MATEMATICA 1

TEMA 1 Padova 07/11/2005

SOLUZIONI

1) Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = 3x^4 + 4(2a - a^2)x^3 - 12a^3x^2 + a^6,$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato. Determinare

a) i punti di massimo e minimo di f e i valori di f in tali punti;

$x = -2a, a^2$ punti di minimo; $x = 0$ punto di massimo; $f(-2a) = -16a^4 - 16a^5 + a^6$, $f(a^2) = -a^8 - 4a^7 + a^6$ $f(0) = a^6$.

b) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha 2 zeri positivi;

Basta imporre $f(a^2) < 0$ che implica $a > -2 + \sqrt{5}$;

c) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha non piu' di uno zero negativo;

Basta imporre $f(-2a) \geq 0$ che implica $a \geq 8 + \sqrt{80}$.

d) i valori di $a \geq 0$ per cui f è convessa.

$a = 0$

2) Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha \in \mathbf{Q}$),

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^6 - 3^6}{x^8 - 3^8} = 1/12, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + x^2}. = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2/3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2/3 \end{cases}$$

3) Sia data $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile, tale che $x_0 \in (a, b)$ sia punto di massimo. Dimostrare che $f'(x_0) = 0$.

Vedasai testo

4) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{\sqrt[n]{\sqrt[2]{3^{n^2} + n^3}}} = 1.$$

Infatti

$$3^{\frac{1}{2n}} = (3^{n^2})^{\frac{1}{2n^3}} \leq \sqrt[n^2]{\sqrt[n]{\sqrt[2]{3^{n^2} + n^3}}} \leq (3^{n^2} + 3^{n^2})^{\frac{1}{2n^3}} \leq 2^{\frac{1}{2n}} 3^{\frac{1}{2n}}.$$

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA 2 Padova 07/11/2005

1) Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = 6x^4 + 8(a^2 - a)x^3 - 12a^3x^2 + a^6,$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato. Determinare
a) i punti di massimo e minimo di f e i valori di f in tali punti;
$x = a, -a^2$, pti di minimo, $x = 0$ pto di max; $f(a) = a^6 - 4a^5 - 2a^4$, $f(-a^2) = -2a^8 - 4a^7 + a^6$, $f(0) = a^6$.

b) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha 2 zeri negativi;
Basta imporre $f(-a^2) < 0$ che implica $a > -1 + \sqrt{6}/2$;

c) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha non piu' di uno zero positivo;
Basta imporre $f(a) \geq 0$ che implica $a \geq 2 + \sqrt{6}$.

d) i valori di $a \geq 0$ per cui f è convessa.
$a = 0$.

2) Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha \in \mathbf{Q}$),

$$\lim_{x\to 5} \frac{5^6 - x^6}{x^7 - 5^7} = -6/35, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x^2} + x}{x + \sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x^2} + x}{\sqrt[3]{x^2}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 4/3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 4/3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 4/3. \end{cases}$$

3) Sia data $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile e tale che $x_0 \in (a, b)$ sia punto di minimo. Dimostare che $f'(x_0) = 0$.

Vedasi testo

4) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[2]{5^{n^2} + n^2}}} = \sqrt{5}.$$

Infatti

$$5^{\frac{1}{2}} = (5^{n^2})^{\frac{1}{2n^2}} \leq \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[2]{5^{n^2} + n^2}}} \leq (5^{n^2} + 5^{n^2})^{\frac{1}{2n^2}} \leq 2^{\frac{1}{n}} 5^{\frac{1}{2}}.$$

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA 3 Padova 07/11/2005

1) Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = -6x^4 + 8(a - a^2)x^3 + 12a^3x^2 - a^6,$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato. Determinare
a) i punti di massimo e minimo di f e i valori di f in tali punti;
$x = a$, $x = -a^2$ pti di max, $x = 0$ pto di min; $f(a) = -a^6 + 4a^5 + 2a^4$, $f(-a^2) = 2a^8 + 4a^7 - a^6$, $f(0) = -a^6$.

b) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha 2 zeri negativi;
Basta imporre $f(-a^2) > 0$ che implica $a > \sqrt{6}/2 - 1$;

c) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha non piu' di uno zero positivo;
Basta imporre $f(a) \leq 0$ che implica $a \geq 2 + \sqrt{6}$.

d) i valori di $a \geq 0$ per cui f è concava.
$a = 0$.

2) Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha \in \mathbf{Q}$),

$$\lim_{x\to 7} \frac{7^7 - x^7}{x^6 - 7^6} = -49/6, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{2^n} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^\alpha + x^2 + x}}. = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^\alpha + x^2 + x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 4/3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 4/3 \\ 0 & \text{se } \alpha < 4/3. \end{cases}$$

3) Sia data $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile tale che $f'(x) \equiv 0$. Dimostrare che f è una funzione costante in (a, b).

Vedasi testo

4) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{5^n + n}}} = 5^{\frac{1}{4}}.$$

Infatti

$$5^{\frac{1}{4}} = (5^n)^{\frac{1}{4n}} \leq \sqrt[n]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{5^n + n}}} \leq (5^n + 5^n)^{\frac{1}{4n}} \leq 2^{\frac{1}{n}} 5^{\frac{1}{4}}.$$

MATEMATICA 1
Ingegneria Edile
Prof. C. Sartori

TEMA 4 Padova 07/11/2005

1) Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = -3x^4 + 4(a^2 - 2a)x^3 + 12a^3x^2 - a^6,$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato. Determinare
a) i punti di massimo e minimo di f e i valori di f in tali punti;
$x = a^2, -2a$ pti di max, $x = 0$ pto di min; $f(a^2) = a^8 + 4a^7 - a^6$, $f(-2a) = -a^6 + 16a^5 + 16a^4$, $f(0) = -a^6$;

b) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha 2 zeri negativi;
basta imporre $f(-2a) > 0$ che implica $a < 8 + \sqrt{80}$;

c) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha non piu' di uno zero positivo;
basta imporre $f(a^2) \leq 0$ che implica $a \leq -2 + \sqrt{5}$;

d) i valori di $a \geq 0$ per cui f è concava.
$a = 0$

2) Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha \in \mathbf{Q}$),

$$\lim_{x\to 10} \frac{10^6 - x^6}{x^7 - 10^7} = -3/35, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n!} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} + x^3}{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2/3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0 & \text{se } \alpha < 2/3. \end{cases}$$

3) Date $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ e $g : (a, b) \to \mathbf{R}$ due funzioni derivabili con $f'(x) < g'(x)$ e $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = g(x_0)$. Dimostrare che $f(x) < g(x)$ per $x > x_0$ e $f(x) > g(x)$ per $x < x_0$.

Vedasi testo

4) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{5^{n^2} + n}}} = 1.$$

Infatti

$$5^{\frac{1}{n}} = (5^{n^2})^{\frac{1}{n^3}} \leq \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{5^{n^2} + n}}} \leq (5^{n^2} + 5^{n^2})^{\frac{1}{n^3}} \leq 2^{\frac{1}{n}} 5^{\frac{1}{n}}.$$