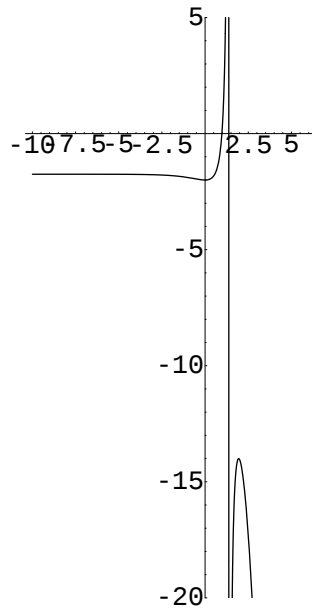


1. Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{e^{2x} - 7}{4 - e^x} = \lambda.$$

SOL. $\text{Dom} f = \mathbf{R} \setminus \{\log 4\}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -7/4$, $\lim_{x \rightarrow \log 4^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \log 4^-} f(x) = +\infty$. $f'(x) = -\frac{e^x(e^{2x} - 8e^x + 7)}{(4 - e^x)^2}$. $x = \log 7$ pto di max. e $f(\log 7) = -14$, $x = 0$ pto di min. e $f(0) = -2$.

$$\begin{cases} \lambda < -14, & -2 < \lambda < -7/4, & 2\text{sol}, \\ \lambda = -14, & -2, & \lambda \geq -7/4, & 1\text{sol}. \\ -14 < \lambda < -7/4 & \text{nessuna sol.} \end{cases}$$



2. Si calcolino, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ e di $\beta \in \mathbf{R}^+$, i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \arccos x}{(1-x)^\alpha}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\beta}{2^x + 3^x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

SOL. Applicando Hospital si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \arccos x}{(1-x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\alpha(1-x)^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - \sqrt{1-x^2} \arccos x}{\alpha(1-x)^{(\alpha-1/2)} \sqrt{1-x^2}} =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{se } \alpha < 1/2 \\ \sqrt{2}, & \text{se } \alpha = 1/2 \\ +\infty, & \text{se } \alpha > 1/2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\beta}{2^x + 3^x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \log(\frac{\beta}{2^x + 3^x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} (\log(\beta/2) - x \log 6/2 + o(x))} =$$

$$\begin{cases} +\infty, & \text{se } \beta > 2 \\ 1/\sqrt{6}, & \text{se } \beta = 2 \\ 0, & \text{se } \beta < 2. \end{cases}$$

3 Calcolare

$$\int_{-3}^0 x e^{|3x+2|} dx$$

SOL.

$$\int_{-3}^0 x e^{|3x+2|} dx = -\frac{1}{9} (8e^7 + e^2 - 4)$$

4. Posto $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, dire quale delle seguenti possibilità è vera, giustificando la risposta

1. $(*) f(x) > g(x) \quad \forall x > 0;$

2. $f(x) < g(x) \quad \forall x > 0;$

3. nessuna delle precedenti disuguaglianze è corretta.

SOL. Per $x > 0$, 1. è equivalente a $\arctan x > \frac{x}{1+x^2}$. Entrambi le funzioni a primo e secondo membro della disuguaglianza si annullano in $x = 0$ e per le derivate si ha

$$\frac{1}{1+x^2} > \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

che si vede è vera per ogni $x \in \mathbf{R}$.

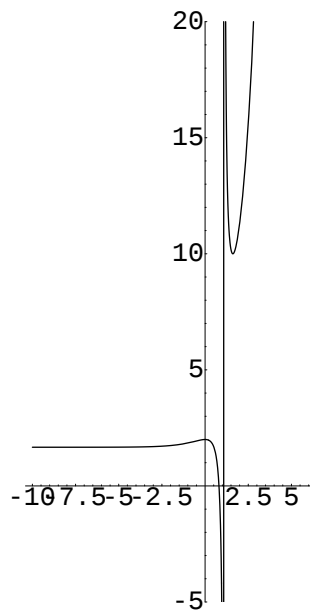
5. Dare la definizione di estremo inferiore di un insieme non vuoto di numeri reali. Dimostrare che se una successione a_n è crescente allora essa ammette limite per $n \rightarrow +\infty$.

1. Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{e^{2x} - 5}{e^x - 3} = \lambda.$$

SOL. $\text{Dom} f = \mathbf{R} \setminus \{\log 3\}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5/3$, $\lim_{x \rightarrow \log 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \log 3^-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 6e^x + 5)}{(-3 + e^x)^2}$. $x = \log 5$ pto di min. e $f(\log 5) = 10$, $x = 0$ pto di max. e $f(0) = 2$.

$$\begin{cases} \lambda > 10, & 5/3 < \lambda < 2, & 2\text{sol}, \\ \lambda = 10, & 2, & \lambda \leq 5/3, & 1\text{sol}. \\ 2 < \lambda < 10 & \text{nessuna sol.} \end{cases}$$



2. Si calcolino, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x \arccos x + \pi}{(x+1)^\alpha}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\beta}{4^x + 5^x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

SOL. Applicando Hospital si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x \arccos x + \pi}{(x+1)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\alpha(1+x)^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1-x^2} \arccos x - x}{\alpha(1+x)^{(\alpha-1/2)} \sqrt{1-x}} =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{se } \alpha < 1/2 \\ \sqrt{2}, & \text{se } \alpha = 1/2 \\ +\infty, & \text{se } \alpha > 1/2 \end{cases}$$

Seguendo il procedimento del Tema 1 si ottiene

$$\begin{cases} +\infty, & \text{se } \beta > 2 \\ 1/\sqrt{20}, & \text{se } \beta = 2 \\ 0, & \text{se } \beta < 2. \end{cases}$$

3 Calcolare

$$\int_0^3 x e^{|3x-2|} dx.$$

SOL.

$$\int_0^3 x e^{|3x-2|} dx = \frac{1}{9}(8e^7 + e^2 - 4).$$

4. Posto $f(x) = \log(1 + x^2)$, $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}$, dire quale delle seguenti possibilità è vera, giustificando la risposta

1. $(*)f(x) > g(x) \quad \forall x > 0$;
2. $f(x) < g(x) \quad \forall x > 0$;
3. nessuna delle precedenti disequazioni è corretta.

SOL. Si ha $f(0) = g(0)$ e per le derivate si ha

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} > x - x^5 = g'(x),$$

che è equivalente a $2 > (1+x^2)(1-x^4)$. Infatti si vede subito che tale disequazione è vera per $x \geq 1$, per $x < 1$ si ha $(1+x^2)(1-x^4) < (1+1)(1-x^4) < 2$. Quindi è vera la 1.

5. Dare la definizione di estremo inferiore di un insieme non vuoto di numeri reali. Dimostrare che se una successione a_n è decrescente allora essa ammette limite per $n \rightarrow +\infty$.