

Primo Appello di Matematica C, Analisi Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica 7 Luglio 2008	Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____
--	---

Tema A

Esercizio 1. Si consideri la forma

$$\omega = \frac{x + By}{x^2 + y^2} dx + \frac{Cx + y}{x^2 + y^2} dy,$$

con B, C numeri reali, definita su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- a) Determinare tutti i valori di B e C tali che ω sia chiusa;
- b) Per tali valori provare che ω è esatta in $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ e calcolarne un potenziale;
- c) Per i valori di B, C di cui al punto a) determinare l'integrale curvilineo di ω sulla circonferenza unitaria, percorsa in senso antiorario;
- d) Dedurre da c) i valori di B, C per cui ω è esatta in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Soluzione. a) Imponendo che sia chiusa si trova $B(x^2 - y^2) = -C(x^2 - y^2)$ da cui $B = -C$.

b) ω è esatta essendo chiusa e Ω un convesso e quindi semplicemente connesso. Un potenziale è dato da

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + B \arctan \frac{x}{y}.$$

c) Si deve calcolare $\int_{\gamma} \omega$ con γ la curva di equazioni $x = \cos t$, $y = \sin t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = -2\pi B.$$

d) Perchè ω sia chiusa deve essere $B = 0$ e quindi $C = 0$.

Esercizio 2. Data la superficie Σ parametrizzata da

$$\mathbf{r}(\vartheta, z) = (\sqrt{1 + 2z^2} \cos \vartheta, \sqrt{1 + 2z^2} \sin \vartheta, z), \quad -\pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/4, -1 \leq z \leq 1,$$

si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (1/\sqrt{1 + 2z^2}, 1/\sqrt{1 + 2z^2}, x^2 + y^2)$ attraverso Σ , orientata in modo che nel punto $(1, 0, 0)$ il versore normale coincida con $(1, 0, 0)$.

Soluzione.

Si trova

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\theta} &= (-\sqrt{1 + 2z^2} \sin \theta, \sqrt{1 + 2z^2} \cos \theta, 0) \\ \mathbf{r}_z &= \left(\frac{2z}{\sqrt{1 + 2z^2}} \cos \theta, \frac{2z}{\sqrt{1 + 2z^2}} \sin \theta, 1 \right) \end{aligned}$$

da cui la normale è

$$N = \mathbf{r}_{\theta} \wedge \mathbf{r}_z = (\sqrt{1 + 2z^2} \cos \theta, \sqrt{1 + 2z^2} \sin \theta, -2z).$$

Il flusso

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\substack{-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4 \\ -1 \leq z \leq 1}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\theta \, dz = \int_{\substack{-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4 \\ -1 \leq z \leq 1}} \cos \theta + \sin \theta - 2z(1 + 2z^2) \, d\theta \, dz = 2\sqrt{2}.$$

Esercizio 3 (Domanda teorica di analisi). Dare la definizione di curva regolare γ in $\mathbf{R}^n$ e di integrale curvilineo di prima specie $\int_{\gamma} f \, ds$. Dimostrare che tale integrale non dipende dall'orientamento di γ .

Tema B

Esercizio 4. Si consideri la forma

$$\omega = \frac{-x + By}{x^2 + y^2} dx + \frac{Cx - y}{x^2 + y^2} dy,$$

con B, C numeri reali, definita su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- a) Determinare tutti i valori di B e C tali che ω sia chiusa;
- b) Per tali valori provare che ω è esatta in $\Omega = \{(x, y) : x < 0, y > 0\}$ e calcolarne un potenziale;
- c) Per i valori di B, C di cui al punto a) determinare l'integrale curvilineo di ω sulla circonferenza unitaria, percorsa in senso antiorario;
- d) Dedurre da c) i valori di B, C per cui ω è esatta in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Soluzione. a), c), d) Vedasi Tema A.

b) Un potenziale è dato da

$$V(x, y) = -\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + B \arctan \frac{x}{y}.$$

Esercizio 5. Data la superficie Σ parametrizzata da

$$\mathbf{r}(\vartheta, z) = (\sqrt{1 + 3z^2} \cos \vartheta, \sqrt{1 + 3z^2} \sin \vartheta, z), \quad \pi/4 \leq \vartheta \leq 3\pi/4, -1 \leq z \leq 1,$$

si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (1/\sqrt{1 + 3z^2}, 1/\sqrt{1 + 3z^2}, x^2 + y^2)$ attraverso Σ , orientata in modo che nel punto $(0, 1, 0)$ il versore normale coincida con $(0, 1, 0)$.

Soluzione.

Si trova

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta &= (-\sqrt{1 + 3z^2} \sin \theta, \sqrt{1 + 3z^2} \cos \theta, 0) \\ \mathbf{r}_z &= \left(\frac{3z}{\sqrt{1 + 3z^2}} \cos \theta, \frac{3z}{\sqrt{1 + 3z^2}} \sin \theta, 1 \right) \end{aligned}$$

da cui la normale è

$$N = \mathbf{r}_\theta \wedge \mathbf{r}_z = \left(\sqrt{1 + 3z^2} \cos \theta, \sqrt{1 + 3z^2} \sin \theta, -3z \right).$$

Il flusso

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}} \int_{-1 \leq z \leq 1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\theta \, dz = \int_{\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}} \int_{-1 \leq z \leq 1} (\cos \theta + \sin \theta - 3z(1 + 3z^2)) \, d\theta \, dz = 2\sqrt{2}.$$

Esercizio 6 (Domanda teorica di analisi). Dare la definizione di forma differenziale ω associata a un campo vettoriale in $\mathbf{R}^n$ e di integrale curvilineo di seconda specie $\int_{\gamma} \omega$. Dimostrare che tale integrale dipende dall'orientamento di γ .