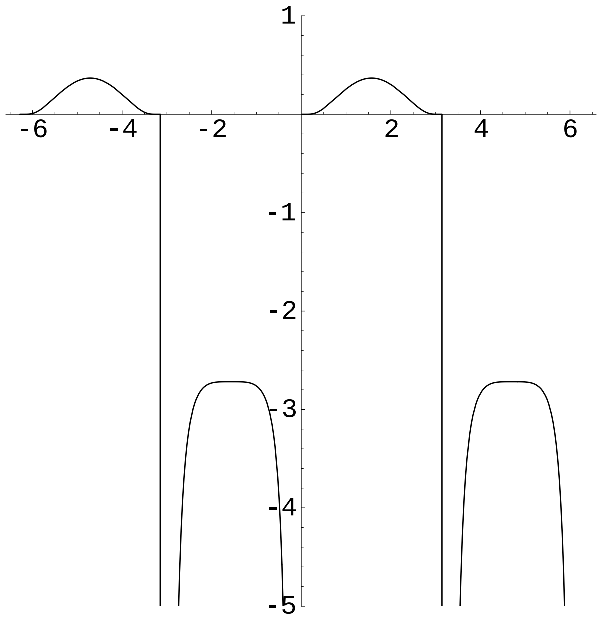
SOLUZIONI

TEMA 1 Padova 11/01/2006

1. Sia data la funzione
$$f(x) = \sin x \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sin x}}.$$

Sol. Dom $f = \{x \in \mathbf{R}, \quad x \neq k\pi, \ k \in \mathbf{Z}\}$. Limito lo studio all'intervallo $[0, 2\pi]$ essendo la funzione periodica di periodo 2π. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to 2\pi^-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sin x}} \frac{\cos x}{\sin x} (\sin x + 1)$. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ pti di max relativo. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{-1}$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to\pi^-} f'(x) = 0$. Quindi
$$\begin{cases} 0 \leq \lambda < \mathrm{e}^{-1}, \ \lambda < -\mathrm{e}, & 2\text{sol.}, \\ \lambda > \mathrm{e}^{-1}, \ -\mathrm{e} < \lambda < 0, & \text{no sol.}, \\ \lambda = -\mathrm{e}, \ \mathrm{e}^{-1}, & 1\,\text{sol..} \end{cases}$$



2. Si calcoli
$$\int_0^1 |3x-1|\mathrm{e}^{3x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^3 + 2\mathrm{e} - 2}{3}.$$

Sol.
$$\int_0^1 |\alpha x - 1|\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx = -\int_0^{\frac{1}{\alpha}} (\alpha x - 1)\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx + \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 (\alpha x - 1)\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx =$$
$$\frac{2}{\alpha}(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\alpha} - 1) + \mathrm{e}^{\alpha}$$

da calcolarsi per $\alpha = 3$.

3. Si studi la crescenza e decrescenza della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+3x)}{x}.$$

Sol. Sia $F(x) = \frac{\log(1+ax)}{x}$. Si ha $F'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{ax}{1+ax} - \log(1+ax)\right)$ e $F'(x) > 0 \iff \log(1+ax) < \frac{ax}{1+ax}$. Sia $g(x) = \log(1+ax)$ e $h(x) = \frac{ax}{1+ax}$. Si ha $g(0) = h(0) = 0$ e $g' > h'$ per $x > 0$. Si deduce che per $a > 0$ $g(x) \geq h(x)$ per ogni $x \in$Dom$g(x) = \{x \in \mathbf{R} : \ x > -1/a\}$ mentre per $a < 0$ $g(x) \geq h(x)$ per ogni $x \in$Dom$g(x) = \{x \in \mathbf{R} : \ x < -1/a\}$. Quindi $F(x)$ è decrescente sia per $a > 0$ che per $a < 0$. Ponendo $a = 3$ si ha che f è DECRESCENTE nel suo dominio.

4.a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x^2}}{x^\alpha} \underset{\text{razionalizzando}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x}{\left(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} \frac{1}{x^\alpha} =$$

$$\begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha < 2/3, \\ 1, & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0, & \text{se } \alpha > 2/3. \end{cases}$$

b)

$$0 \leq \frac{1}{(\log n)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \leq \frac{1}{(\log n)^2} 2\left(1 + \int_1^n \frac{1}{x}\, dx\right) = 2\frac{1+\log n}{(\log n)^2} \to 0.$$

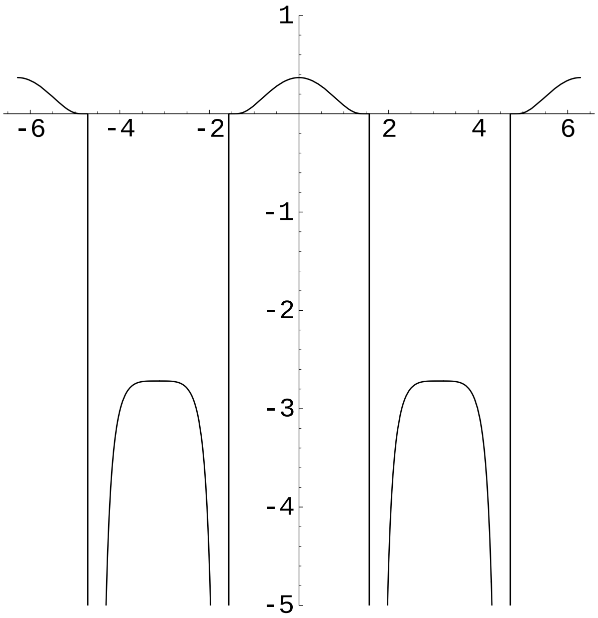
5. *Orale.* Si dia la definizione di

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L, \quad L \in \mathbf{R}.$$

1. Sia data la funzione
$$f(x) = \cos x \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{\cos x}}.$$

Sol. Dom $f = \{x \in \mathbf{R}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}\}$. Limito lo studio all'intervallo $[0, 2\pi]$ essendo la funzione periodica di periodo 2π. $\lim_{x \to \frac{pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{3pi}{2}^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \frac{pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\cos x}} \frac{-\sin x}{\cos x} (\cos x + 1)$. $x = 0, \pi, \ 2\pi$ pti di max relativo. $f(0) = f(2\pi) = \mathrm{e}^{-1}$, $f(\pi) = -\mathrm{e}$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} f'(x) = 0$. Quindi

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda < \mathrm{e}^{-1}, \ \lambda < -\mathrm{e}, & 2\text{sol.}, \\ \lambda > \mathrm{e}^{-1}, \ -\mathrm{e} < \lambda < 0, & \text{no sol.}, \\ \lambda = -\mathrm{e}, \ \mathrm{e}^{-1}, & 1\,\text{sol.}. \end{cases}$$



2. Si calcoli
$$\int_0^1 |-2x + 1| \mathrm{e}^{-2x} \, dx = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}.$$

Sol.

$$\int_0^1 |-ax+1| \mathrm{e}^{-ax} \, dx = \int_0^{\frac{1}{a}} (-ax+1)\mathrm{e}^{-ax} - \int_{\frac{1}{a}}^1 (-ax+1)\mathrm{e}^{-ax} \, dx = \frac{2\mathrm{e}^{-1}}{a} - \mathrm{e}^{-a},$$

da calcolarsi per $a = 2$.

3. Si studi la crescenza e decrescenza della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1-3x)}{x}.$$

Sol. Si veda la soluzione dell'esercizio 3 Tema 1. $f(x)$ è DECRESCENTE.
4. a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x^2}}{x^\alpha} \underset{\text{razionalizzando}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+1+x}{\left(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} \frac{1}{x^\alpha} =$$

$$\begin{cases} -\infty, & \text{se } \alpha < 2/3, \\ -1, & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0, & \text{se } \alpha > 2/3. \end{cases}$$

b)

$$\frac{1}{(\sqrt{\log n})} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k} \geq \frac{3}{(\sqrt{\log n})} \left(1 + \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx\right) = 3\frac{1+\log(n+1)}{(\sqrt{\log n})} \to +\infty.$$

5. *Orale.* Si dia la definizione di

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

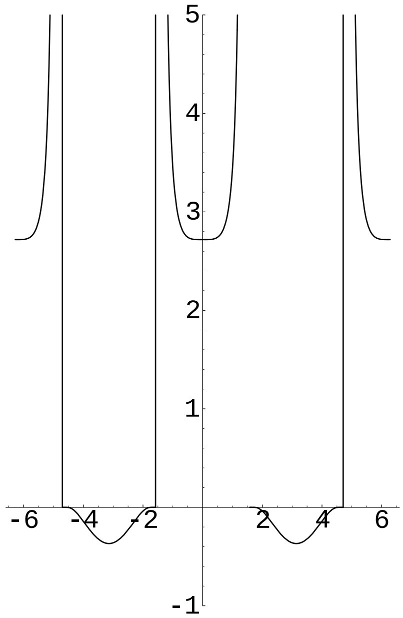
MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA 3 Padova 11/01/2006

1. Sia data la funzione
$$f(x) = \cos x \ \mathrm{e}^{+\frac{1}{\cos x}}.$$

Dom $f = \{x \in \mathbf{R}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$. Limito lo studio all'intervallo $[0, 2\pi]$ essendo la funzione periodica di periodo 2π. $\lim_{x\to \frac{pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{3pi}{2}^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to \frac{pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = 0$. $f'(x) = \mathrm{e}^{+\frac{1}{\cos x}} \frac{\sin x}{\cos x} (-\cos x + 1)$. $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$ pti di min relativo. $f(0) = f(2\pi) = \mathrm{e}$, $f(\pi) = -\mathrm{e}^{-1}$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f'(x) = \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} f'(x) = 0$. Quindi

$$\begin{cases} -\mathrm{e}^{-1} < \lambda \leq 0,\ \lambda > \mathrm{e}, & 2\text{sol.}, \\ \lambda < -\mathrm{e}^{-1},\ 0 < \lambda < \mathrm{e}, & \text{no sol.}, \\ \lambda = \mathrm{e},\ -\mathrm{e}^{-1}, & 1\,\text{sol..} \end{cases}$$



2. Si calcoli
$$\int_0^1 |4x-1|\mathrm{e}^{4x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^4}{2} + \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Sol. Si veda Es. 2 Tema 1 per $\alpha = 4$.

3. Si studi la crescenza e decrescenza della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 - \frac{x}{3})}{x}.$$

Sol. Si veda Es. 3 Tema 1 per $a = -1/3$ che implica f DECRESCENTE.

4. Sol. a)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{x^2}}{|x|^\alpha} \underset{\text{razionalizzando}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1+x}{\left(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}\right)} \frac{1}{|x|^\alpha} =$$

$$\begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha < 2/3, \\ 1, & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0, & \text{se } \alpha > 2/3. \end{cases}$$

b)

$$0 \le \frac{1}{(\log n)^3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \frac{1}{(\log n)^3} \left(1 + \int_1^n \frac{1}{x}\, dx\right) = \frac{1+\log n}{(\log n)^3} \to 0.$$

5. *Orale.* Si dia la definizione di

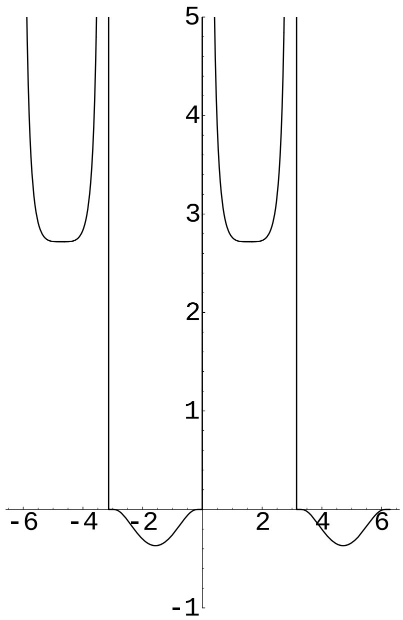
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA 4 Padova 11/01/2006

1. Sia data la funzione
$$f(x) = \sin x \; \mathrm{e}^{+\frac{1}{\sin x}}.$$

Sol. Dom $f = \{x \in \mathbf{R}, \quad x \neq k\pi, \; k \in \mathbf{Z}\}$. Limito lo studio all'intervallo $[0, 2\pi]$ essendo la funzione periodica di periodo 2π. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to 2\pi^-} f(x) = 0$. $f'(x) = \mathrm{e}^{+\frac{1}{\sin x}} \frac{\cos x}{\sin x} (\sin x - 1)$. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ pti di min relativo. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-1}$, $\lim_{x\to 2\pi^-} f'(x) = \lim_{x\to\pi^+} f'(x) = 0$. Quindi
$$\begin{cases} -\mathrm{e}^{-1} < \lambda \leq 0, \; \lambda > \mathrm{e}, & \text{2sol.}, \\ \lambda < -\mathrm{e}^{-1}, \; 0 < \lambda < \mathrm{e}, & \text{no sol.} \\ \lambda = \mathrm{e}, \; -\mathrm{e}^{-1}, & 1\,\text{sol.}. \end{cases}$$



2. Si calcoli
$$\int_0^1 |-5x + 1| \mathrm{e}^{-5x} \, dx = \frac{2}{5\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^5}.$$

Sol. Si veda Es. 2 Tema 2.

3. Si studi la crescenza e decrescenza della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + \frac{x}{4})}{x}.$$

Sol. Si veda Es. 3 Tema 1 con $a = 1/4$ per cui f è decrescente.

4. Sol. a)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x^2}}{|x|^\alpha} \underset{\text{razionalizzando}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+1-x}{\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}\right)} \frac{1}{|x|^\alpha} =$$

$$\begin{cases} -\infty, & \text{se } \alpha < 2/3, \\ -1, & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0, & \text{se } \alpha > 2/3. \end{cases}$$

b)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\log n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{(\sqrt[3]{\log n})} \left(1 + \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{1+\log(n+1)}{(\sqrt[3]{\log n})} \to +\infty.$$

5. *Orale.* Si dia la definizione di

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L, \quad L \in \mathbf{R}$$