

I appello di Matematica C, Compito A
Corso di laurea in Ingegneria Biomedica, Facoltà di
Ingegneria

19 Giugno 2007

SOLUZIONI

1) Calcolare

$$\int_D \sqrt{|2x - y|} \, dx \, dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 3\}$.

SOL. Si ha

$$\sqrt{|2x - y|} = \begin{cases} \sqrt{2x - y} & \text{se } y \leq 2x, \\ \sqrt{-2x + y} & \text{se } y > 2x. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_D \sqrt{|2x - y|} \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{-3}^{2x} \sqrt{2x - y} \, dy + \int_{-1}^1 dx \int_{2x}^3 \sqrt{-2x + y} \, dy = \\ &= \int_{-1}^1 \left[-\frac{2}{3}(-y + 2x)^{3/2} \right]_{y=-3}^{y=2x} dx + \int_{-1}^1 \left[\frac{2}{3}(y - 2x)^{3/2} \right]_{y=2x}^{y=3} dx = \\ &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (3 + 2x)^{3/2} + (3 - 2x)^{3/2} dx = \frac{2}{15} [(3 + 2x)^{5/2} - (3 - 2x)^{5/2}]_{-1}^1 = \\ &= \frac{4}{15} 5^{5/2} - \frac{4}{15} = \frac{4}{3} 5^{3/2} - \frac{4}{15} \end{aligned}$$

2) Si considerino l'aperto $\Omega = \{(x, y) : y < x^2\}$ e la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{2x}{x^2 - y} - y \cos(xy) \right) dx + \left(\frac{-1}{x^2 - y} - x \cos(xy) - 1 \right) dy.$$

- a) Si disegni Ω e si dica se è convesso, connesso, semplicemente connesso;
- b) si provi che ω è esatta in Ω e se ne calcoli un potenziale;
- c) si calcoli l'integrale $\int_{\gamma} \omega$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = \left(1 + \frac{\sinh(t^2)}{\sinh 1}, \cos(\pi(t^2 + 1)) \right), \quad t \in [0, 1].$$

SOL. a) Ω non è convesso, è connesso e semplicemente connesso.

b) Indicando con $F_1 = \frac{2x}{x^2 - y} - y \cos(xy)$ e $F_2 = \frac{-1}{x^2 - y} - x \cos(xy) - 1$ si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{2x}{(x^2 - y)^2} - \cos(xy) + xy \sin(xy).$$

La forma è chiusa in un semplicemente connesso quindi è esatta. Un potenziale in Ω è dato da

$$V(x, y) = \log(x^2 - y) - \sin(xy) - y.$$

c) Si ha $r(0) = (1, -1)$ e $r(1) = (2, 1)$ e $r(0), r(1) \in \Omega$. Quindi

$$\int_{\gamma} \omega = V(r(1)) - V(r(0)) = \log \frac{3}{2} - \sin 2 - \sin 1 - 2.$$

3) Sul semipiano xy , $x > 0$ sia data la curva cartesiana $y = g(x)$ con $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Si consideri la superficie ottenuta dalla rotazione di tale curva attorno all'asse delle y . Si scriva l'equazione parametrica di tale superficie e se ne calcoli l'area.

SOL. Sia γ la curva sul piano xy . Sia $P(x, g(x), 0)$ un punto della curva che ruota attorno all'asse y . Sia $A(0, g(x), 0)$ e $P'(x', y', z')$ il punto ottenuto dalla rotazione di P con centro in A . Sia θ l'angolo formato da AP' con AP . Si ha $|AP| = |AP'| = x$ e l'equazione della superficie S è

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta \\ y' &= y = g(x) \\ z' &= x \sin \theta \end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $a \leq x \leq b$. Il vettore normale $N(xg' \cos \theta, -x, xg' \sin \theta)$ e $|N| = x\sqrt{1 + g'^2}$,

$$Area = \int_S d\sigma = \int_{\theta \in [0, 2\pi], x \in [a, b]} x\sqrt{1 + g'^2} dx d\theta = 2\pi \int_{\gamma} x ds = 2\pi x_B l(\gamma)$$

dove x_B è la prima ccordinata del baricentro di γ e $l(\gamma)$ la lunghezza di γ .

Compito B SOLUZIONI

1) Calcolare

$$\int_D \sqrt{|x + 2y|} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 3\}$.

SOL. Si ha

$$\sqrt{|2x + y|} = \begin{cases} \sqrt{2x + y} & \text{se } y \geq -x/2, \\ \sqrt{-2x - y} & \text{se } y < -x/2. \end{cases}$$

Quindi

$$\int_D \sqrt{|2x - y|} dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-3}^{-x/2} \sqrt{-2y - x} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-x/2}^3 \sqrt{2y + x} dy =$$

$$\int_{-1}^1 -\frac{1}{3}(-2y - x)^{3/2} \Big|_{y=-3}^{y=-x/2} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}(2y + x)^{3/2} \Big|_{y=-x/2}^{y=3} dx =$$

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^1 (6 - x)^{3/2} + (6 + x)^{3/2} dx = \frac{2}{15} [(6 + x)^{5/2} - (6 - x)^{5/2}]_{-1}^1 =$$

$$\frac{4}{15} (7^{5/2} - 5^{5/2})$$

2) Si considerino l'aperto $\Omega = \{(x, y) : x > -y^2\}$ e la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{1}{y^2 + x} + y \sin(xy) + 1 \right) dx + \left(\frac{2y}{y^2 + x} + x \sin(xy) \right) dy.$$

- a) Si disegni Ω e si dica se è convesso, connesso, semplicemente connesso;
 b) si provi che ω è esatta in Ω e se ne calcoli un potenziale;
 c) si calcoli l'integrale $\int_{\gamma} \omega$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = \left(\cosh(t^2)/\cosh 1, \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \right), \quad t \in [0, 1].$$

SOL. a) Ω non è convesso, è connesso e semplicemente connesso.

b) Indicando con $F_1 = \frac{1}{y^2+x} + y \sin(xy) + 1$ e $F_2 = \frac{2y}{y^2+x} + x \sin(xy)$ si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{2y}{(y^2+x)^2} + \sin(xy) + xy \cos(xy).$$

La forma è chiusa in un semplicemente connesso quindi è esatta. Un potenziale in Ω è dato da

$$V(x, y) = \log(x + y^2) - \cos(xy) + x.$$

c) Si ha $r(0) = (1/\cosh 1, 0)$ e $r(1) = (1, 1)$ e $r(0), r(1) \in \Omega$. Quindi

$$\int_{\gamma} \omega = V(r(1)) - V(r(0)) = \log(2 \cosh 1) - 1/\cosh 1 - \cos 1 + 2.$$

3) Sul semipiano xy , $y > 0$ sia data la curva cartesiana $x = g(y)$ con $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Si consideri la superficie ottenuta dalla rotazione di tale curva attorno all'asse delle x . Si scriva l'equazione parametrica di tale superficie e se ne calcoli l'area.

SOL. Sia γ la curva sul piano xy . Sia $P(g(y), y, 0)$ un punto della curva che ruota attorno all'asse x . Sia $A(g(y), 0, 0)$ e $P'(x', y', z')$ il punto ottenuto dalla rotazione di P con centro in A . Sia θ l'angolo formato da AP' con AP . Si ha $|AP| = |AP'| = y$ e l'equazione della superficie S è

$$\begin{aligned} x' &= g(y) \\ y' &= y \cos \theta \\ z' &= y \sin \theta \end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $a \leq y \leq b$. Il vettore normale $N(y, -g'y \cos \theta, -g'y \sin \theta)$ e $|N| = y\sqrt{1 + g'^2}$,

$$Area = \int_S d\sigma = \int_{\theta \in [0, 2\pi], y \in [a, b]} y\sqrt{1 + g'^2} dy d\theta = 2\pi \int_{\gamma} y ds = 2\pi y_B l(\gamma)$$

dove y_B è la seconda coordinata del baricentro di γ e $l(\gamma)$ la lunghezza di γ .