

III appello di Matematica C, Tema 1

Corso di laurea in Ingegneria Biomedica

4 Settembre 2007

4) Si consideri la curva γ parametrizzata da

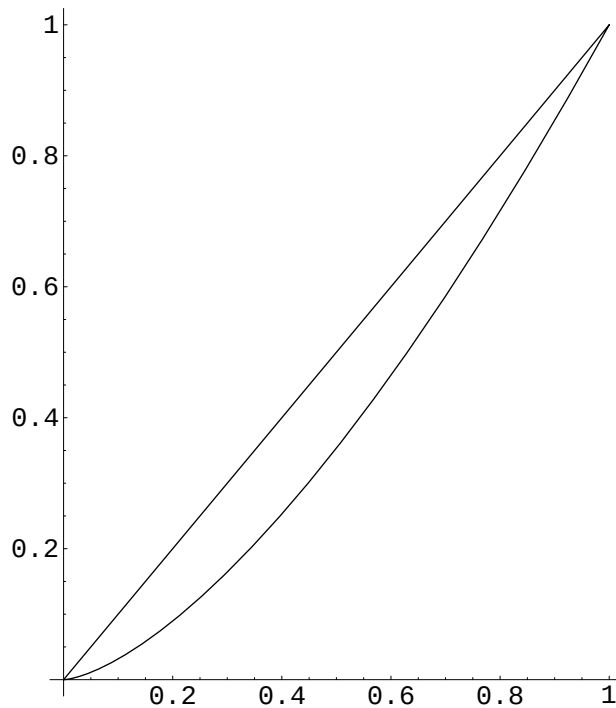
$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (t^2, t^3) & \text{per } t \in [0, 1] \\ (2-t, 2-t) & \text{per } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

- a. Si abbozzi un disegno di γ e se ne calcoli la lunghezza;
- b. date le forme differenziali

$$\omega_1 = y \, dx - x \, dy \quad \text{e} \quad \omega_2 = y \cos(xy) e^{\sin(xy)} \, dx + x \cos(xy) e^{\sin(xy)} \, dy,$$

si calcolino $\int_{\gamma} \omega_1$ e $\int_{\gamma} \omega_2$.

SOL. a) Si tratta di un segmento e di un arco della curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ tra i punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.



La lunghezza dell'arco di curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ è data da

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \frac{1}{27} [13\sqrt{13} - 8].$$

Quindi la lunghezza di γ è data da $\sqrt{2} + \frac{1}{18} [13\sqrt{13} - 8]$.

b)

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_0^1 t^3 2t - t^2 3t^2 \, dt = -1/5$$

$$\int_{\gamma} \omega_2 = 0.$$

5) Si determini il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (1 - z, 1 - z, x^2 - (x + y))$ uscente dalla superficie conica

$$S = \{(x, y, z) : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z > 0\}.$$

Si ritrovi lo stesso risultato usando il teorema della divergenza.

SOL. La normale rivolta verso l'alto alla superficie è data da $n = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1)$. Quindi il flusso richiesto che indichiamo con Φ_1 è dato da

$$\Phi_1 = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x^2 - x - y \, dx \, dy = \int_{x^2 + y^2 \leq 1} x^2 \, dx \, dy = \pi/4.$$

Dato che $\text{div} \mathbf{F} = 0$, detto Φ_2 il flusso uscente attraverso la base del cono si ha $\Phi_1 + \Phi_2 = 0$ e dato che su tale base $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ si ha

$$\Phi_2 = \int_{x^2 + y^2 \leq 1} -x^2 + x + y \, dx \, dy = -\pi/4.$$

6) Si dia la definizione di superficie regolare con bordo e di bordo orientato positivamente. Si enunci il teorema di Stokes.