I appello di Matematica C, Tema 1
SOLUZIONI

23 Giugno 2008

1) Si considerino la curva γ parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in [0,1]$ e la forma differenziale

$$\omega = \frac{4}{4 + (x + y^2)^2}\,dx + \frac{8y}{4 + (x + y^2)^2}\,dy.$$

Si calcolino gli integrali curvilinei

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,ds, \qquad \int_\gamma \omega.$$

SOLUZIONE

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,ds = 1$$

Una primitiva di ω è $V = 2\arctan\frac{x+y^2}{2}$ quindi

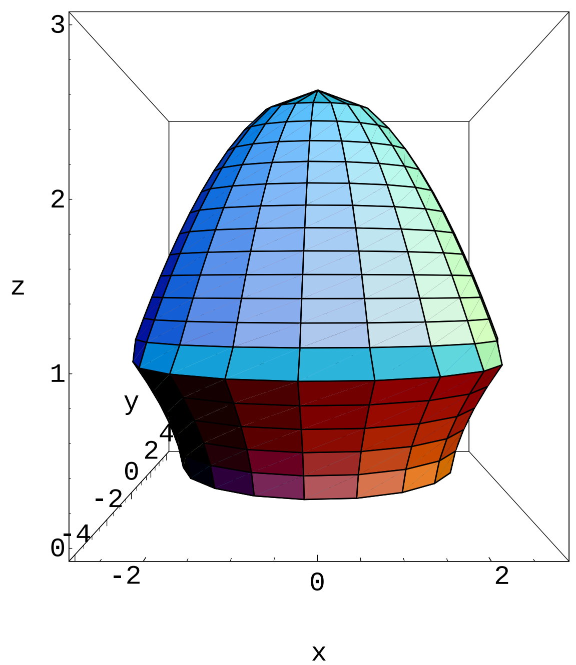
$$\int_\gamma \omega = V(\cosh 1, \sinh 1) - V(1,0) = 2\arctan\frac{\cosh 1 + \sinh^2 1}{2} - 2\arctan\frac{1}{2}.$$

2) Dato il solido

$$\Omega = \{(x,y,z)\ :\ 0 \le z \le 3 - x^2/4 - y^2/9,\ x^2/4 + y^2/9 \le 1 + z^2\},$$

se ne abbozzi un disegno e se ne calcoli il volume. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x, y, x - y)$ uscente da Ω.

SOLUZIONE



La superficie dell'iperboloide e quella del paraboloide si intersecano per $z = 1$ e le sezioni di Ω con piani paralleli al piano xy sono date dalle ellissi

$$\Omega_z = \begin{cases} \{(x,y) : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 3 - z\}, & \text{per } 1 \leq z \leq 3 \\ \\ \{(x,y) : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 + z^2\}, & \text{per } 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Integrando per strati

$$Vol\Omega = \int area(\Omega_z)\, dz = \int_0^1 6\pi(1 + z^2)\, dz + \int_1^3 6\pi(3 - z)\, dz = 20\pi.$$

e dato che $Div\mathbf{F}(x,y,z) = 4$ il flusso $\Phi = 4Vol\Omega = 80\pi$.

I appello di Matematica C, Tema 2, SOLUZIONI

23 Giugno 2008

1) Si considerino la curva γ parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (\sinh t, \cosh t)$, $t \in [0, 1]$ e la forma differenziale

$$\omega = \frac{2x}{1 + (x^2 - y)^2}\, dx - \frac{1}{1 + (x^2 - y)^2}\, dy.$$

Si calcolino gli integrali curvilinei

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, ds, \qquad \int_\gamma \omega.$$

SOLUZIONE

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, ds = 1$$

Una primitiva di ω è $V = \arctan(x^2 - y)$ quindi

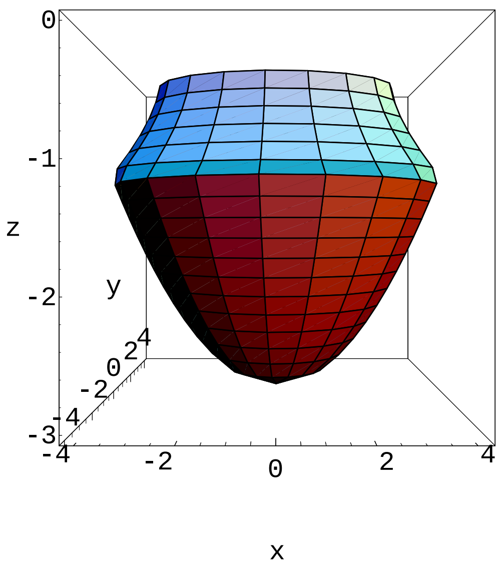
$$\int_\gamma \omega = V(\sinh 1, \cosh 1) - V(0, 1) = \arctan(\sinh^2 1 - \cosh 1) + \pi/4.$$

2) Dato il solido

$$\Omega = \{(x, y, z) \ : \ -3 + x^2/9 + y^2/4 \le z \le 0,\ \ x^2/9 + y^2/4 \le 1 + z^2\},$$

se ne abbozzi un disegno e se ne calcoli il volume. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 3z, y, 2z)$ uscente da Ω.

SOLUZIONE



La superficie dell'iperboloide e quella del paraboloide si intersecano per $z = -1$ e le sezioni di Ω con piani paralleli al piano xy sono date dalle ellissi

$$\Omega_z = \begin{cases} \{(x,y) :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 3 + z\}, & \text{per } -3 \leq z \leq -1 \\ \\ \{(x,y) :\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 + z^2\}, & \text{per } -1 \leq z \leq 0 \end{cases}$$

Integrando per strati

$$Vol\Omega = \int area(\Omega_z)\, dz = \int_{-1}^{0} 6\pi(1+z^2)\, dz + \int_{-3}^{-1} 6\pi(3+z)\, dz = 20\pi.$$

e dato che $Div\mathbf{F}(x,y,z) = 3$ il flusso $\Phi = 3Vol\Omega = 60\pi$.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.