

SOLUZIONI

18 settembre 2007

4) Si disegni l'insieme

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, y < 0, 0 \leq z \leq \frac{3}{2} \right\}$$

e si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint_D z \cos[\pi z(x^2 + y^2)] dx dy dz.$$

SOL. Si tratta di metà cilindro. Si integra per strati con un cambio di variabili polari

$$\begin{aligned} \int_D z \cos[\pi z(x^2 + y^2)] dx dy dz &= \\ \int_0^{\frac{3}{2}} z dz \int_{0 \leq \rho \leq 3, \pi \leq \theta \leq 2\pi} \cos[\pi z \rho^2] \rho d\rho d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}} \sin(9\pi z) dz = \frac{1}{18\pi}. \end{aligned}$$

5) Sia dato il campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, x, y)$.

a. Si dica se è conservativo.

Non è conservativo essendo $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \neq 1 \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

b. Si calcoli $\int_{\gamma_1} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$, dove $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ e γ_1 è la circonferenza sul piano $z = 0$ di equazione $x^2 + y^2 = 9$ percorsa in senso antiorario.

L'equazione di γ_1 è $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 0$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_0^{2\pi} -27 \cos^2 t \sin t + 9 \cos^2 t dt = 9\pi.$$

c. Si calcoli $\int_{\gamma_2} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ dove $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ e γ_2 è la curva di equazioni parametriche $\mathbf{r}(t) = (t, 2t, t)$, $t \in [0, 1]$.

$$\int_{\gamma_2} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_0^1 t^2 + 4t dt = \frac{7}{2}.$$

d. (Facoltativo) Si calcoli il rotore di \mathbf{F} e si calcoli l'integrale del punto b) usando il teorema di Stokes.

6) Si dia la definizione di forma esatta e di forma chiusa. Si dimostri che ogni forma esatta è chiusa ma che il viceversa non è vero.