MATEMATICA 1
SOLUZIONI

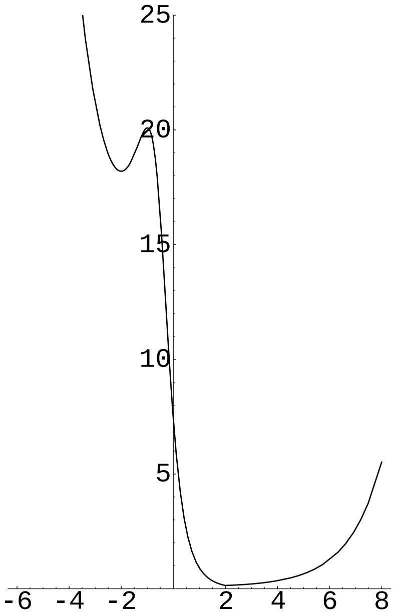
TEMA 1 Padova 14/12/2005

1. Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{e^{|x-2|}}{x^2+x+1} = \lambda.$$

Sol. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. $f'(x) = e^{x-2}\frac{x^2-x}{(x^2+x+1)^2}$ per $x > 2$, $f'(x) = e^{-x+2}\frac{-x^2-3x-2}{(x^2+x+1)^2}$, per $x < 2$. $x = -2, 2$ pti di minimo, ($x = 2$ non derivabile), $x = -1$ pto di max. $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 2/49$, $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -12/49$. $f(-1) = e^3$, $f(-2) = \frac{e^4}{3}$, $f(2) = 1/7$. Quindi

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{7}, & 1 \text{ sol.} \\ \lambda < \frac{1}{7}, & \text{no sol.} \\ \frac{1}{7} < \lambda < e^3, \lambda > \frac{e^4}{3} & 2 \text{ sol.} \\ \lambda = e^3, \frac{e^4}{3} & 3 \text{ sol.} \\ e^3 < \lambda < \frac{e^4}{3} & 4 \text{ sol.} \end{cases}$$



2. Si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan^2 x - x^2 + \frac{1}{6}\alpha\ x^4}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^\alpha + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))^2 - x^2 + \frac{1}{6}\alpha\ x^4}{x^\alpha + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\frac{1}{6}\alpha - \frac{2}{3})x^4 + o(x^4)}{x^\alpha + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \begin{cases} 0, & \alpha \le 4, \\ 4!\left(\frac{1}{6}\alpha - \frac{2}{3}\right), & \alpha > 4. \end{cases}$$

3. Si ha

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x + \sin x}\, dx \underset{\sin x = t}{=} \int \frac{dt}{1 + t^2 + t} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\right).$$

4. *Orale.* Data $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, derivabile due volte, dimostrare che se $x_0 \in (a,b)$ è tale che

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ e}'\text{punto di MASSIMO}$$

Sol. Vedasi testo Cap.13. **5.** (*Solo per l'appello generale*) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più 2 tale che

$$\lim_{x\to \mathrm{e}^2} \frac{\frac{\log x}{x} - P(x)}{(x - \mathrm{e}^2)^2} = 0.$$

Sol. $P(x) = \frac{2}{\mathrm{e}^2} - \frac{1}{\mathrm{e}^4}(x - \mathrm{e}^2) + \frac{1}{2\mathrm{e}^6}(x - \mathrm{e}^2)^2$.

6. (*Solo per l'appello generale*) Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-n+1}{-n+\alpha}\right)^n = 5.$$

Sol. $\alpha = 1 - \log 5$.

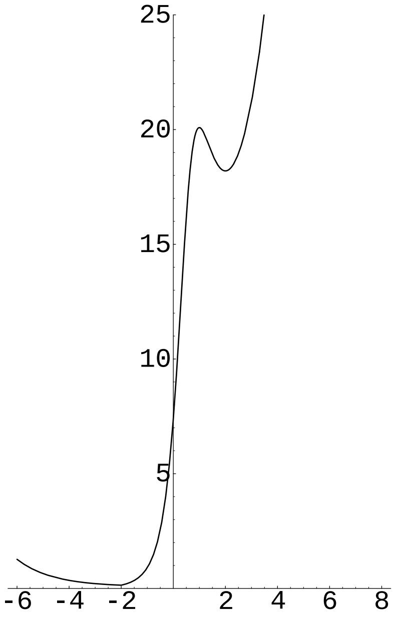
TEMA 2 Padova 14/12/2005

1. Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{\mathrm{e}^{|x+2|}}{x^2 - x + 1} = \lambda.$$

Sol. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R}$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x-2}\frac{-x^2+x}{(x^2-x+1)^2}$ per $x < -2$, $f'(x) = \mathrm{e}^{x+2}\frac{x^2-3x+2}{(x^2-x+1)^2}$, per $x > -2$. $x = -2, 2$ pti di minimo, ($x = -2$ non derivabile), $x = 1$ pto di max. $\lim\limits_{x\to-2^-} f'(x) = -2/49$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f'(x) = 12/49$. $f(1) = \mathrm{e}^3$, $f(2) = \frac{\mathrm{e}^4}{3}$, $f(-2) = 1/7$. Quindi

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{7}, & 1 \text{ sol.} \\ \lambda < \frac{1}{7}, & \text{no sol.} \\ \frac{1}{7} < \lambda < \mathrm{e}^3, \lambda > \frac{\mathrm{e}^4}{3} & 2 \text{ sol.} \\ \lambda = \mathrm{e}^3, \frac{\mathrm{e}^4}{3} & 3 \text{ sol.} \\ \mathrm{e}^3 < \lambda < \frac{\mathrm{e}^4}{3} & 4 \text{ sol.} \end{cases}$$



2. Sol. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)^2 - 4x^2 - \frac{8}{3}\alpha x^3}{\sin x - x + x^\alpha + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2x+2x^2+o(x^2))^2 - 4x^2 - \frac{8}{3}\alpha x^3}{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3) + x^\alpha} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(8-\frac{8}{3}\alpha\right)x^3 + o(x^3)}{x^\alpha - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} = \begin{cases} 0, & \alpha \le 3, \\ 16(\alpha-3), & \alpha > 3. \end{cases}$$

3. Sol.

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x - \cos x}\,dx \underset{\cos x = t}{=} -\int \frac{dt}{1+t^2-t} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

4. *Orale.* Data $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, derivabile due volte, dimostrare che se $x_0 \in (a,b)$ è tale che

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ e}'\text{punto di MINIMO}$$

Sol. Vedasi testo Cap.13

5. (*Solo per l'appello generale*) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più 2 tale che

$$\lim_{x\to \mathrm{e}^3} \frac{\frac{x}{\log x} - P(x)}{(x-\mathrm{e}^3)^2} = 0.$$

Sol. $P(x) = \frac{\mathrm{e}^3}{3} + \frac{2}{9}(x-\mathrm{e}^3) - \frac{1}{54\mathrm{e}^3}(x-\mathrm{e}^3)^2$.

6. (*Solo per l'appello generale*) Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che

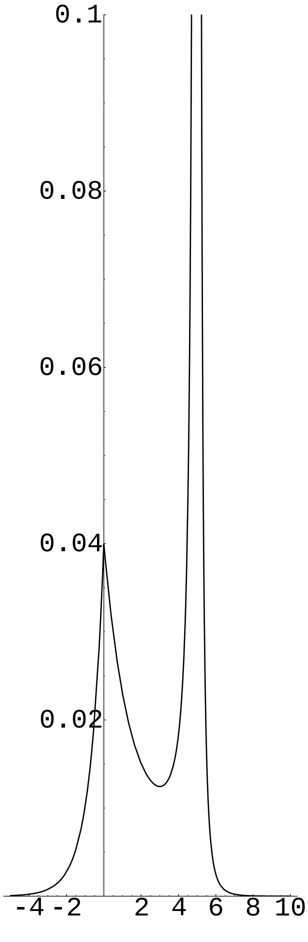
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n+\alpha}\right)^n = 5.$$

Sol. $\alpha = 1 - \log 5$.

1. Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{(x-5)^2} = \lambda.$$

Sol. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R} \setminus \{5\}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. $\lim_{x\to 5} f(x) = +\infty$.$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\frac{-x+3}{(x-5)^3}$ per $x > 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^{x}\frac{x-7}{(x-5)^3}$ per $x < 0$. $x = 3$ pto di min, $x = 0$ pto di max. non derivabile $f(3) = \frac{\mathrm{e}^{-3}}{4}$, $f(0) = \frac{1}{25}$. $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{7}{125}$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{3}{125}$.



Quindi

$$\begin{cases} \lambda \leq 0 \quad no\, sol. \\ 0 < \lambda < \frac{e^{-3}}{4}, \quad 2 \text{ sol.} \\ \lambda = \frac{e^{-3}}{4}, \quad 3 \text{ sol.} \\ \frac{e^{-3}}{4} < \lambda < \frac{1}{25}, \quad 4 \text{ sol.} \\ \lambda = \frac{1}{25}, \quad 3 \text{ sol.} \\ \frac{1}{25} < \lambda, 2 \quad \text{sol.} \end{cases}$$

2. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x - x^2 + \frac{\alpha}{12}x^4}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^\alpha - e^{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - x^2 + \frac{\alpha}{12}x^4}{\frac{x^4}{4!} + o(x^4) + x^\alpha} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{\alpha}{12} - \frac{1}{3}\right)x^4 + o(x^4)}{\frac{x^4}{4!} + o(x^4) + x^\alpha} = \begin{cases} 0, \quad \alpha \leq 4, \\ 2(\alpha - 4), \quad \alpha > 4. \end{cases}$$

3. Calcolare

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x - \sin x}\, dx \underset{\sin x = t}{=} \int \frac{dt}{1 + t^2 - t} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

4. *Orale.* Data $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, derivabile tre volte, dimostrare che se $x_0 \in (a, b)$ è tale che

$$f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ e}'\text{punto di FLESSO}$$

Sol. Vedasi testo Cap.13

5. (*Solo per l'appello generale*) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più 2 tale che

$$\lim_{x\to e^4} \frac{x \log x - P(x)}{(x - e^4)^2} = 0.$$

Sol. $P(x) = 4e^4 + 5(x - e^4) + \frac{1}{2e^4}(x - e^4)^2$.

6. (*Solo per l'appello generale*) Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che

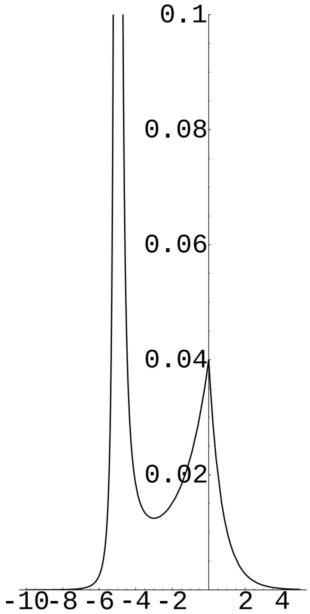
$$\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{n}{n - \alpha}\right)^n = 5.$$

Sol. $\alpha = \log 5$.

1. Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{(x+5)^2} = \lambda.$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-5\}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. $\lim_{x\to 5} f(x) = +\infty$.$f'(x) = \mathrm{e}^x \frac{x+3}{(x+5)^3}$ per $x < 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \frac{-x-7}{(x+5)^3}$ per $x > 0$. $x = -3$ pto di min, $x = 0$ pto di max. non derivabile $f(-3) = \frac{\mathrm{e}^{-3}}{4}$, $f(0) = \frac{1}{25}$. $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{7}{125}$, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{3}{125}$.



Quindi

$$\begin{cases} \lambda \leq 0 \quad \textit{no sol.} \\ 0 < \lambda < \frac{\mathrm{e}^{-3}}{4}, \quad 2 \text{ sol.} \\ \lambda = \frac{\mathrm{e}^{-3}}{4}, \quad 3 \text{ sol.} \\ \frac{\mathrm{e}^{-3}}{4} < \lambda < \frac{1}{25}, \quad 4 \text{ sol.} \\ \lambda = \frac{1}{25}, \quad 3 \text{ sol.} \\ \frac{1}{25} < \lambda, 2 \quad \text{sol.} \end{cases}$$

2. Si determini, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos x - 1)^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{\alpha}{4!6}x^6}{\log(1+x^3) - x^3 + x^\alpha - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{\alpha}{4!6}x^6}{-\frac{x^6}{2} + o(x^6) + x^\alpha} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{\alpha}{4!6} - \frac{1}{4!}\right)x^6 + o(x^6)}{-\frac{x^6}{2} + x^\alpha + o(x^6)} = \begin{cases} 0, & \alpha \leq 6, \\ \frac{1}{12}\left(\frac{1-\alpha}{6}\right), & \alpha > 6. \end{cases}$$

3. Calcolare

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x+\cos x}\,dx \underset{\cos x = t}{=} -\int \frac{dt}{1+t^2+t} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

4. *Orale.* Data $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, derivabile tre volte, dimostrare che se $x_0\in(a,b)$ è tale che

$$f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x_0 \text{ e}'\text{punto di FLESSO}$$

Sol. Vedasi testo Cap.13

5. (*Solo per l'appello generale*) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più 2 tale che

$$\lim_{x\to \mathrm{e}^5}\frac{\frac{1}{x\log x}-P(x)}{(x-\mathrm{e}^5)^2}=0.$$

Sol. $P(x)=\frac{1}{5\mathrm{e}^5}-\frac{6}{25\mathrm{e}^{10}}(x-\mathrm{e}^5)+\frac{67}{250\mathrm{e}^{15}}(x-\mathrm{e}^5)^2.$

6. (*Solo per l'appello generale*) Determinare $\alpha\in\mathbf{R}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-\alpha}{n}\right)^n=5.$$

Sol. $\alpha=-\log 5.$