

MATEMATICA 1 SOLUZIONI

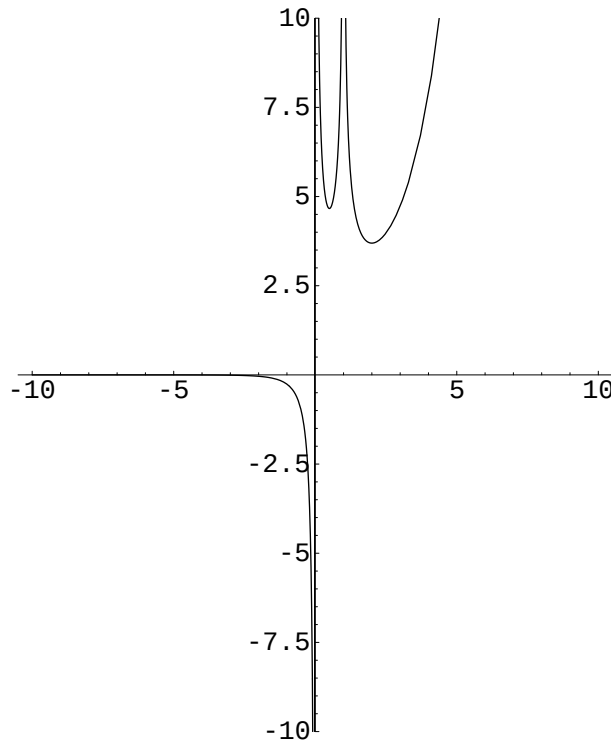
TEMA 1

Padova 11/09/2006

1. Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{e^x}{x\sqrt{|x-1|}} = \lambda.$$

Sol. $\text{Dom} f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0, x \neq 1\}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = e^x \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x^2(x-1)^{\frac{3}{2}}}$
 se $x > 1$, $f'(x) = -e^x \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x^2(-x+1)^{\frac{3}{2}}}$ se $x < 1$. $x_0 = 2, 1/2$ sono due punti di
 minimo. $f(2) = \frac{e^2}{2}$ e $f(1/2) = 2\sqrt{2}e$.



Quindi

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda < 0 & 1 \text{ sol.} \\ 0 \leq \lambda < \frac{e^2}{2} & \text{no sol.} \\ \lambda = \frac{e^2}{2} & 1 \text{ sol.} \\ \frac{e^2}{2} < \lambda < 2\sqrt{2}e & 2 \text{ sol.} \\ \lambda = 2\sqrt{2}e & 3 \text{ sol.} \\ \lambda > 2\sqrt{2}e & 4 \text{ sol.} \end{array} \right.$$

2. Si calcolino, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(3n)^\alpha + \cos n}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x-2})^\alpha \log(x-1)}{(x^2-4)^{5/2}}.$$

Sol.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(3n)^\alpha + \cos n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x-2})^\alpha \log(x-1)}{(x^2-4)^{5/2}} = \begin{cases} 1/32 & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 3 \end{cases}$$

3. Calcolare

$$\int_0^x \sqrt{4-t+|t|} dt$$

Sol.

$$\int_0^x \sqrt{4-t+|t|} dt = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}(4-2x)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{3}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

4. Determinare lo sviluppo di Taylor del terzo ordine della funzione

$$f(x) = \sin(\pi x)$$

nel punto $x = 1$.

Sol.

$$f(1+h) = \sin(\pi + \pi h) = -\sin(\pi h) = -\pi h + \frac{\pi^3}{6}h^3 + o(h)$$

da cui

$$f(x) = -(x-1) + \frac{\pi^3}{6}(x-1)^3 + o(x-1).$$

5. Data una funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ si dimostri che se $x_0 \in \mathbf{R}$ è tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo.

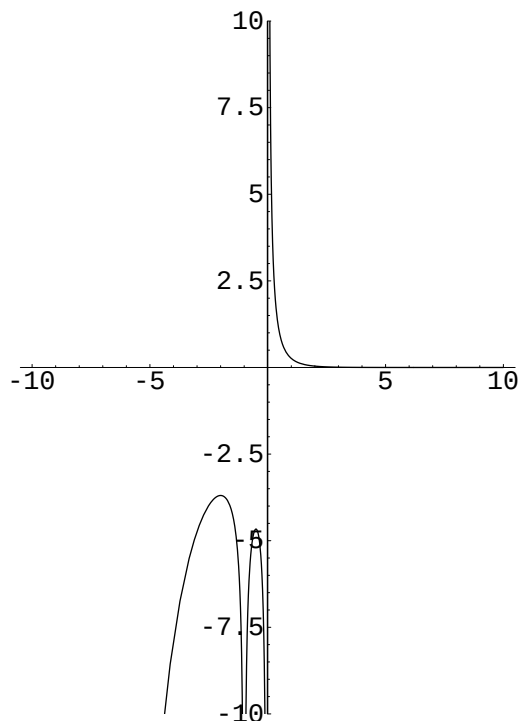
TEMA 2

1. Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{e^{-x}}{x\sqrt{|x+1|}} = \lambda.$$

Sol. La funzione è la simmetrica di quella del tema 1 rispetto all'asse y

cambiata di segno



Quindi

$$\begin{cases} \lambda > 0 & 1 \text{ sol.} \\ 0 \geq \lambda > -\frac{e^2}{2} & \text{no sol.} \\ \lambda = -\frac{e^2}{2} & 1 \text{ sol.} \\ -\frac{e^2}{2} > \lambda > -2\sqrt{2}e & 2 \text{ sol.} \\ \lambda = -2\sqrt{2}e & 3 \text{ sol.} \\ \lambda < -2\sqrt{2}e & 4 \text{ sol.} \end{cases}$$

2. Si calcolino, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{(3n)^\alpha + \sin n}, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x^2 - 9)^{5/2} \log(x - 2)}{(\sqrt{x - 3})^\alpha}.$$

Sol.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{(3n)^\alpha + \sin n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ \text{non esiste se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x^2 - 9)^{5/2} \log(x - 2)}{(\sqrt{x - 3})^\alpha} = \begin{cases} 6^{5/2} & \text{se } \alpha = 7 \\ 0 & \text{se } \alpha < 7 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 7 \end{cases}$$

3. Calcolare

$$\int_0^x \sqrt{2+t-|t|} dt$$

Sol.

$$\int_0^x \sqrt{2+t-|t|} dt = \begin{cases} \sqrt{2}x, & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{3}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

4. Determinare lo sviluppo di Taylor del terzo ordine della funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

nel punto $x = 1$.

Sol.

$$f(1+h) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}h\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}h\right) = -\frac{\pi}{2}h + \frac{\pi}{72}h^3 + o(h)$$

da cui

$$f(x) = -\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{48}(x-1)^3 + o(x-1).$$

5. Data una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ si dimostri che se $x_0 \in \mathbf{R}$ è tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo.