MATEMATICA C
Ingegneria Biomedica — Primo appello
26.6.2006
SOLUZIONI Tema 1

1) Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

a. si dimostri che è chiusa;

b. si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ è la circonferenza $x^2+y^2=R^2$, percorsa in senso antiorario;

c. si deduca da a. e b. che ω è esatta;

d. si calcoli una primitiva di ω.

SOL.

a. ω è chiusa in quanto detta $\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$ si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

b. γ ha equazioni

$$x(t) = R\cos t,\\ y(t) = R\sin t$$

con $0 \le t \le 2\pi$; si ha

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

c. Poichè l'integrale su una circonferenza attorno all'origine (punto dove ω non è definita) è nullo e poichè ω è chiusa la forma ω risulta esatta ;

d. Si vede che integrando F_1 rispetto ad x si ottiene $V(x,y) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^2} + f(y)$, derivando e imponendo che $V_y = F_2$ si ha $f'(y) = 0$ da cui $V(x,y) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^2} + C$.

2)

Si consideri il semicerchio C intersezione del semipiano di equazione $z = 3y$, $z \ge 0$, con la semisfera $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, $z \ge 0$. Sia D la proiezione di tale semicerchio sul piano $z = 0$.

a. Si disegni il semicilindro di base D, limitato superiormente da C;

b. si calcoli il volume di tale semicilindro.

SOL. Sostituendo $z = 3y$ nell'equazione della sfera si ottiene in $\mathbf{R}^3$ il cilindro di base ellittica $x^2+10y^2 = R^2$ che ha per proiezione sul piano $z = 0$ la curva $x^2+10y^2 = R^2$. Quindi $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+10y^2 \le R^2, y \ge 0\}$ e

$$Volume = \int_D 3y\,dx\,dy.$$

Con il cambio di coordinate $x = \rho\cos t,\ y = \frac{\rho}{\sqrt{10}}\sin t$ di deteminante Jacobiano $\frac{\rho}{\sqrt{10}}$ si ottiene

$$\int_D 3y\,dx\,dy = \int_{\{(\rho,t):0\le\rho\le R,\ 0\le t\le\pi\}} \frac{3}{10}\rho^2 \sin t\,d\rho\,dt = \frac{R^3}{5}.$$

3) Si dimostri la formula di Green-Gauss

$$\int_{\Omega} f_y(x,y)\,dx\,dy = -\int_{\partial\Omega} f(x,y)\,dx$$

nel caso in cui Ω sia un dominio normale rispetto all'asse x.

SOL. Vedasi testo.

Tema 2

4) Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

a. si dimostri che è chiusa;

b. si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ è la circonferenza $x^2+y^2 = R^2$ percorsa in senso antiorario;

c. si deduca da a. e b. che ω è esatta;

d. si calcoli una primitiva di ω.

SOL.

a. È chiusa in quanto detta $\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$ si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-2y^3 + 6yx^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

b. γ ha equazioni

$$x(t) = R\cos t,$$
$$y(t) = R\sin t$$

con $\pi/2 \le t \le 2\pi$; si ha

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

c. Poichè l'integrale su una circonferenza attorno all'origine (punto dove ω non è definita) è nullo e poichè ω è chiusa la forma ω risulta esatta ;

d. Si vede che integrando rispetto ad y la F_2 si ottiene $V(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2} + f(x)$, derivando e imponendo che $V_x = F_1$ si ha $f'(x) = 0$ da cui $V(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2} + C$.

2) Si consideri il semicerchio C intersezione del semipiano di equazione $z = 2x$, $z \ge 0$, con la semisfera $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, $z \ge 0$. Sia D la proiezione di tale semicerchio sul piano $z = 0$. Si calcoli il volume del semicilindro di base D, limitato superiormente da C.

SOL. Sostituendo $z = 2x$ nell'equazione della sfera si ottiene in si ottiene in $\mathbf{R}^3$ il cilindro di base ellittica $5x^2+y^2 = R^2$. che ha per proiezione sul piano $z = 0$ la curva $5x^2+y^2 = R^2$. Quindi $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 5x^2+y^2 \le R^2, x \ge 0\}$ e

$$Volume = \int_D 2x\,dx\,dy.$$

Con il cambio di coordinate $x = \frac{1}{\sqrt{5}}\rho\cos t,\ y = \sin t$ di deteminante Jacobiano $\frac{\rho}{\sqrt{5}}$ si ottiene

$$\int_D 2x\,dx\,dy = \int_{\{(\rho,t):0\le\rho\le R,\ -\pi/2\le t\le\pi/2\}} \frac{2\rho^2}{5}\cos t\,d\rho\,dt = \frac{4}{15}R^3.$$

6) Si dimostri la formula di Green-Gauss

$$\int_\Omega f_y(x,y)\,dx\,dy = -\int_{\partial^+\Omega} f(x,y)\,dx$$

nel caso in cui Ω sia un dominio della forma

$$\Omega = \{(x,y):\ a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\},$$

con $\phi_1,\ \phi_2 \in \mathcal{C}^1([a,b])$, specificando sotto quali ipotesi su f e Ω è valida in generale.

SOL. Vedasi testo.