA 2

1) Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \Big(\frac{y}{xy+1} + \frac{1}{(xy+1)^2}\Big) dx + \Big(\frac{x}{xy+1} - \frac{x^2}{(xy+1)^2}\Big) dy$$

nell'aperto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, xy + 1 > 0\}$.

(a) Si disegni Ω e si provi che ω è esatta in Ω.
(b) Si calcoli un potenziale di ω in Ω.
(c) Si calcoli $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva di parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (t^{5/2}, t^{3/2})$, $t \in [0, 1/2]$.

SOL.

(a) Dette L e M le componenti di ω si ha

$$L_y = M_x = \frac{1}{xy+1} - \frac{xy}{(xy+1)^2} - \frac{2x}{(xy+1)^3}.$$

Essendo chiusa in un semplicemente connesso è esatta.

(b) Si ottiene integrando direttamente le due componenti che un potenziale è dato da

$$V(x,y) = \log|xy+1| + \frac{x}{xy+1}.$$

(c) Si ha $A = r(0) = (0,0)$ e $B = r(1/2) = (1/4\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2})$ da cui

$$\int_\gamma \omega = V(B) - V(A) = \log\frac{17}{16} + \frac{2\sqrt{2}}{17}.$$

a) Calcolare il flusso di

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x, y - z, z)$$

uscente dalla frontiera del solido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 2x, \quad 0 \leq z \leq 9\}.$$

b) Ritrovare il risultato precedente applicando il Teorema della Divergenza.

SOL. a)Il solido è un cilindro con base il cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1. Con coordinate polari con centro in $(1,0)$, l'equazione parametrica della superficie laterale S è

$$\begin{aligned} x &= 1 + \cos\theta, \\ y &= \sin\theta, \\ z &= z \end{aligned}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 9$. La normale è data da $n = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ da cui il flusso attraverso la superficie laterale è

$$Fl_S = \int_S F \cdot n \, d\sigma = \int_{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 9} 3\cos^2\theta + 3\cos\theta - z\sin\theta + \sin^2\theta \, d\theta \, dz = 36\pi.$$

Si vede che il flusso attraverso la base sul piano $z = 0$ è nullo (essendo la terza componente d F nulla su tale piano) mentre sul piano $z = 9$ si ha

$$Fl_{z=9} = \int_{x^2+y^2 \leq 2x, \; z=9} F \cdot (0,0,1) = \int_{x^2+y^2 \leq 2x} 9 \, dx \, dy = 9\pi.$$

Quindi

$$Fl_{\partial E} = 36\pi + 9\pi = 45\pi.$$

b) Si ha $\mathrm{Div} F = 5$, $\mathrm{Vol} E = 9\pi$ e quindi per Gauss

$$Fl_{\partial E} = 9\pi 5 = 45\pi.$$

3) Si dia la definizione di superficie regolare e la definizione di area di una superficie regolare.