

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA 1

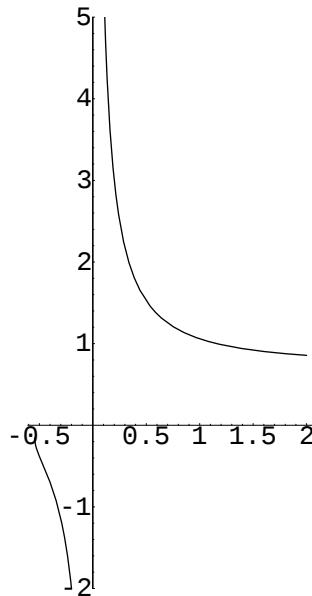
Padova 21/09/2006

1. Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{\log(2\arctan x + 1)} = \lambda.$$

Sol. $\text{Dom } f = \{x \in \mathbf{R} : x > -\tan \frac{1}{2}, x \neq 0\}$, $\lim_{x \rightarrow -\tan \frac{1}{2}^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1/\log(\pi + 1)$.

$$f'(x) = -\frac{2}{\log^2(2\arctan x + 1)(2\arctg x + 1)(1 + x^2)}.$$



Quindi 1 sol $\forall \lambda < 0$, $\lambda > 1/\log(\pi + 1)$, nessuna soluzione per gli altri λ .

2. Si calcolino, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} - 1}{\log(1 + \frac{1}{n^\alpha})}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\cos \left(1 + \frac{\cos n}{2} \right) \right]^{\alpha n}.$$

Sol.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} - 1}{\log(1 + \frac{1}{n^\alpha})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right) \left(\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right)} =$$

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2, \\ 1/3 & \text{se } \alpha = 2, \\ 0 & \text{se } \alpha < 2. \end{cases} ;$$

$$\left[\cos \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right]^{\alpha n} \leq \left[\cos \left(1 + \frac{\cos n}{2} \right) \right]^{\alpha n} \leq \left[\cos \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right]^{\alpha n}$$

da cui per il teorema dei carabinieri

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

3. a) Trovare il punto sulla retta $y = 2x$ più vicino al punto $(1, 1)$.

b) Trovare i punti dell'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ più vicini al punto $(3/4, 0)$.

SOL. a) Si trova usando la geometria analitica $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$.

b) Minimizzando la funzione distanza $d^2(x, y) = (x - 3/4)^2 + y^2$ soggetta al vincolo $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ si trova da minimizzare $f(x) = 3/4x^2 - 3/2x + 25/16$.

I punti richiesti sono $(1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$.

4. Trovare il più grande $a > 0$ tale che la funzione

$$f(x) = -2x^3 + 12x^2 + 30x + 300$$

sia crescente in $[0, a]$.

Sol. Si trova $a = 5$.

5. Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange.

MATEMATICA 1

Ingegneria Edile

Prof. C. Sartori

TEMA 2

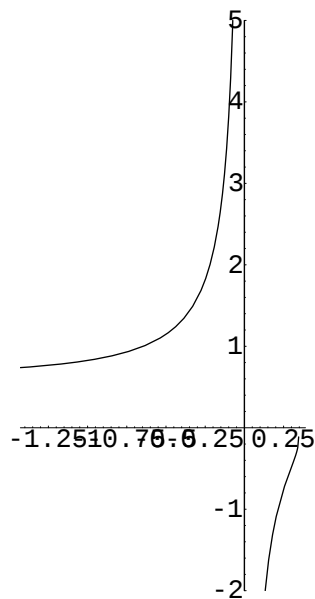
Padova 21/09/2006

1. Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{\log(-3\arctan x + 1)} = \lambda.$$

Sol. $\text{Dom } f = \{x \in \mathbf{R} : x < -\tan \frac{1}{3}, x \neq 0\}$, $\lim_{x \rightarrow -\tan \frac{1}{3}^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1/\log(3/2\pi + 1)$.

$$f'(x) = -\frac{2}{\log^2(-3\arctan x + 1)(-3\arctg x + 1)(1 + x^2)}.$$



Quindi 1 sol $\forall \lambda < 0$, $\lambda > 1/\log(\pi + 1)$, nessuna soluzione per gli altri λ .

2. Si calcolino, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^\alpha})}{-1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sin \left(1 + \frac{\sin n}{2} \right) \right]^{\alpha n}.$$

Sol.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^\alpha})}{-1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{1}{n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha})) \left(\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} + 1 \right)}{\frac{1}{n^3}} =$$

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 3, \\ 3 & \text{se } \alpha = 3, \\ 0 & \text{se } \alpha > 3. \end{cases};$$

$$\left[\sin \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right]^{\alpha n} \leq \left[\sin \left(1 + \frac{\sin n}{2} \right) \right]^{\alpha n} \leq \left[\sin \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right]^{\alpha n}$$

da cui per il teorema dei carabinieri

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

- 3.** a) Trovare il punto sulla retta $y = \frac{1}{2}x$ più vicino al punto $(1, 1)$.
b) Trovare i punti dell'ellisse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ più vicini al punto $(0, 3/4)$.

SOL. a) Si trova usando la geometria analitica $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$.

b) Minimizzando la funzione distanza $d^2(x, y) = (y - 3/4)^2 + x^2$ soggetta al vincolo $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$ si trova da minimizzare $f(x) = 3/4y^2 - 3/2y + 25/16$. I punti richiesti sono $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$.

- 4.** Trovare il più grande $a > 0$ tale che la funzione

$$f(x) = -2x^3 + 12x^2 + 30x + 300$$

sia crescente in $[-a, 0]$.

Sol. Si trova $a = 1$.

- 5.** Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange.