Terzo Appello di Matematica C, Analisi	Cognome: ____________________
Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica	Nome: ____________________
8 Settembre 2008	Matricola: ____________________

Tema A

Esercizio 1. Sia γ la curva frontiera dell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : \; x^2+y^2 \leq 4, \; y \geq \frac{\sqrt{3}}{x}, \; x > 0\}$ orientata in senso delle x decrescenti. Sia $\omega = \frac{x}{\sqrt{y+x}}\, dx - \frac{2y+x}{\sqrt{y+x}}\, dy$.

a) Si calcoli $\int_\gamma \omega$.

b) Si calcoli $\int_\gamma x\, dy - y\, dx$ e se ne deduca l'area di D.

SOL. a) Si tratta di una forma esatta (si controlla facilmente che è chiusa ed è definita sul semipiano $y > -x$) e la curva γ è chiusa ed è contenuta in tale semipiano. Quindi $\int_\gamma \omega = 0$.

b) Le due curve frontiera di D si incontano in $A(1, \sqrt{3})$ e $B(\sqrt{3}, 1)$. Sia γ_1 l'arco di circonferenza $y = \sqrt{4-x^2}$ per $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ orientato in senso antiorario e γ_2 l'arco di iperbole $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ per $1 \leq x \leq \sqrt{3}$. Si ha

$$\int_{\gamma_1} x\, dy - y\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{1} x\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) - \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{1} -\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = 4 \arccos \frac{1}{2}x \Big]_{\sqrt{3}}^{1} = \frac{2}{3}\pi.$$

$$\int_{\gamma_2} x\, dy - y\, dx = \int_{1}^{\sqrt{3}} x\left(-\frac{\sqrt{3}}{x^2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{x}\, dx = -2\sqrt{3}\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x}\, dx = -\sqrt{3}\log 3.$$

Quindi

$$\int_\gamma x\, dy - y\, dx = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\log 3.$$

Per le formule di Green Gauss si ha Area $D = \frac{1}{2}\int_\gamma x\, dy - y\, dx = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}\log 3}{2}$.

Esercizio 2. Si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint_D (2x - 3y + z)\, dxdydz,$$

dove $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \,;\, x \ge 0, y \le 0, z \le 0\big\}$.

SOL. Usando le coordinate sferiche si ha

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \sin\phi \\ y = \rho \sin\theta \sin\phi \\ z = \rho \cos\phi. \end{cases} \quad \text{con } 0 \le \rho \le 3,\ \tfrac{3}{2}\pi \le \theta \le 2\pi,\ \tfrac{\pi}{2} \le \phi \le \pi,$$

$$\int_D (2x-3y+z)\, dxdydz = \int_{\substack{0 \le \rho \le 3, \\ \frac{3}{2}\pi \le \theta \le 2\pi, \\ \frac{\pi}{2} \le \phi \le \pi}} (2\rho\cos\theta\sin\phi - 3\rho\sin\theta\sin\phi + \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$\int_0^3 \rho^3 d\rho \int_{\substack{\frac{3}{2}\pi \le \theta \le 2\pi, \\ \frac{\pi}{2} \le \phi \le \pi}} (2\cos\theta\sin^2\phi - 3\sin\theta\sin^2\phi + \cos\phi\sin\phi)\, d\theta d\phi = \frac{81}{4}\pi.$$

Esercizio 3 (Domanda teorica di analisi)**.** Sia γ una curva cartesiana del piano (y, z) di equazione $y = g(z)$, con $a \leq z \leq b$ e $y > 0$. Scrivere la parametrizzazione della superficie che si ottiene dalla rotazione attorno all'asse z di γ e ricavare la formula dell'area di tale superficie.

Soluzione.