II appello di Matematica C

Compito A

Corso di laurea in ingegneria biomedica

Facoltà di Ingegneria

SOLUZIONI

05 Luglio 2007

1) Data la forma differenziale

$$\omega = \phi(x^2 + y^2) \left[(x - x^2 - y^2)\, dx + y\, dy\right],$$

dove $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$,

a. si determini ϕ in modo che la forma sia chiusa;

b. si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ è la circonferenza $x^2 + y^2 = R^2$, percorsa in senso antiorario;

c. si deduca da a. e b. che ω è esatta;

d. si calcoli una primitiva di ω.

SOL. a) Detta $\omega = F_1\, dx + F_2\, dy$, da $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ si ha $(x^2 + y^2)\phi' = -\phi$ da cui $\frac{\phi'}{\phi} = -\frac{1}{x^2+y^2}$ e integrando si ha $\phi = \frac{1}{x^2+y^2}$ e

$$\omega = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - 1\right) dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy.$$

b) Si ha γ di equazioni parametriche $x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$, da cui

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} -\frac{R^2 \cos\theta \sin\theta}{R^2} + R\sin\theta + \frac{R^2 \sin\theta \cos\theta}{R^2}\, d\theta = 0.$$

c) facile
d) Una primitiva

$$V(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2}) - x.$$

2) Si consideri l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ 0 \le y \le \frac{2}{3}x^2\}.$$

a. Si scriva D in coordinate polari.

b. Si calcoli
$$\int_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

SOL. La parabola e la circonferenza si intersecano in $(\sqrt{3}/2, 1/2)$. In coordinate polari D corrisponde a $D' = \{(\rho,\theta) : 0 \le \theta \le \pi/6,\ \frac{3}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \le \rho \le 1\}$. Si ha

$$\int_D \tfrac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta}}{=} \int_{D'} \cos\theta\,d\theta\,d\rho = \int_0^{\pi/6} \cos\theta - \tfrac{3}{2}\tfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\log\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) Si dimostri la formula di Green-Gauss
$$\int_\Omega f_x(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial^+\Omega} f(x,y)\,dy$$
nel caso in cui Ω sia un dominio della forma
$$\Omega = \{(x,y) :\ a \le y \le b,\ \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\},$$
con $\phi_1,\ \phi_2 \in \mathcal{C}^1([a,b])$, specificando sotto quali ipotesi su f e Ω è valida in generale.

Compito B

4) Data la forma differenziale
$$\omega = \phi(x^2+y^2)\left[x\,dx + (y - x^2 - y^2)\,dy\right],$$
dove $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$,

a. si determini ϕ in modo che la forma sia chiusa;

b. si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ è la circonferenza $x^2+y^2 = R^2$, percorsa in senso antiorario;

c. si deduca da a. e b. che ω è esatta;

d. si calcoli una primitiva di ω.

SOL. a) Detta $\omega = F_1\,dx + F_2\,dy$, da $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ si ha $\frac{\phi'}{\phi} = -\frac{1}{x^2+y^2}$ da cui integrando si ha $\log\phi = -\log(x^2+y^2)$ che implica $\phi = \frac{1}{x^2+y^2}$ e
$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dy.$$

b) Si ha γ di equazioni parametriche $x = R\cos\theta,\quad y = R\sin\theta$, da cui
$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{R^2\cos\theta\sin\theta}{R^2} - R\cos\theta - \frac{R^2\sin\theta\cos\theta}{R^2}\,d\theta = 0.$$

c) facile

d) Una primitiva

$$V(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2}) - y.$$

5) Si consideri l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq 1, \, y \geq 0, \; 0 \leq x \leq \frac{2}{3}y^2\}.$$

a. Si scriva D in coordinate polari.

b. Si calcoli

$$\int_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

SOL. La parabola e la circonferenza si intersecano in $(1/2, \sqrt{3}/2)$. In coordinate polari D corrisponde a $D' = \{(\rho,\theta) : \; \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2, \; \frac{3}{2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \leq \rho \leq 1\}$. Si ha

$$\int_D \tfrac{x}{x^2+y^2}\, dx\, dy \underset{\substack{\uparrow \\ x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta}}{=} \int_{D'} \sin\theta \, d\theta \, d\rho = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\theta - \tfrac{3}{2}\tfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\log\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

6) Si dimostri la formula di Green-Gauss

$$\int_\Omega f_y(x,y)\, dx\, dy = -\int_{\partial^+\Omega} f(x,y)\, dx$$

nel caso in cui Ω sia un dominio della forma

$$\Omega = \{(x,y) : \; a \leq x \leq b, \; \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

con $\phi_1, \; \phi_2 \in \mathcal{C}^1([a,b])$, specificando sotto quali ipotesi su f e Ω è valida in generale.