

Quarto Appello di Matematica C, Analisi

Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica

23 settembre 2008

Cognome: _____

Nome: _____

Matricola: _____

Tema A**Esercizio 1.** Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \cos\left(\frac{1}{(x-1)y-1}\right) \frac{ay}{((x-1)y-1)^2} dx + \cos\left(\frac{1}{(x-1)y-1}\right) \frac{1-x}{((x-1)y-1)^2} dy$$

nell'aperto $\Omega = \{(x, y) : (x-1)y < 1\}$.

- Si disegni Ω e si dica se è connesso, convesso, semplicemente connesso;
- si determini $a \in \mathbb{R}$ tale che ω sia esatta in Ω ;
- per tale a si calcoli il potenziale che in $(0, 0)$ vale $\sin 1$.

Soluzione. a) Ω è connesso, non è convesso, è semplicemente connesso.b) $a = -1$.c) $V(x, y) = \sin \frac{1}{(x-1)y-1} + c$, $c = 2 \sin 1$.

Esercizio 2. Sia Σ la superficie data dal grafico della funzione $z = \frac{xy}{2}$ tale che $x^2 + y^2 \leq 12$.

a) Si calcoli l'area di Σ .

b) Si calcoli il flusso del campo $\mathbf{F} = (x, y, 1)$ attraverso Σ orientata in modo che la normale sia rivolta verso l'alto.

Soluzione. a)
$$\text{Area}\Sigma = \int_{x^2+y^2 \leq 12} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}} dx dy = \int_{r^2 \leq 12, 0 \leq t \leq 2\pi} \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}} r dr dt =$$
$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \end{aligned}$$

$$\frac{56}{3}\pi.$$

b) Flusso = $\int_{x^2+y^2 \leq 12} -\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}xy + 1 dx dy = 12\pi.$

Esercizio 3 (Domanda teorica di analisi). Dare la definizione di forma esatta. Dimostrare che se ω è una forma esatta allora, per ogni curva regolare γ , $\int_{\gamma} \omega$ dipende solo dagli estremi di γ .

Soluzione.